普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书

概率论与数理统计

复习指导与深化训练

◆ 刘 强 郭文英 孙 阳 编著

中国工信出版集团 電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等学校工科类·经管类数学深化训练与考研辅导丛书

概率论与数理统计
复习指导与深化训练

◆ 刘　强　郭文英　孙　阳　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是作者在多年本科教学和考研辅导经验的基础上编写而成的。全书共分为 8 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练。本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校学生更好地学习“概率论与数理统计”课程，开阔学习视野，拓展解题思路；二是满足学生报考研究生的需要。本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲，贴近考试实际，做到分门别类、详略得当，帮助考生在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，提高综合分析问题、解决问题的能力，以达到融会贯通、举一反三的学习效果。

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“概率论与数理统计”课程的深化训练用书，也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计复习指导与深化训练 / 刘强，郭文英，孙阳编著. —北京：电子工业出版社，2016.6

ISBN 978-7-121-28868-5

I. ①概… II. ①刘… ②郭… ③孙… III. ①概率论－高等学校－习题集 ②数理统计－高等学校－习题集 IV. ①O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 109766 号

策划编辑：徐 颢
责任编辑：徐 颢
印 刷：三河市鑫金马印装有限公司
装 订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编 100036
开 本：787×1 092 1/16 印张：13.75 字数：352 千字
版 次：2016 年 6 月第 1 版
印 次：2016 年 6 月第 1 次印刷
定 价：36.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：（010）88254103。

前　言

为了更好地帮助普通高等学校工科类、经管类本科生学好大学数学，同时为了满足众多考生考研的需要，我们结合多年的考研辅导经验，编写了“普通高等学校工科类、经管类数学深化训练与考研辅导丛书”，该丛书包括微积分、高等数学、线性代数和概率论与数理统计四门数学课程的辅导用书，由首都经济贸易大学的刘强教授担任丛书主编。

本书为概率论与数理统计分册，内容涵盖了考研“数学一”和“数学三”的全部考点。本书编写的主要目的有两个：一是帮助学有余力的在校学生更好地学习“概率论与数理统计”课程，以开阔学习视野，拓展解题思路；二是满足学生报考研究生的需要。本书编写紧扣“数学一”和“数学三”考研大纲，贴近考试实际，做到分门别类、详略得当，使考生能在短时间内迅速掌握各种解题方法和技巧，综合分析问题、解决问题的能力得到有效提升，达到融会贯通、举一反三的学习效果。

全书共分为 8 章，每章包括 5 个模块，即知识要点、典型例题分析、深化训练、深化训练详解及综合提高训练。具体模块内容介绍如下。

一、知识要点：本模块对基本概念、基本理论、基本公式等内容进行系统梳理，方便读者查阅相关内容。

二、典型例题分析：作者在多年来考研辅导经验的基础上，创新性地构思了大量有代表性的例题，并选编了部分国内外优秀教材、辅导资料的经典题目，汇集了一些有代表性的考研真题，按照知识结构、解题思路、解题方法等对典型例题进行了系统归类，通过专题讲解，详细阐述了相关问题的解题方法与技巧。

三、深化训练：本模块精心选编了部分具有代表性的习题以及历年的考研真题，帮助读者巩固强化所学知识，提升读者学习效果，做到融会贯通和举一反三。

四、深化训练详解：本模块对深化训练习题给出了详细的解答过程，部分习题给出多种解法，以开拓读者的解题思路，培养读者的分析能力和发散思维。

五、综合提高训练：本模块的例题综合性较强，有较高的难度和较强的灵活性，通过本模块的学习，有效提升读者的综合能力和应变能力。

为了便于读者阅读本书，书中的“数学一”要求、“数学三”不要求的内容将用“*”标出，有一定难度的结论、例题和综合练习题等将用“**”标出。另外为了方便读者查阅，本书在考研真题后面加上了标志，例如【2010（1）】表示该题是 2010 年硕士研究生入学考试“数学一”考题，【2010（1，3）】表示该题是 2010 年“数学一”和“数学三”考题，其余类推。

本丛书在编写过程中，得到了北京工业大学李高荣教授，首都经济贸易大学张宝学教授、马立平教授、任韬副教授，昆明理工大学吴刘仓教授，北京化工大学李志强副教授，以及同事们的大力支持，电子工业出版社的徐颢编辑和高教分社的谭海平社长也为丛书的出版付出了大量努力，在此表示诚挚的感谢。

本书既可以作为普通高等学校工科类、经管类本科生学习“概率论与数理统计”课程的深化训练用书，也可以作为全国硕士研究生统一入学考试的辅导用书。

由于作者水平有限，书中仍可能存在不妥甚至错漏之处，恳请读者和同行们不吝指正。邮件地址为：cuebliuqiang@163.com。

编　者

2016 年 4 月

目　录

第 1 章　概率论的基本概念 …… 1

1.1　知识要点 …… 1

1.1.1　随机试验与随机事件 …… 1

1.1.2　事件的关系与运算 …… 1

1.1.3　频率的定义及性质 …… 2

1.1.4　概率的公理化定义及性质 …… 2

1.1.5　条件概率的定义及性质 …… 3

1.1.6　事件的独立性 …… 4

1.1.7　概率模型 …… 4

1.2　典型例题分析 …… 5

1.2.1　题型一：事件的运算及事件概率的求解问题 …… 5

1.2.2　题型二：古典概型、几何概型的计算 …… 8

1.2.3　题型三：条件概率问题 …… 11

1.2.4　题型四：独立性与伯努利概型问题 …… 15

1.3　深化训练 …… 16

1.4　深化训练详解 …… 19

1.5　综合提高训练 …… 22

第 2 章　随机变量及其分布 …… 24

2.1　知识要点 …… 24

2.1.1　随机变量 …… 24

2.1.2　随机变量的分布函数及性质 …… 24

2.1.3　离散型随机变量及其分布律 …… 24

2.1.4　常见的离散型随机变量 …… 25

2.1.5　连续型随机变量 …… 26

2.1.6　常见的连续型随机变量及性质 …… 26

2.1.7　随机变量函数的分布 …… 28

2.1.8　分位点 …… 28

2.2　典型例题分析 …… 28

2.2.1　题型一：随机变量分布的有关问题 …… 28

2.2.2　题型二：随机变量分布的求解及用分布计算概率 …… 30

2.2.3　题型三：正态随机变量的计算 …… 34

2.2.4　题型四：求解随机变量函数的分布 …… 35

2.3　深化训练 …… 39

2.4　深化训练详解 …… 41

2.5 综合提高训练 …… 46

第 3 章 多维随机变量及其分布 …… 50

3.1 知识要点 …… 50

3.1.1 联合分布函数的概念性质 …… 50

3.1.2 二维离散型随机变量 …… 50

3.1.3 二维连续型随机变量 …… 51

3.1.4 随机变量的独立性 …… 52

3.1.5 随机变量函数的分布 …… 53

3.1.6 常见的二维分布 …… 54

3.2 典型例题分析 …… 54

3.2.1 题型一：二维离散型随机变量的相关问题 …… 54

3.2.2 题型二：二维连续型随机变量的相关问题 …… 59

3.2.3 题型三：二维随机变量的证明问题 …… 65

3.3 深化训练 …… 67

3.4 深化训练详解 …… 72

3.5 综合提高训练 …… 90

第 4 章 随机变量的数字特征 …… 96

4.1 知识要点 …… 96

4.1.1 随机变量的数学期望 …… 96

4.1.2 随机变量的方差 …… 97

4.1.3 协方差 …… 97

4.1.4 相关系数 …… 98

4.1.5 随机变量的矩 …… 98

4.1.6 协方差阵 …… 98

4.1.7 几个常见分布的数字特征 …… 98

4.2 典型例题分析 …… 99

4.2.1 题型一：一维离散型随机变量的数字特征问题 …… 99

4.2.2 题型二：一维连续型随机变量的数字特征问题 …… 100

4.2.3 题型三：二维离散型随机变量的数字特征问题 …… 102

4.2.4 题型四：二维连续型随机变量的数字特征问题 …… 104

4.2.5 题型五：随机变量函数的数字特征问题 …… 106

4.2.6 题型六：随机变量数字特征的应用 …… 108

4.3 深化训练 …… 109

4.4 深化训练详解 …… 115

4.5 综合提高训练 …… 134

第 5 章 大数定律与中心极限定理 …… 139

5.1 知识要点 …… 139

5.1.1 切比雪夫（Chebyshev）不等式 …… 139

5.1.2 依概率收敛 …… 139
5.1.3 常见的大数定律 …… 139
5.1.4 常见的中心极限定理 …… 139
5.2 典型例题分析 …… 140
5.2.1 题型一：利用切比雪夫不等式估计事件的概率 …… 140
5.2.2 题型二：大数定律的应用 …… 141
5.2.3 题型三：中心极限定理的应用 …… 143
5.3 深化训练 …… 145
5.4 深化训练详解 …… 147
5.5 综合提高训练 …… 152
第 6 章 数理统计的基本概念 …… 154
6.1 知识要点 …… 154
6.1.1 总体与样本 …… 154
6.1.2 统计量与抽样分布 …… 154
6.1.3 一些常用的统计量 …… 154
6.1.4 经验分布函数 …… 154
*6.1.5 顺序统计量 …… 155
6.1.6 χ^2 分布 …… 155
6.1.7 t 分布 …… 156
6.1.8 F 分布 …… 156
6.1.9 上 α 分位点 …… 157
6.1.10 正态总体的样本均值与样本方差的分布 …… 157
6.1.11 几个常用的结论 …… 158
6.2 典型例题分析 …… 158
6.2.1 题型一：统计量与抽样分布问题 …… 158
6.2.2 题型二：概率的计算问题 …… 160
6.2.3 题型三：随机变量的数字特征问题 …… 160
6.2.4 题型四：常数的求解问题 …… 161
6.2.5 题型五：经验分布函数的求解 …… 162
6.2.6 题型六：样本容量问题 …… 162
6.3 深化训练 …… 162
6.4 深化训练详解 …… 164
6.5 综合提高训练 …… 166
第 7 章 参数估计 …… 170
7.1 知识要点 …… 170
7.1.1 参数与参数估计 …… 170
7.1.2 点估计 …… 170
7.1.3 矩估计法 …… 170
7.1.4 最大（极大）似然估计法 …… 170

7.1.5 估计量的评选标准 …… 171
*7.1.6 区间估计 …… 171
*7.1.7 正态总体均值与方差的区间估计公式 …… 172
7.2 典型例题分析 …… 172
7.2.1 题型一：矩估计与最大似然估计 …… 172
7.2.2 题型二：估计量的评选标准问题 …… 174
*7.2.3 题型三：区间估计问题 …… 175
*7.2.4 题型四：非正态总体的区间估计问题 …… 176
7.3 深化训练 …… 178
7.4 深化训练详解 …… 179
7.5 综合提高训练 …… 182
*第 8 章 假设检验 …… 187
8.1 知识要点 …… 187
8.1.1 假设检验的相关概念 …… 187
8.1.2 两类错误 …… 187
8.1.3 假设检验的步骤 …… 188
8.1.4 正态总体均值与方差的检验 …… 188
8.2 典型例题分析 …… 189
8.2.1 题型一：单个正态总体的假设检验问题 …… 189
8.2.2 题型二：两个正态总体的假设检验问题 …… 190
8.2.3 题型三：两类错误问题 …… 190
8.3 深化训练 …… 191
8.4 深化训练详解 …… 192
8.5 综合提高训练 …… 194
2013 年考研试题概率论与数理统计考题 …… 196
2014 年考研试题概率论与数理统计考题 …… 200
2015 年考研试题概率论与数理统计考题 …… 205
2016 年考研试题概率论与数理统计考题 …… 208

第 1 章 概率论的基本概念

1.1 知 识 要 点

1.1.1 随机试验与随机事件

所谓**随机试验**指的是具有以下性质的试验：

（1）试验可以在相同条件下重复进行；

（2）试验可能出现的结果不止一个，且在试验之前知道所有可能的结果；

（3）试验前不能确定具体哪一个结果会出现.

通常用字母 E 表示随机试验（以后简称**试验**）.

随机试验的全部可能结果组成的集合称为随机试验的**样本空间**，记为 S，S 中的元素，即 E 的每个试验结果，称为**样本点**，记为 e．一般地，试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的**随机事件**，简称**事件**，用大写的英文字母 A，B，C 等表示，由一个样本点构成的单点集，称为**基本事件**，否则称为**复杂事件**.

若试验的结果为事件 A 中的样本点，则称在这次试验中**事件 A 发生**．由于样本空间 S 包含了所有的可能结果，每次试验 S 总是发生的，因此 S 称为**必然事件**，而空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，每次试验 $\varnothing$ 都不发生，因此 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

1.1.2 事件的关系与运算

（1）事件的运算

$A\cup B=\{e\,|\,e\in A 或 e\in B\}$ 称为 A 与 B 的**和事件**．$A\cup B$ 发生当且仅当 A 与 B 至少有一个发生．n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

$A\cap B=\{e\,|\,e\in A 且 e\in B\}$ 称为 A 与 B 的**积事件**，也简记为 AB．$A\cap B$ 发生当且仅当 A 与 B 同时发生．n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

$A-B=\{e\,|\,e\in A 且 e\notin B\}$ 称为 A 与 B 的**差事件**．$A-B$ 发生当且仅当 A 发生而 B 不发生.

（2）事件的关系

若 $A\subset B$，则称事件 B **包含**事件 A，此时 A 发生必然导致 B 发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

若 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B **互不相容**或**互斥**，此时 A 与 B 不能同时发生．基本事件是两两互不相容的.

若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与 B 互为**对立事件**或**互逆事件**，A 的对立事件记为 $\overline{A}$．显然对随机试验而言，每次试验事件 A 与 B 中必有且仅有一个发生.

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 S 的一个划分（分割）.

（3）运算规律

① **交换律**　$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$.

② **结合律**　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

③ **分配率**　$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$；$(AB) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

④ **德摩根律**　$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$；$\overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$；$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$；$\overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k$.

注　$A - B = A - AB = A\bar{B}$；$(A\bar{B}) \cup (AB) = A$.

1.1.3　频率的定义及性质

设 A 为试验 E 中的一个事件，将试验 E 在相同条件下重复进行 n 次，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**，$\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

频率的性质

（1）$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

（2）$f_n(S) = 1$；

（3）设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 为 m 个两两互不相容的事件，则有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_m).$$

1.1.4　概率的公理化定义及性质

1．概率的定义

设 E 是一个随机试验，S 是样本空间，对 E 的每一事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的**概率**，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足以下三个条件：

（1）**非负性**　对任意的事件 A，有 $P(A) \geqslant 0$；

（2）**规范性**　对于必然事件 S，有 $P(S) = 1$；

（3）**可列可加性**　对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

2．概率的性质

（1）对任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；$P(\varnothing) = 0$，　$P(S) = 1$；

（2）设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n);$$

（3）若 $A \subset B$，则有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$，$P(A) \leqslant P(B)$；

（4）对任一事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 或 $P(\overline{A})=1-P(A)$；

（5）对任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

对任意三个事件 A,B,C，有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

1.1.5　条件概率的定义及性质

1．条件概率的定义

设 A，B 为两个事件，且 $P(A)>0$，则称

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的**条件概率**.

2．条件概率的性质

（1）**非负性**　对任意的事件 B，有 $P(B\mid A)\geqslant 0$；

（2）**规范性**　对于必然事件 S，有 $P(S\mid A)=1$；

（3）**可列可加性**　对于两两互不相容的事件 $B_1,B_2,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\,\middle|\,A\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(B_n\mid A);$$

（4）**乘法公式**　若 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(B\mid A)P(A)$.

设 A，B，C 为三个事件，且 $P(AB)>0$，则

$$P(ABC)=P(C\mid AB)P(B\mid A)P(A);$$

（5）**全概率公式**　设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，且 $P(B_i)>0\quad(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i);$$

推论　设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相容，且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i\supset A$，则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i);$$

（6）**贝叶斯公式**　设 S 为试验 E 的样本空间，A 为 E 的一个事件，$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 S 的一个划分，$P(A)>0$，$P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(A\mid B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}P(A\mid B_j)P(B_j)},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

1.1.6　事件的独立性

（1）两个事件相互独立的定义

设 A，B 是两个事件，如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A 与 B **相互独立**，简称 A 与 B **独立**.

（2）两个事件相互独立的性质

① 若 $P(A)>0$，则事件 A 与事件 B 相互独立的充分必要条件是 $P(B\mid A)=P(B)$.

② 若 A 与 B 独立，则 A 与 $\overline{B}$ 独立，$\overline{A}$ 与 B 独立，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 独立.

注　当 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，“A 与 B 相互独立”与“A 与 B 互不相容”不能同时成立.

（3）三个事件相互独立的定义

设 A，B，C 是三个事件，如果满足

$$P(AB)=P(A)P(B),\quad P(BC)=P(B)P(C),\quad P(CA)=P(C)P(A),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

则称 A，B，C **相互独立**.

（4）三个事件相互独立的性质

① 若 A，B，C 相互独立，将其中任意 $i\ (i=1,2,3)$ 个事件换成其对立事件，得到的三个事件仍然相互独立.

② 若 A，B，C 相互独立，则 $A\cup B$，AB，$A-B$ 均与 C 相互独立.

一般地，如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 对于其中任意 $i\ (i=2,3,\cdots,n)$ 个事件都满足积事件的概率等于各事件概率相乘，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**. 将 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，得到的 n 个事件仍然相互独立.

1.1.7　概率模型

概率模型描述了一类随机试验的特点，并给出了相应事件的概率计算公式.

（1）古典概型（等可能概型）

古典概型满足：样本空间中样本点有限，并且基本事件均等可能发生. 设样本空间 S 中的样本点总数为 n，事件 A 中包含的样本点数为 n_A，则

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{中的基本事件总数}}{S\text{中的基本事件总数}}.$$

（2）几何概型

几何概率满足：样本空间是一个测度（如长度，面积，体积等）有限的区域（例如长度有限的线段，面积有限的区域等），事件 A 中的样本点为区域的子集，且事件 A 发生的可能性大小与 A 的测度成正比. 设样本空间 S 的测度为 $L(S)$，事件 A 的测度为 $L(A)$，则

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}.$$

（3）伯努利概型

如果试验 E 只有两个结果 A 与 $\overline{A}$，则称 E 为**伯努利试验**，将试验 E 在相同条件下独立地

重复进行 n 次所构成的试验称为 n **重伯努利试验**．设 $P(A)=p\ (0<p<1)$，将 n 重伯努利概型中事件 A 发生 k 次的概率记为 $P_n(k)$，则

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

1.2　典型例题分析

1.2.1　题型一：事件的运算及事件概率的求解问题

本题型要求读者正确使用事件的运算形式来表达事件，能够熟练使用事件的运算规律进行事件的运算，熟练使用概率性质进行运算．另外，在事件的运算中差事件 $A-B$ 常使用其等价事件 $A-AB$ 或 $A\overline{B}$ 替换．

例 1.2.1　【1989（4）】以 A 表示事件"甲种产品畅销，乙种产品滞销"，则其对立事件 $\overline{A}$ 表示的是（　　）．

（A）"甲种产品滞销，乙种产品畅销"　　（B）"甲、乙产品均畅销"

（C）"甲种产品滞销"　　（D）"甲种产品滞销或乙种产品畅销"

解　记 $B=\{$甲种产品畅销$\}$，$C=\{$乙种产品滞销$\}$，由题意有 $A=BC$，从而

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\{\text{甲种产品滞销或乙种产品畅销}\},$$

故本题选（D）．

例 1.2.2　设 A,B,C 为三个事件，用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件

（1）A 发生，B 与 C 不发生；

（2）A 与 B 都发生，而 C 不发生；

（3）A,B,C 中至少有一个发生；

（4）A,B,C 都不发生；

（5）A,B,C 中不多于两个发生；

（6）A,B,C 中至少有两个发生．

解（1）$A\overline{B}\overline{C}$；（2）$AB\overline{C}$；（3）$A\cup B\cup C$；（4）$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$；（5）$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$；（6）$(AB)\cup(AC)\cup(BC)$．

例 1.2.3　【2000（3）】在电炉上安装 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的．在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电，以 E 表示事件"电炉断电"，而 $T_{(1)}<T_{(2)}<T_{(3)}<T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的温度值按递增顺序的排列，则事件 E 等于（　　）．

（A）$\{T_{(1)}\geqslant t_0\}$　　（B）$\{T_{(2)}\geqslant t_0\}$　　（C）$\{T_{(3)}\geqslant t_0\}$　　（D）$\{T_{(4)}\geqslant t_0\}$

解　由题意，事件"电炉断电"等价于 4 个温控器中至少有两个显示的温度值不低于 t_0，从而必有第二高的温度值 $T_{(3)}\geqslant t_0$，故本题选（C）．

例 1.2.4　设标号为 1, 2, 3, 4, 5 的 5 个电子元件可按图 1.1、图 1.2 两种方式连接成系统，若从左端输入的电流能由右端输出则系统工作正常，以 A_i 表示第 $i\ (i=1,2,3,4,5)$ 个元件工作正常，试将系统工作正常用 $A_i\ (i=1,2,3,4,5)$ 表示．

解　按图 1.1 所示的方式连接，系统工作正常为元件 1 与 2 中至少有一个工作正常，并且元件 3, 4 作为一个整体与元件 5 中至少有一个工作正常，因此系统工作正常可表示为

$$(A_1 \cup A_2) \cap [(A_3 \cap A_4) \cup A_5].$$

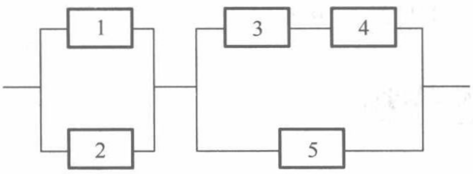

图 1.1 连接方式 1

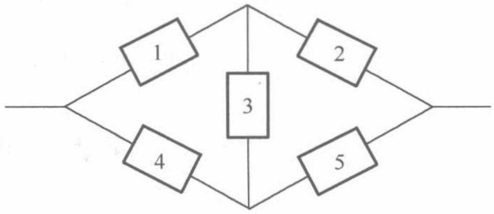

图 1.2 连接方式 2

按图 1.2 所示的方式连接，系统工作正常为元件1, 2 工作正常，或元件4, 5 工作正常，或元件1, 3, 5 工作正常或元件2, 3, 4 工作正常，因此系统工作正常可表示为

$$(A_1 \cap A_2) \cup (A_4 \cup A_5) \cup (A_1 \cap A_3 \cap A_5) \cup (A_4 \cap A_3 \cap A_2).$$

例 1.2.5 【1992（3）】事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则（ ）.

（A）$P(C) \leqslant P(A)+P(B)-1$ （B）$P(C) \geqslant P(A)+P(B)-1$

（C）$P(AB)=P(C)$ （D）$P(A \cup B)=P(C)$

解 由题可知，$AB \subset C$，故 $P(AB) \leqslant P(C)$，从而

$$1 \geqslant P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB) \geqslant P(A)+P(B)-P(C),$$

因此本题选（B）.

例 1.2.6 【2009（3）】设事件 A 与事件 B 互不相容，则（ ）

（A）$P(\overline{A}\overline{B})=0$ （B）$P(AB)=P(A)P(B)$

（C）$P(A)=1-P(B)$ （D）$P(\overline{A} \cup \overline{B})=1$

解 由题意，事件 A 与事件 B 互不相容，即 $AB=\varnothing$，从而 $P(AB)=0$，因此有 $P(\overline{A} \cup \overline{B})=1-P(AB)=1$，故本题选（D）.

例 1.2.7 【2015（3）】设 A, B 为任意两个事件，则（ ）.

（A）$P(AB) \leqslant P(A)P(B)$ （B）$P(AB) \geqslant P(A)P(B)$

（C）$P(AB) \leqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ （D）$P(AB) \geqslant \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

解 由 $AB \subset A$，$AB \subset B$，可知 $P(AB) \leqslant P(A)$，$P(AB) \leqslant P(B)$，从而

$$[P(AB)]^2 \leqslant P(A)P(B), \quad P(AB) \leqslant \sqrt{P(A)P(B)} \leqslant \frac{P(A)+P(B)}{2},$$

故本题选（C）.

例 1.2.8 设 A, B 为任意两个事件，证明：$|P(AB)-P(A)P(B)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

证 由于 $AB \subset A$，$AB \subset B$，有

$$P(AB) \leqslant P(A), \quad P(AB) \leqslant P(B),$$

因此

$$\begin{aligned} |P(AB)-P(A)P(B)| &\leqslant |P(AB)-P(AB)P(AB)| = P(AB)[1-P(AB)] \\ &\leqslant \left(\frac{P(AB)+1-P(AB)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

故结论得证.

例 1.2.9　【1992（1）】设 A, B, C 为三个事件，且

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}，\ P(AB)=0，\ P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16},$$

求事件 A, B, C 都不发生的概率.

解　由 $ABC \subset AB$，有 $0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB)=0$，从而 $P(ABC)=0$，故

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})&=1-P\left(\overline{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}}\right)=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0\right)=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

例 1.2.10　设 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{1}{3}$，$P(C)=\frac{1}{5}$，$P(AB)=\frac{1}{10}$，$P(AC)=\frac{1}{15}$，$P(BC)=\frac{1}{20}$，$P(ABC)=\frac{1}{30}$，求 $A\cup B\cup C$，$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，$\overline{A}\overline{B}C$，$\overline{A}\overline{B}\cup C$ 的概率.

解　根据概率的计算法则，有

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{15}-\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{17}{20},\end{aligned}$$

$$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-P(\overline{\overline{A}\overline{B}\overline{C}})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{20}.$$

由于 $\overline{A}\overline{B}=\overline{A}\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$，且 $\overline{A}\overline{B}C$ 与 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 互不相容，从而有

$$P(\overline{A}\overline{B}C)=P(\overline{A}\overline{B})-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=\frac{4}{15}-\frac{3}{20}=\frac{7}{60},$$

$$P(\overline{A}\overline{B}\cup C)=P(\overline{A}\overline{B})+P(C)-P(\overline{A}\overline{B}C)=\frac{4}{15}+\frac{1}{5}-\frac{7}{60}=\frac{7}{20}.$$

例 1.2.11　设 $P(A\cup B)=0.6$，且 $P(\overline{A}B)=0.3$，求 $P(\overline{A})$.

解　由

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(\overline{A}B),$$

有

$$P(A)=P(A\cup B)-P(\overline{A}B)=0.6-0.3=0.3,$$

故

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.3=0.7.$$

例 1.2.12　证明 $[(A\cup B)(A\cup\overline{B})]\cup[(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})]=S$，其中 S 为样本空间.

证　由分配律有

$$\begin{aligned}[(A\cup B)(A\cup\overline{B})]\cup[(\overline{A}\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})]&=[A\cup(B\overline{B})]\cup[\overline{A}\cup(B\overline{B})]\\&=(A\cup\varnothing)\cup(\overline{A}\cup\varnothing)=A\cup\overline{A}=S.\end{aligned}$$

例 1.2.13　证明 $A-BC=(A-B)\cup(A-C)$.

证　$(A-B)\cup(A-C)=(A\overline{B})\cup(A\overline{C})=A(\overline{B}\cup\overline{C})=A(\overline{BC})=A-BC$.

例 1.2.14　设 A,B 是任意两个概率不为零的且互不相容的事件，则下列结论中正确的是(　　).

（A）$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不相容　　（B）$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相容

（C）$P(AB)=P(A)P(B)$　　（D）$P(A-B)=P(A)$

解　选项 A 错误，因为若 A,B 满足 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B\subset S$，则

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}\neq\varnothing,$$

从而 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 相容；选项 B 错误，因为若 A,B 满足 $A\cap B=\varnothing$，且 $A\cup B=S$，则

$$\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A\cup B}=\varnothing,$$

从而 $\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 不相容．当事件 A,B 的概率不为零时，独立与不相容不能同时成立，故选项 C 错误；由 $A\cap B=\varnothing$，从而 $A-B=A-AB=A$，$P(A-B)=P(A)$，所以选项 D 正确.

例 1.2.15　设 A 与 B 为对立事件，证明 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也为对立事件.

证　由 A 与 B 为对立事件，有 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，从而 $\overline{AB}=S$ 且 $\overline{A\cup B}=\varnothing$，故 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 为对立事件.

1.2.2　题型二：古典概型、几何概型的计算

在古典概型的计算中，要注意分析试验的全部基本事件是什么，以及要计算概率的事件中含有哪些基本事件；几何概型的计算常与高等数学的知识相结合.

例 1.2.16　袋中有5只球，其中只有1只红球，每次取1只球，取出后不放回，(1) 求前3次取到的球中有红球的概率；(2) 求第3次取到的球是红球的概率.

解　(1) 对袋子中的球进行编号，考虑取出3只球的所有可能情况，样本空间 S 中的样本点数为 A_5^3（排列数），设 $A=\{$前3次取到的球中有红球$\}$，则 A 中的样本点数为 $3C_4^1C_3^1$，由古典概型有

$$P(A)=\frac{3C_4^1C_3^1}{A_5^3}.$$

(2) 设 $B=\{$第3次取到的球是红球$\}$，则 B 中的样本点数为 $C_4^1C_3^1$，由古典概型有

$$P(B)=\frac{C_4^1C_3^1}{A_5^3}.$$

注　本题中(1)的计算也可以在压缩的样本空间上进行，S 中的样本点数为 C_5^3（组合数）A 中的样本点数为 C_4^2，由古典概型有

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_5^3},$$

但(2)的计算不能在压缩的样本空间上进行，因为若使用 C_5^3（组合数）计算 S 中的样本点数，则 B 不是 S 子集，即 B 不是事件.

例 1.2.17　袋中有10只球，其中4只白球，3只红球，3只黄球，从中取球3只，每次取1只球，取出后不放回，求：