物理譯報叢刊

有关人造地球卫星的运动科学研究的若干问题

中国物理学会編輯
科学出版社出版
1958

物理譯报叢刊

有关人造地球卫星的运动与科学研究的若干問題

中国物理学会編輯
科学出版社出版
1958

物理譯報叢刊

有关人造地球卫星的运动与
科学研究的若干問題

編輯者：中国物理学会

出版者：科学出版社
北京朝阳門大街117号
北京市書刊出版业营业許可証出字第061号

印刷者：中国科学院印刷厂

总經售：新华書店

1958年9月第一版　　書号：1385　印张：13
1959年3月第三次印刷　　开本：787×1092　1/16
(京) 2,401—3,450　　字数：318,000

定价：(10) 2.00元

目　　录

編 者 的 話

1957 年 10 月 4 日，苏联成功地发射出人类有史以来第一顆人造地球卫星，这顆卫星是直径 58 厘米的圓球，重 83.6 公斤，装置有二台无綫电发射机．同年 11 月 3 日，苏联又成功地发射出第二顆人造地球卫星，重量为 508.3 公斤，装备的仪器除了两台无綫电发射机而外，还有研究太阳輻射和宇宙綫等的仪器，以及实驗动物——小狗“萊伊卡”．今年 5 月 15 日，苏联第三顆人造地球卫星又上了天，这顆新的大卫星重 1327 公斤，比第一个重 15 倍，比第二个重 1.6 倍，装备更为齐全，有研究一系列地球物理問題和物理問題的仪器、遙測系統、一台无綫电发射机、化学电源装备和太阳能电池．

三次苏联人造地球卫星的发射成功，而且在重量、大小、高度和科学仪器等方面，都是一次比一次更优越，这表明苏联科学技术不断地有了新的发展和成就，同时还标誌着东风已經压倒西风，并且还在繼續压倒西风．大家知道，美国費了九牛二虎之力才发射了三顆小卫星，体积又小，科学价值又低，根本不能和苏联的人造卫星相比，而且在以后又发射的卫星又遭到了失敗．

根据国际地球物理年的計划，苏联的前两个卫星对大气高层和宇宙空間进行了科学的考察，并积累了极其广泛的材料，对世界科学作出了重大的貢献．现在，第三个卫星在前两个卫星所取得的成就的基础上，进一步进行对大气高层和宇宙空間的科学考察和广泛研究，从而将使人类这方面的科学研究进入一个新阶段．这是人类向宇宙空間进軍的又一胜利，也是世界科学研究的又一福音．中国人民热烈祝賀苏联在科学技术方面的这一新成就．

为了帮助我国科学工作者更好地明瞭人造地球卫星的科学意义，本专集特地翻譯刊載了苏联“物理学进展”1957 年 9 月人造地球卫星专号的全部論文．这些論文还是在第一顆人造卫星发射之前发表的，离現在已有一年左右；我們未能更早地把它們介紹給我国讀者，这是我們深以为憾的．

本专集所包括的 17 篇論文基本上可分为两大类．第一类专論涉及人造地球卫星本身的发射和运行的問題，本专集的第一至第五篇論文就屬于这一类．这五篇論文主要討論各种因素（太阳、月球和各种地球物理因素）对卫星軌道的影响．

第二类包括其余的 12 篇論文，它們討論利用人造地球卫星所可能进行的各种科学研究，如测量高空大气的密度、压力、电离层、以及宇宙綫等等．

当然，这 17 篇論文不可能涉及人造地球卫星的全部問題，特别是在卫星发射后所得出的实驗結果，当然还有待于以后的报导．我們希望，这些专論能使讀者們对人造卫星先有一定的概念．以后我們还将陸續选譯这一方面的論文．

本专集的論文主要由中国科学院力学研究所、地球物理研究所和北京大学的几位同志协力譯出，在此，我們謹向他們的大力协助表示謝意．

1958 年 5 月 23 日

与发射人造地球卫星有关的几个变分問題

奥霍齐姆斯基　埃涅耶夫

Д. Е. Охоцимский, Т. М. Энеев, УФН 63, 5 (1957)

本文討論把人造地球卫星运送到軌道上去的問題. 設想卫星的运送是用一級或多級火箭加速器来实現的. 現在所要研究的是:为了保証以最小量的燃料消耗来把卫星运送到預定的軌道上去,噴气发动机推力的方向随时間而变化的規律应当是怎样的. 同时也要找出最有利的燃料消耗方式.

上述問題的解决是在一系列簡化的假定下进行的，它使我們对运送卫星到軌道上去的最佳条件的特点能有明确的概念,并且能够指出,通过什么途径可以得到具有最小初始重量的加速器.

§1中討論了同时选择推力方向控制方案和燃料消耗方式的問題. §2中在燃料消耗方式为已知的假定下,对具有不同級数的多級加速器最佳方案的选择問題进行研究. §3中把运送卫星到軌道上去的問題推广到在中心引力場內运动的情形,并考虑到地球的旋轉.

§1. 最佳燃料消耗方式和推力方向最佳方案的选择

在解决上述問題时,假定沒有空气动力,并假定地球的引力場是面平行的. 第一个假定的根据是当把卫星送上軌道时，大部分弹道处于空气动力很小的高空大气层里. 如果我們假定弹道的尺寸和地球的半径相比很小，那么就可以用面平行的引力場代替地球的中心引力場.

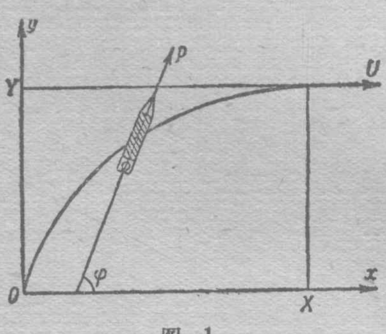

图 1

上面两个假定实际上只能近似地成立. 然而在这种近似下来解决問題仍旧是很有意思的，因为这样可以很簡单地得到問題的完全解答,分析所得的結果,并了解现象的基本規律.

带加速器的卫星的运动方程投影到直角坐标系上可以写成(图1):

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=p\cos\varphi,\\ \frac{dw}{dt}&=p\sin\varphi-g,\\ \frac{dy}{dt}&=w,\\ \frac{dx}{dt}&=u,\end{aligned}\right\}\qquad(1.1)$$

其中 u 和 w 是速度在水平方向和垂直方向的投影，p 是反作用力的加速度的大小，φ 是推力对水平方向的傾角．因为可以認为推力的方向是沿着加速器的縱軸，所以可以把角 φ 理解为加速器的軸对水平方向的傾角（俯仰角）．方程(1.1)中的 x 和 y 是水平坐标和垂直坐标．

方程組(1.1)的最后一个方程只是用来决定坐标 x 的．如果对飞行距离不作任何限制，那么在解变分問題时，可以略去这个方程，因为在其他的方程里不包含坐标 x．

考虑卫星在理想情形下得到的速度 V（也就是当卫星上所受的力除反作用力外沒有其他任何力的时候所得到的速度）．我們有：

$$V=\int_0^t p\,dt;$$

由此得：

$$p=\frac{dV}{dt}.$$

代入方程組(1.1)，并把前三个方程写成：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt}&=\frac{dV}{dt}\cos\varphi,\\
\frac{dw}{dt}&=\frac{dV}{dt}\sin\varphi-g,\\
\frac{dy}{dt}&=w.
\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

数量 V 是在加速和把卫星送上軌道的过程中所可能給予卫星的可供支配的速度。

运动方程(1.2)的右方包含两个不确定的时間函数 $V(t)$ 和 $\varphi(t)$．我們的任务是要选择这些函数，使得在运送阶段的終了在給定的高度获得最大的水平分速．由于互易性，所得到的解也保証在給定速度时达到最大的高度，以及以最少燃料消耗达到給定的高度和速度．

現在来陈述边界条件．假定在运动起始 $t=0$ 时有某个高度 y_0 和某个水平分速 u_0 及垂直分速 w_0．在运动起始时速度 V 自然是取为零．在运动終了 $t=T$ 时，高度应当是 $y=Y$，速度应当是水平方向，卽 $w=0$．我們假設 V 在运动終了时等于某一个固定的数值 V_k．这样也就等于假定說，有一定的理想速度的储藏，需要以最合理的方式利用它們．如果認为排气速度的大小或单位推力的大小不依賴于每秒的燃料消耗量，那么总理想速度 V_k 决定于加速器的起始重量和最終重量之比，而不依賴于燃料消耗方式．这就是說，給出运动終了时 V_k 的一定数值，就相当于給出起始重量和最終重量的一定比值，而在卫星重量为給定的情形下，这就表示給定了加速器的起始重量。

这样，边界条件是：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{当 } t=0 \text{ 时}\quad u=u_0,\quad w=w_0,\quad y=y_0,\quad V=0.\\
&\text{当 } t=T \text{ 时}\qquad\qquad\ \ w=0,\quad y=Y,\quad V=V_k.
\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

运送阶段的运动时間 T 或者可以認为是給定的，或者可以从运动終了有最大速度这一条件来选定．同时可以認为，运送阶段的运动时間 T 和发动机工作的时間 T_* 不同，而只满足条件

$$T\geqslant T_*,$$

其中 T_* 是給定的量.

除連續条件外，我們不对函数 $\varphi(t)$ 作任何其他限制．函数 $V(t)$ 作为一个非負量的积分，应当認为是非減小的函数．图 2 示 V 和时間关系的大致图形．水平綫段相应于发动机不工作时的运动．垂直綫段相应于部分燃料瞬間消耗时的运动．如果不限制每秒燃料消耗量的多少，那么在 (t,V) 平面上的可取曲綫是联結点 O 和点 B 的任意綫(图 2)，在这条綫上 V 应当是非減小的．如果对每秒燃料消耗量加以限制，那么可取曲綫要满足更严格的条件，就是从曲綫上某点开始的曲綫元应当处在某个角的内部或它的边上，这个角的上边相应于最大的每秒燃料消耗量的运动，而它的下边相应于最小每秒燃料消耗量的运动．在极限的情形，当可能的最大消耗量是无限大时(瞬間燃燒)，角的上边垂直向上，而在可能的最小消耗量等于零时(发动机关上时的运动)，角的下边是水平綫段．

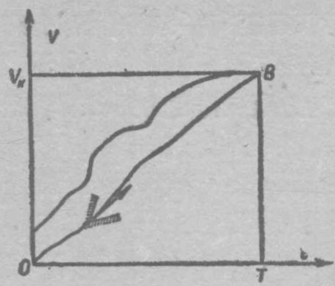

图 2

把(1.2)的第一个方程由 0 到 T 积分，我們得到加速阶段終了的速度：

$$u=\int_0^T \frac{dV}{dt}\cos\varphi\, dt+u_0. \tag{1.4}$$

此外，我們有另两个微分关系的方程．把它們改写成：

$$\frac{dw}{dt}-\frac{dV}{dt}\sin\varphi+g=0, \tag{1.5}$$

$$\frac{dy}{dt}-w=0. \tag{1.6}$$

我們还有边界条件(1.3)．把 u_0 和 w_0 表示作：

$$u_0=v_0\cos\vartheta_0;\qquad w_0=v_0\sin\vartheta_0. \tag{1.7}$$

将 V_0 当作是已知的，并改变角 ϑ_0，就可从問題的解得到最佳的初速向量傾角的值．

作出輔助泛函

$$J=v_0\cos\vartheta_0+\int_0^T\left\{\frac{dV}{dt}\cdot\cos\varphi+\lambda_1\left(\frac{dw}{dt}-\frac{dV}{dt}\sin\varphi+g\right)+\right.$$
$$\left.+\lambda_2\left(\frac{dy}{dt}-w\right)\right\}dt, \tag{1.8}$$

其中 λ_1 和 λ_2 是暫时未定的时間函数．改变初始角 ϑ_0 和运送阶段的运动时間 T，来計算上述泛函的变分．

对所有包含在内的函数和变化参数进行变分，并利用边界条件，我們得到下面的变分表式：

$$\delta J=-v_0(\sin\vartheta_0+\lambda_1\cos\vartheta_0)\,\delta\vartheta_0+g\lambda_1\,\delta T+$$
$$+\int_0^T\left\{(-\sin\varphi-\lambda_1\cos\varphi)\frac{dV}{dt}\delta\varphi+\left[-\frac{d}{dt}(\cos\varphi-\lambda_1\sin\varphi)\right]\delta V-\right.$$
$$\left.-\frac{d\lambda_2}{dt}\delta y-\left(\frac{d\lambda_1}{dt}+\lambda_2\right)\delta w\right\}dt. \tag{1.9}$$

如果初始角并不固定，而是由最佳条件来选取的，那么在初始角 ϑ_0 和运动开始时的 $\lambda_1(t)$ 之間

有关系式:

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = -\lambda_1|_{t=0}, \tag{1.10}$$

这个关系式由(1.9)式积分号前第一个式子等于零所给出. 令第二个式子等于零,得到加速阶段終了时的条件

$$\lambda_1|_{t=T} = 0. \tag{1.11}$$

如果运动时間是固定的,那么 $\delta T = 0$,上面对函数 $\lambda_1(t)$ 写出的条件就沒有了.

我們这样来决定 λ_1 和 λ_2: 使积分号下 δy 和 δw 的因子等于零, 从而从汎函变分的式子里取消这些变分. 这样做之后,变分的表式为:

$$\delta J = \int_0^T \left\{(-\sin\varphi - \lambda_1 \cos\varphi)\frac{dV}{dt}\delta\varphi + \left[-\frac{d}{dt}(\cos\varphi - \lambda_1 \sin\varphi)\right]\delta V\right\} dt, \tag{1.12}$$

其中函数 λ_1 应当由方程

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\lambda_2, \qquad \frac{d\lambda_2}{dt} = 0 \tag{1.13}$$

和边界条件(1.11)来决定,条件(1.11)在 T 不固定的情形必須考虑.

从(1.13)的第二个方程得:

$$\lambda_2 = 常数. \tag{1.14}$$

把这个值代入(1.13)的第一个方程,得:

$$\lambda_1 = C_1 + C_2 t, \tag{1.15}$$

其中 C_1 和 C_2 是两个常数. 当 T 不固定时,我們有:

$$C_1 + C_2 T = 0,$$

因此 λ_1 的表式化为:

$$\lambda_1 = -C_2(T-t). \tag{1.16}$$

公式(1.15)和(1.16)表明,λ_1 是时間的綫性函数. 我們应注意到,这两个公式包含同样数目的任意常数,因为在公式(1.16)中 C_1 被未知量 T 所代替.

令公式(1.12)中积分号下变分 $\delta\varphi$ 的表式等于零,得:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\lambda_1, \tag{1.17}$$

利用公式(1.15),求出俯仰角最佳方案的表式

$$\operatorname{tg} \varphi = -(C_1 + C_2 t). \tag{1.18}$$

如果 T 不固定,那么,根据(1.16),我們有:

$$\operatorname{tg} \varphi = C_2(T-t). \tag{1.19}$$

因此,如果时間不固定,俯仰角在运动終了就应該等于零,也就是說,加速器的軸应当是水平方向.

还可以把最佳方案的公式改写成:

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 t, \tag{1.20}$$

其中 φ_0 是在初始时刻的俯仰角.

因此可得出下面的結論:在最佳方案中,俯仰角的正切应当是时間的綫性函数. 包含在普遍表式中的两个参数,应当选择得使边界条件得到满足.

比較公式(1.10)和(1.17),可以看出,最佳初始角 ϑ_0 必須适合条件

$$\operatorname{tg}\vartheta_0 = \operatorname{tg}\varphi_0. \tag{1.21}$$

这就是說,在初始时刻,加速器縱軸的方向应該和初始速度的方向一致. 如果 ϑ_0 是預先給定的,这个条件可以不被满足.

公式(1.18)—(1.20)給出俯仰角在任意 $V(t)$ 情形时的变化規律. 現在我們以最好的方式选择函数 $V(t)$,假定对每一个这样的函数都取一个最佳的俯仰角变化規律.

这时汎函的变分为:

$$\delta J = \int_0^T \left\{ -\left[\frac{d}{dt}(\sin\varphi - \lambda_1\cos\varphi)\right]\delta V\right\} dt. \tag{1.22}$$

在满足微分条件(1.5)和(1.6)时,汎函(1.4)和(1.8)相同. 如果这些条件在进行变分时同样满足,那么这两个汎函的变分也应当相同. 因此,在改变燃料消耗方式以及相应地改变函数 $V(t)$ 的时候,公式(1.22)可以用来計算加速阶段終了时的速度变分 δU. 必須指出,只是当所有 V 的变化在时刻 T 以前結束时,变分表式(1.22)才成立.

可以把公式(1.22)变换成:

$$\delta U = \int_0^T \Phi(t)\cdot\delta V\cdot dt, \tag{1.23}$$

其中

$$\Phi = \frac{C_2(\operatorname{tg}\varphi_0 - C_2 t)}{\sqrt{(\operatorname{tg}\varphi_0 - C_2 t)^2 + 1}}, \tag{1.24}$$

或

$$\Phi = C_2\sin\varphi. \tag{1.24a}$$

公式(1.23)和(1.24)表明,积分号下变分 δV 的乘数 $\Phi(t)$ 只依賴于时間. 在区間 $(0,T)$ 內,$\Phi(t)$ 或者在所有时間內不改变符号,或者改变符号,并且公式(1.24)表明,Φ 的符号变化是和分子的符号变化相联系,因此只可能变号一次.

根据函数 $\Phi(t)$ 上述的性質,不难知道,汎函的极值由具有跳跃变化的函数 $V(t)$ 所达到. 現在分别考虑各种可能情形.

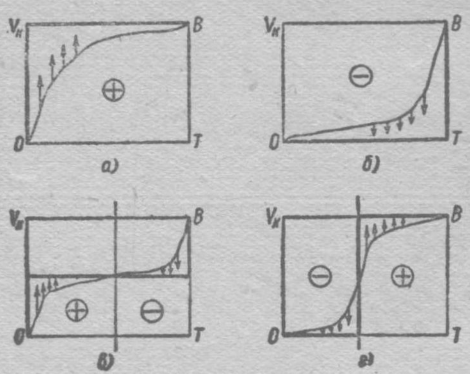

图 3

a) Φ 在所有时間內是正的(图 3a). 在这种情况下,全部燃料儲藏应当在运动开始的瞬間燃燒,否則,(t,V) 平面任何其他可取曲綫可能向上变化,因此 $\delta U>0$,这表示在运送阶段終了时速度增加.

б) Φ 在所有时間內是負的(图 3б). 与前面相似,我們得出,这种情形下燃料消耗的最佳方式是全部燃料儲藏在运送段終了 $t=T$ 的一瞬間消耗.

в) Φ 的符号由正变到負(图 3в). 在这种情况下,汎函的极值只可能由折綫所达到,折綫是由垂直

綫段、水平綫段和垂直綫段組成的．对其他任何可取曲綫，可以在每一个不变符号的区域內变化这些曲綫，使得最終速度的增量是正的．为了决定水平綫段的位置，我們写出当水平綫段作垂直移动时、最終速度变分的表式．我們得到：

$$\delta U = \delta V \int_0^T \Phi(t)\, dt. \tag{1.25}$$

如果积分值是正的，那么这种情形类似于情形 a)，如果是負的，則类似情形 б)．如果积分値等于零，那么汎函的极值可能在某个中間位置的水平綫段上达到．这就是說，在一定条件下，最好在运动开始的瞬間消耗一部分燃料，而剩下的一部分燃料在运动終了的瞬間消耗．

г) Φ 的符号由負变到正（图 3г)．在这种情况下，全部燃料儲藏应当在运动的某一瞬間消耗．

所有上面指出的可能性在一定的条件下都能够实現．

我們現在討論，运动时間不預先給定，而由最終速度取极大这一条件所决定的情形．初始角同样不先固定，而以最佳方式选取．根据(1.11)，(1.17)和(1.20)，我們有：

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \operatorname{tg} \varphi_0 - C_2 T = 0, \tag{1.26}$$

由此得：

$$C_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{T}. \tag{1.27}$$

在这种情况下，公式(1.24)中 Φ 的分子是：

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right), \tag{1.28}$$

它在整个区間 $(0, T)$ 上都是正的．这就是說，将实現情形 a)．我們看到，当初始角和运动时間由最佳条件选择时，全部燃料儲藏在运动一开始时就消耗的情形使 U 的最終速度达到极大．初始速度 v_0 的方向应当和附加速度 V 的方向重合．这里和以后，我們都省去 V 的下标 k.

以后我們将認为，初始速度 v_0 包含在 V 里面，并且以最佳方式把总的速度儲藏分为两部分（如果有必要分为两部分的話）．显然，此时可以限于考虑 $v_0 = 0$ 的情形．現在来研究在运送阶段的运动时間固定和不固定时上述的情形．我們将查明，在参数間具有什么关系才可能有解，并研究最佳运动特性与給定的运送时間 T 之間的关系．

显然，在 $v_0 = 0$ 的情况下只可能有情形 a) 和 в)．为了滿足边界条件，我們有：

$$V_1 \sin \varphi_1 + V_2 \sin \varphi_2 - gT = 0, \tag{1.29}$$

$$V_1 \sin \varphi_1 \cdot T - g\frac{T^2}{2} = Y, \tag{1.30}$$

其中 Y 是給定高度，V_1 是在运动初始时刻得到的速度，V_2 是在运动終了时刻得到的速度．和

$$V_1 + V_2 = V, \tag{1.31}$$

这里 V 是給定的可供支配的速度儲藏．

如果 T 不固定，則有 $V_2 = 0$．方程(1.29)和(1.30)給出关系

$$\frac{gT^2}{2} = Y, \tag{1.32}$$

乇用来决定时間 T:

$$T=\sqrt{\frac{2Y}{g}}. \tag{1.33}$$

把这个式子代入方程(1.29)或(1.30)中的任何一个,得:

$$\sin\varphi_1=\frac{\sqrt{2gY}}{V}. \tag{1.34}$$

如果右面部分小于1,問題是有解的. 这就是說,当給定了可供支配的速度 V 时,运送高度 Y 不应取得太大;与此相反,給定了高度,可供支配的速度儲藏应該足够大,在任何情形,可供支配的速度儲藏应当大于把物体垂直上抛到高度 Y 时所需要的速度. 滿足了这个条件,运送阶段終了的水平分速是:

$$U=V\cdot\cos\varphi_1 \tag{1.35}$$

或

$$U=V\sqrt{1-\frac{2gY}{V^2}}. \tag{1.36}$$

如果 T 是固定的,那么一般地說,条件(1.32)不被滿足,即不能找到在 $V_2=0$ 时的解. 解必須依照方案 B) 在水平綫段具有中間位置的情况下来寻找.

不难看出,函数 Φ 的表式可以写成:

$$\Phi=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right). \tag{1.37}$$

因此公式(1.25)中的积分等于零这一等式給出:

$$\cos\varphi_1=\cos\varphi_2, \tag{1.38}$$

由此得:

$$\varphi_2=\pm\varphi_1. \tag{1.39}$$

我們将討論这两种可能性,同时查明,在問題的各参数間具有什么关系时这两种可能性被实現.

1. 令 $\varphi_2=\varphi_1$. 由公式(1.29)我們有:

$$\sin\varphi_1=\frac{gT}{V}, \tag{1.40}$$

根据(1.30)和(1.31),得:

$$V_1=\frac{V}{2}\left(1+\frac{2Y}{gT^2}\right), \tag{1.41}$$

$$V_2=\frac{V}{2}\left(1-\frac{2Y}{gT^2}\right). \tag{1.42}$$

因为 V_2 应当是正的,所以我們看出,这种情形发生在給定的运送阶段的运动时間适合条件

$$T>\sqrt{\frac{2Y}{g}} \tag{1.43}$$

时,也就是 T 大于最佳运送时間. 对于最終速度,我們有:

$$U = V\sqrt{1-\left(\frac{gT}{V}\right)^2}. \tag{1.44}$$

需要加給可供支配的速度儲藏的条件是：$\frac{gT}{V}$应当小于1。

2．令$\varphi_2 = -\varphi_1$．这时我們有：

$$\sin\varphi_1 = \frac{2Y}{VT}. \tag{1.45}$$

对于速度，我們有：

$$V_1 = \frac{V}{2}\left(1+\frac{gT^2}{2Y}\right), \tag{1.46}$$

$$V_2 = \frac{V}{2}\left(1-\frac{gT^2}{2Y}\right). \tag{1.47}$$

这种情形发生在給定的时間 T 小于最佳时間的时候，也就是：

$$T < \sqrt{\frac{2Y}{g}}. \tag{1.48}$$

最終速度可按公式

$$U = V\sqrt{1-\left(\frac{2Y}{VT}\right)^2} \tag{1.49}$$

計算．和前面相似，可以把$\frac{2Y}{VT}$小于1的条件看作是要求可供支配的速度儲藏V充分大．

所得的公式表明，在运送阶段运动終了所給予的附加速度V_2依賴于給定的运动时間和最佳时間相差的程度，相差越大，V_2就越大．如果給定的时間等于最佳时間，那么$V_2=0$，两种情形都变为前一种情形．我們应注意到，在两种情形下，

$$V_2 < V_1,$$

也就是第二附加速度在数量上永远小于第一附加速度．

条件(1.43)和(1.48)表明，在第一种情况下，速度的增加应当发生在拋物綫（以初速V_1运动时所得到的）的下降分支，而在第二种情况下发生在拋物綫的上升分支．两种情形都示于图4上．当給定的时間大于最佳时間时，增加速度V_2的方向平行于初始速度V_1．当給定的运送时間小于最佳时間时，增加速度V_2的方向在水平綫下，和水平綫所成的角等于初始角φ_1．

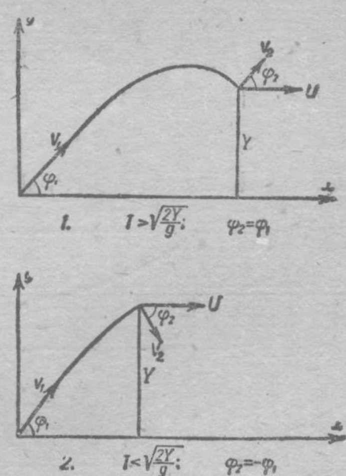

图 4

在运送段应当解决的問題是把卫星昇高到給定的高度，并給予需要的水平分速．所得的結果表明，当运送时間也由最佳方式选取时，最有利的情形应当是利用运动开始的瞬时冲量来获得高度和速度．把运动引上水平方向应依靠重力来实現．如果給定的运送时間不同于最佳时間，那么，为了把运动引上水平方向，必須利用在运送阶段終了所給予的冲量．如果給定的运送时間过长，那么速度向量因重力而产生的方向变化大于需要的数值，因而第二次冲量的垂直分速应当向上．如果給定的运送时間太短，重力来不及轉动速度向量，那么不足的轉动应当借

助于第二次冲量来完成，后者的垂直分速朝下.

在求解的时候，我們从假定允許給出瞬时冲量以及允許全部燃料儲藏或部分燃料儲藏的瞬时消耗出发. 实際上这是不可能的，所以所提出的运送問題的最好解答是用每秒最大燃料消耗量的燃料燃燒来代替瞬間燃燒，而用每秒最小消耗量的运动(或者更好是用发动机关閉的运动)来代替两次施加冲量之間的运动.

上面已經得知，在面平行重力場內运动时，最好的运送方式是靠运动开始时施加一个冲量来实現的. 在中心重力場內把卫星运送到軌道上去的問題中不适宜用这样的解答，因为用这样的方法不能得到(譬如說)圓的軌道以及不交于地球表面和不切于地球表面的軌道. 因此，为了应用上面所得的結果来解决中心重力場內有关运送的問題，关于在給定时間內运送卫星到軌道上去的問題有着基本的意义. 如果給定的时間不算太长，那么弹道的尺寸比起地球的半径来就不算太大，从而作为近似討論問題基础的假定沒有受到太大的破坏.

我們現在来討論一个例子，用这个例子可以估計弹道的尺寸以及对各种給定的运送时間估計可供支配的速度儲藏的大小. 計算例子时，我們限于最重要的情形，就是在面平行重力場內給定的运送时間不超过最佳运送时間的情形.

假定需要把卫星运送到高度 $Y = 300$ 公里的地方，并且具有水平分速 $U = 7900$ 米/秒.

依照公式

$$T = \sqrt{\frac{2Y}{g}},$$

我們得到面平行重力場內最佳运送时間:

$$T_{最佳} = 248 秒.$$

图 5 給出在 $0.4\,T_{最佳} < T < T_{最佳}$ 范围內所需总的可供支配速度 V、初始冲量 v_1、初始角 φ_1 和水平距离 X 与 T 的关系. 由图可看出，随着运送时間的縮短，所需的可供支配的速度儲藏增大，初始冲量减小，而最終冲量增大. 初始角随着运送时間的減小而增大，軌道变得越加陡峭，而运送阶段的水平距离逐漸減小. 所得的水平距离大大地小于地球半径. 因此有充分根据把上述例子看作是以最佳方式运送卫星到軌道上去的近似計算.

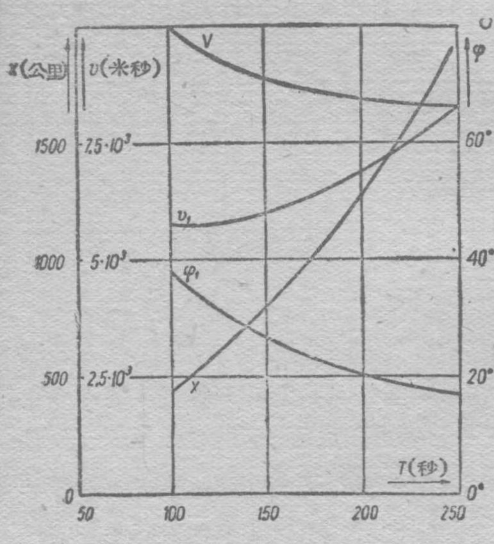

图 5

在結束本节时必須指出，正象上面証明过的那样，俯仰角正切的变化是时間的綫性函数这一規律与函数 $V(t)$ 的变化性質无关. 它可以应用到单級加速器，也可以应用到多級加速器，甚至可以应用到一級停止工作、而另一級开始工作之間的間断时間. 下一节討論多級火箭加速器的运送問題时要利用这个結果.

还应指出，在变分問題的另一些提法下，俯仰角正切的变化規律可能不是綫性的. 例如說，如果用最佳方式选择运动时間，而固定运送阶段的水平距离，那么俯仰角正切随着时間变化的最佳規律将是綫性分式型的.

§2. 給定燃料消耗方式时的运动

上面已經得知，俯仰角的最好控制規律是俯仰角正切与时間有綫性关系：

$$\operatorname{tg}\varphi = -(C_1 + C_2 t). \tag{2.1}$$

积分运动方程(1.1)—(1.4)，得到在某一时刻 t_1 速度分量和坐标的表式：

$$u = \int_0^{t_1} p(t)\cdot\cos\varphi\cdot dt + u_0, \tag{2.2}$$

$$w = \int_0^{t_1} p(t)\cdot\sin\varphi\cdot dt + w_0 - gt_1, \tag{2.3}$$

$$x = \int_0^{t_1} (t_1 - t)\cdot p(t)\cdot\cos\varphi\cdot dt + u_0 t_1 + x_0, \tag{2.4}$$

$$y = \int_0^{t_1} (t_1 - t)\cdot p(t)\cdot\sin\varphi\cdot dt + w_0 t_1 + y_0 - \frac{gt_1^2}{2}. \tag{2.5}$$

根据(2.1)，可以把 $\sin\varphi$ 与 $\cos\varphi$ 表成时間的函数：

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+(C_1+C_2 t)^2}}, \tag{2.6}$$

$$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{1+(C_1+C_2 t)^2}}. \tag{2.7}$$

因为函数 $p(t)$ 被認为是已知的，所以一般地説，公式(2.2)—(2.5)的右方可以計算出来.

公式(2.2)—(2.5)的右方包含着两个与控制方式有关的任意常数. 一般地説，选择这些常数，可以使得在固定加速阶段运动时間的情形下，保証加速阶段的終了具有給定的高度 y_k，而垂直分速等于零. 这样选择了常数以后，可以按照公式(2.2)和(2.4)来决定速度的大小 u_k 以及数值 x_k.

为了实际計算公式(2.2)—(2.5)右方的积分，必須知道噴气加速器和时間的关系，也就是必須知道函数 $p(t)$. 我們应注意到，函数 $p(t)$ 在一般情形是間断的，例如在合成火箭的情形. 因为合成火箭对于人造卫星来説有最大的意义，所以下面要对合成火箭的最佳运动进行更詳細的研究.

对于合成火箭的情形，利用公式(2.2)—(2.5)，可以把弹道終了处的运动学参数表示成：

$$u_k = u_0 + \sum_{i=1}^{n} u_k^{(i)}, \tag{2.8}$$

$$w_k = w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_k^{(i)}, \tag{2.9}$$

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{n} x_k^{(i)}, \tag{2.10}$$

$$y_k = y_0 + \sum_{i=1}^{n} y_k^{(i)}, \tag{2.11}$$

其中

$$u_k^{(i)} = \int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} p_i(t)\cdot\cos\varphi\cdot dt, \tag{2.12}$$

$$w_k^{(i)}=\int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} p_i(t)\cdot\sin\varphi\cdot dt-g(t_k^{(i)}-t_0^{(i)}), \tag{2.13}$$

$$x_k^{(i)}=\int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} (t_k^{(i)}-t)\, p_i(t)\cdot\cos\varphi\cdot dt+(t_k^{(i)}-t_1^{(i)})\cdot\sum_{q=0}^{i-1} u_k^{(q)}, \tag{2.14}$$

$$y_k^{(i)}=\int_{t_0^{(i)}}^{t_k^{(i)}} (t_k^{(i)}-t)\cdot p_i(t)\cdot\sin\varphi\cdot dt+(t_k^{(i)}-t_0^{(i)})\times$$
$$\times\sum_{q=0}^{i-1} w_k^{(q)}-\frac{1}{2}g(t_k^{(i)}-t_0^{(i)}), \tag{2.15}$$

$$u_k^0=u_0,\quad w_k^0=w_0.$$

这里 $t_0^{(i)}$ 和 $t_k^{(i)}$ 是运动初始时刻的时間和終了时刻的时間，$u_k^{(i)}$ 和 $w_k^{(i)}$ 是水平速度分量的增量和垂直速度分量的增量，$x_k^{(i)}$ 和 $y_k^{(i)}$ 是水平坐标和垂直坐标在运动时間內的增量，$p_i(t)$ 是反作用力的加速度，并且所有的量都是对于第 i 級火箭的运动所取的.

很明显，公式(2.12)—(2.15)也包括了合成火箭各級发动机中間出現停頓的情形. 在这种情形，我們可以把相应于停頓的时間間隔当作是屬于某一級发动机，并且有：

$$p_i(t)\equiv 0.$$

对于一个很重要的特殊情形，就是各級火箭都以不变的推力在运动的情形，我們来計算公式(2.12)—(2.15)右面部分的积分. 在这种情况下，对于第 i 級火箭，我們有：

$$p_i(t)=\frac{gP_i}{G_i}, \tag{2.16}$$

其中 P_i 是发动机推力，G_i 是重量. 重量 G_i 可以表成：

$$G_i=G_0^{(i)}\cdot\mu^{(i)}=G_0^{(i)}\left[1-(1-\mu_k^{(i)})\cdot\frac{t-t_0^{(i)}}{T_i}\right], \tag{2.17}$$

其中 $G_0^{(i)}$ 是初始重量，$\mu_k^{(i)}$ 是最終的質量比，T_i 是发动机工作时間. 引进

$$\nu_0^{(i)}=\frac{G_0^{(i)}}{P_i}, \tag{2.18}$$

得到 $p_i(t)$ 的表式：

$$p_i(t)=\frac{g}{\nu_0^{(i)}\cdot\left[1-(1-\mu_k^{(i)})\dfrac{t-t_0^{(i)}}{T_i}\right]}. \tag{2.19}$$

按照公式

$$P_i=-\frac{c_i}{g}\cdot\frac{dG_i}{dt} \tag{2.20}$$

决定发动机的推力，其中 c_i 是从发动机噴咀噴出的气体所具有的排气速度，对于时間 T_i，我們很容易得到公式：

$$T_i=\frac{c_i}{g}\cdot\nu_0^{(i)}(1-\mu_k^{(i)}). \tag{2.21}$$

必須注意，在发动机推力不变的情况下，每秒燃料消耗量是常数，因而火箭的質量是时間的綫性函数．因此对于每一級火箭，可以認为俯仰角的正切并不是和时間綫性相关，而是和各級火箭的質量或它的相对質量綫性相关．我們有：

$$\operatorname{tg}\varphi = A_i + B_i \cdot \mu^{(i)}, \tag{2.22}$$

其中 A_i 是 B_i 是一些常数．在每級火箭运动开始时，有 $\mu^{(i)} = 1$ 和

$$\operatorname{tg}\varphi_0^{(i)} = A_i + B_i. \tag{2.23}$$

在每級发动机停止工作的瞬間，有 $\mu^{(i)} = \mu_k^{(i)}$ 和

$$\operatorname{tg}\varphi_k^{(i)} = A_i + B_i \cdot \mu_k^{(i)}. \tag{2.24}$$

这里 $\varphi_0^{(i)}$ 和 $\varphi_k^{(i)}$ 是各級发动机在运动开始和运动終了时的俯仰角．

把(2.19)中的 $p_i(t)$ 以及(2.6)和(2.7)中的 $\sin\varphi$ 与 $\cos\varphi$ 代入公式(2.8)—(2.15)，积分后得到：

$$u_k = u_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot f_1^{(i)}, \tag{2.25}$$

$$w_k = w_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \left[f_2^{(i)} - v_0^{(i)} \cdot (1 - \mu_k^{(i)}\right], \tag{2.26}$$

$$x_k = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{g} v_0^{(i)} \left[f_3^{(i)} + (1 - \mu_k^{(i)}) \cdot \sum_{q=0}^{i-1} \frac{c_q}{c_i} \cdot f_1^{(q)}\right], \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} y_k = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i^2}{g} v_0^{(i)} \Big\{ & f_4^{(i)} - \frac{1}{2} v_0^{(i)} (1 - \mu_k^{(i)}) + \\ & + (1 - \mu_k^{(i)}) \cdot \sum_{q=0}^{i-1} \frac{c_q}{c_i} \cdot \left[f_2^{(q)} - v_0^{(q)} \cdot (1 - \mu_k^{(q)})\right] \Big\}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

其中无量綱函数 $f_1^{(i)}$, $f_2^{(i)}$, $f_3^{(i)}$ 和 $f_4^{(i)}$ 由下列諸式决定：

$$\begin{gathered} f_1^{(0)} = \frac{u_0}{c_0}, \qquad f_2^{(0)} = \frac{w_0}{c_0}, \\ f_1^{(i)} = \frac{1}{\sqrt{1 + A_i^2}} \left\{ \operatorname{Arcsh}\left(A_i + \frac{1 + A_i^2}{\mu_k^{(i)} \cdot B_i}\right) - \right. \\ \left. - \operatorname{Arcsh}\left(A_i + \frac{1 + A_i^2}{B_i}\right) \right\}, \end{gathered} \tag{2.29}$$

$$f_2^{(i)} = A_i f_1^{(i)} + \operatorname{Arcsh}(A_i + B_i) - \operatorname{Arcsh}(A_i + B_i \mu_k^{(i)}), \tag{2.30}$$

$$f_3^{(i)} = \frac{1}{B_i} \left[\operatorname{Arcsh}(A_i + B_i) - \operatorname{Arcsh}(A_i + B_i \mu_k^{(i)})\right] - \mu_k^{(i)} \cdot f_1^{(i)}, \tag{2.31}$$

$$f_4^{(i)} = \frac{1}{B_i} \left[\sqrt{1 + (A_i + B_i)^2} - \sqrt{1 + (A_i + B_i \mu_k^{(i)})^2}\right] - \mu_k^{(i)} \cdot f_2^{(i)}. \tag{2.32}$$

$$(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

此外，应当注意到，$v_0^{(0)} = 0$．由于俯仰角控制方案的連續性，也由于公式(2.22)—(2.24)，