普通高等教育“十一五”国家级规划教材

经济管理类

线性代数（第二版）

邱森 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

经济管理类

线性代数（第二版）

邱森　编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数:经济管理类/邱森编著.—2版.—武汉:武汉大学出版社,2013.9
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-307-10760-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.邱…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第087478号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:汪欣怡　　版式设计:韩闻锦

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn　网址:www.wdp.com.cn)
印刷:湖北金海印务有限公司
开本:720×1000　1/16　印张:25　字数:445千字　插页:1
版次:2007年7月第1版　2013年9月第2版
2013年9月第2版第1次印刷
ISBN 978-7-307-10760-1　定价:38.00元

第二版序

本书是在第一版的基础上全面修订的，我们保持了本教材的特色，并新增一些经济模型，新设应用性章课题，将某些内容进行删繁就简，更充分地反映近年来世界上课程教材改革的新进展和教学实践的新成果.

大道至简，一门学问，弄得深奥难懂是因为没有看透本质，搞得很复杂是因为没有抓住关键. 第二版新增了国民收入模型、线性交易模型和蛛网模型等线性经济模型，让学生多接触些现代化的新内容和新思想，来弄清所学的知识究竟有什么用，哪些问题可以用线性方程组来求解，特征值与特征向量有什么用，二次型化为标准形有什么用……通过应用，帮助学生看透它们的数学本质，在打好基础的同时，发展应用意识和创新意识. 应用数学解决实际问题的关键步骤是数学建模，在各章的“应用”一节中，我们建立了一些数学模型，在第二版的各章中再新设一节“章课题”，这些课题并不复杂，都是在建立经济模型后，再加以应用或探究一些新问题的. 由此可以积累数学建模的经验，提高学生的建模能力.

我们在第一章中删去了排列的概念，行列式改用递归定义，在第五章中删去了初等变换法和微积分中的多元函数极值的充分条件及其证明，介绍了求多元二次函数最值的代数方法，我们还订正了一些印刷错误、欠妥之处，并将某些段落进行改写，使教材更加简明. 由于 MATLAB 的版本不断更新，我们删去了附录“MATLAB 使用简介”，读者可以查阅有关参考书（如 [13]）.

最后，我们衷心感谢武汉大学出版社对本教材建设的全力支持，并对曾经使用过本书的同行和对本书提出过宝贵意见的专家和读者也深表谢意.

编　者

2013 年 5 月

第一版序

线性代数是经济管理学类专业的重要数学基础课程之一，它与微积分、常微分方程、概率统计等其他数学课程都有密切的联系. 随着科学技术、生产的迅速发展，越来越多的学科及实际问题都要用到线性代数的知识. 同样，在经济学中，许多重要问题的数学模型都是线性的，线性代数也成为研究和解释经济现象得心应手的工具和语言.

本书前五章（除带 * 号部分外）的内容涵盖了本课程所要求的全部教学内容，其中矩阵是线性代数最基本的工具，它将贯串于线性代数的各个方面，是线性代数的一条主线. 第六章（带 * 号）讲线性空间与线性变换，也属于线性代数的最基本的概念，它们将帮助我们从较高的观点来理解前五章的内容，从而得到深一层的认识.

编写本书的基本指导思想是：

1. 降低知识起点，加大教材使用弹性.

在引入一些抽象概念时，我们利用直观“模型”作载体，降低知识起点，化难为易，使学生易于理解，也易于利用这些载体进行理性思维，学会以简御难，我们也返璞归真，努力揭示其中原创性的数学思想，因为它们往往是简单而精彩，学生又易于接受的.

在内容设计上，我们关注了学生数学发展的不同需求，注意弹性. 在保证基础的前提下，为学生学习不同层次的内容提供了学习台阶，使学生在有限的时间内能学得更好，学到更多有用的本质性的知识. 本书中打有“*”号的章节是为对数学基础要求较高的专业或学生编写的，可以作为选学内容或学生自学用. 各章复习题也将适合于学生考研复习之用.

2. 展现知识的发生发展过程以及知识间的内在联系，揭示其数学本质.

我们采用围绕中心问题逐层展开的叙述方式，用非常具体的问题引出概念，在解决问题的过程中，又力求使学生知其所以然，了解每一步讨论的目的，定理、公式等的推导思路，以及每个概念和每个定理所处的地位和作用，了解知识的来龙去脉以及知识间的内在联系，通过理解，逐步领会代数学的一些重要思想方法，逐步掌握本门课程的数学本质，从而提高数学素养.

3. 更加强调数学知识的背景与应用.

本书十分注意突出线性代数的应用背景，不仅在新的数学概念或方法引进时这样做，而且在各章末都编写了一节相关的"应用"，介绍经济学中一些典型的经济数学模型，较详细地讨论了把实际问题转化为数学模型的过程，指出转化工作的要点和解决方向，培养学生在经济现象中运用数学的直觉思维能力，这也为学生将来能正确理解当前经济文献作一定的数学铺垫.

在本书中，我们也注意了与信息技术的整合. 在附录中，介绍了"MATLAB"，以了解计算机在解决线性代数计算问题中的应用.

在教材编写和出版过程中，我们得到了武汉大学出版社的协助，在此深表谢意. 最后，对书中的不妥之处，我们也企盼同行、读者批评指正.

编 者

2007 年 5 月

目　　录

第一章 行 列 式

在中学代数中，曾学习过用代入(或加减) 消元法求二元线性方程组和三元线性方程组的解. 是否能由公式直接利用方程组的全部系数来求解呢？为此，我们引入了行列式的概念. 它不仅能用于解决 n 元线性方程组公式解问题，而且在线性代数的其他内容和数学的其他分支中都有广泛的应用.

这一章主要讨论下面 3 个问题：

1) 行列式概念的形成(用递推的方法给出行列式的递归定义).

2) 行列式的基本性质和计算方法.

3) 利用行列式来解线性方程组.

1.1 2 阶行列式与 3 阶行列式

本节的目的是阐述行列式的来源. 它是从二元、三元线性方程组的公式解中引出来的. 故首先讨论解线性方程组的问题.

设有二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法解此线性方程组：以 a_{22} 乘(1.1) 第 1 式各项，得

$$a_{22}a_{11}x_1 + a_{22}a_{12}x_2 = a_{22}b_1; \tag{1.2}$$

再用 a_{12} 乘(1.1) 第 2 式各项，得

$$a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{12}b_2; \tag{1.3}$$

然后由(1.2) 减(1.3) 可消去 x_2，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}.$$

若 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$，则得出

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

同理，在(1.1) 中用 a_{21} 乘(1.1) 第 1 式各项，再用 a_{11} 乘(1.1) 第 2 式各项，

然后相减，若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则得出

$$x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

故方程组(1.1) 只要适合条件 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，其解就可以立即求得：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.4}$$

这就是二元线性方程组(1.1) 的公式解.

但(1.4) 不易记忆，为此，我们引入 2 阶行列式的概念. 令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.5}$$

其中 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 叫做一个 **2 阶行列式.**

利用 2 阶行列式，方程组(1.1) 的解可以很有规律地写成

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}. \tag{1.6}$$

我们可以看出，(1.6) 中居分母位置的行列式都是 D，而且 D 是由(1.1) 中未知量的系数按照原来的相对位置排成的，这样看，(1.6) 的分母一下子就记住了. 下面再来看分子. 我们可以看出 x_1 解的分子就是把行列式 D 中第 1 列的元素换成方程组(1.1) 中的两个常数项 b_1,b_2；而 x_2 解的分子则是用(1.1) 中常数项去换行列式 D 中第 2 列元素而成的.

总之，当(1.1) 中未知量的系数所排成的行列式 $D\neq 0$ 时，(1.1) 的解立即可由(1.6) 算出.

例 1.1 解方程组 $\begin{cases} 2x_1+3x_2=13, \\ 5x_1-4x_2=-2. \end{cases}$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}=2\times(-4)-3\times 5=-23\neq 0,$$

所以

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{D}=\frac{13\times(-4)-3\times(-2)}{-23}=2,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{D}=\frac{2\times(-2)-13\times 5}{-23}=3.$$

现在来看三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.7}$$

同样，由消元法可得，当

$$\begin{aligned} D= & a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ & -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ \neq & 0 \end{aligned}$$

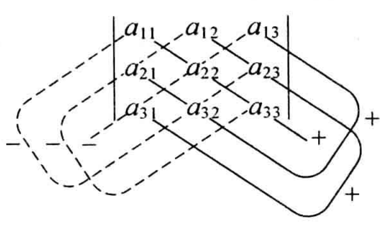
时，(1.7) 的解为

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{D}(b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}), \\ x_2 &= \frac{1}{D}(a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3 \\ &\quad -a_{13}b_2a_{31}-b_1a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}b_3), \\ x_3 &= \frac{1}{D}(a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32} \\ &\quad -b_1a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}b_3-a_{11}b_2a_{32}). \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

同前面一样，为了方便记忆，我们引进 3 阶行列式的概念. 令

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

并称 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 为一个 **3 阶行列式**. 这个行列式含有 3 行、3 列，是 6 个项的代数和. 这 6 个项，我们可用一个简单的规律来记忆，就是所谓 3 阶行列式的**对角线规则**：



即实线上3个元的乘积构成的3项都取正号，虚线上3个元的乘积构成的3项都取负号.

例 1.2 计算行列式$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$.

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} &= 2\times3\times5+1\times1\times2+2\times(-4)\times3 \\ &\quad -2\times3\times2-1\times(-4)\times5-2\times3\times1 \\ &= 30+2-24-12+20-6 \\ &= 10. \end{aligned}$$

例 1.3 展开行列式$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

解 按对角线规则展开，得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32} \\ &\quad -a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}. \end{aligned}$$

有了3阶行列式后，(1.8)可以很有规律地表示为

$$\left.\begin{aligned} & x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{D}, \\ & x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

上面3式右边居分母位置的3个行列式都是D，它是线性方程组(1.7)中的系数按原有相对位置而排成的3阶行列式，而在x_1,x_2,x_3的表达式中的分子分别是把行列式D中第1,2,3列换成常数项b_1,b_2,b_3而得到的3阶行列式. 这与二元线性方程组的解有相同的规律. 不仅如此，以后我们还将看到：n元线性方程组的解也同样可以用"n阶行列式"来表达，其情况与二元、三元线性方程组解的表达式完全类似.

例 1.4 解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2+5x_3=-14, \\ \qquad\ x_2-\ x_3=5, \\ x_1-\ x_2+3x_3=-8. \end{cases}$$

解 因为 $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=-3\neq 0$，故有

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} -14 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -1 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{-27}{-3}=9,$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -14 & 5 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -8 & 3 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{3}{-3}=-1,$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -8 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{18}{-3}=-6.$$

在下一节中，我们把 2 阶、3 阶行列式推广到 n 阶行列式，用递推的方法给出 n 阶行列式的定义.

习题 1.1

1. 计算下列行列式:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;　　　2) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{vmatrix}$;　　　4) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

2. 验证下列等式成立:

1) $\begin{vmatrix} a+a_1 & b \\ c+c_1 & d \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

3. 利用行列式解下列方程组：

1) $\begin{cases} 5x+2y=3, \\ 11x-7y=1; \end{cases}$　　2) $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha = a; \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = b; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=1, \\ 2x_1+x_2-x_3=1, \\ x_1-3x_2-4x_3=-10. \end{cases}$

1.2 n 阶行列式

由习题 1.1 第 2 题的 3) 知

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \tag{2.1}$$

于是，我们也可以利用 2 阶行列式由上式来定义 3 阶行列式.

一般地，我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{2.2}$$

表示一个 n 阶行列式($n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$)，其中 a_{ij} ($i,j=1,2,\cdots,n$) 都是数，称为**行列式的元素**，下标 i 表示该元素位于行列式的上起第 i 行，称为 a_{ij} 的**行标**，第 2 个下标 j 表示该元素位于行列式的左起第 j 列，称为 a_{ij} 的**列标**. 我们定义 **n 阶行列式的值**如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}M_{1n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}, \tag{2.3}$$

其中M_{1j}是一个$n-1$阶行列式，它是从原来的n阶行列式中去掉第1行与第j列后，余下的元素按原来的次序排列而得到的. 这样，计算一个n阶行列式，归结为计算n个$n-1$阶行列式，依次类推，最后归结为2阶行列式的计算. 当行列式只有1行1列(即只有1个元素)时，规定行列式的值就是此元素的数值.

例 1.5 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{vmatrix}.$$

解
$$\begin{aligned} D &= 11\begin{vmatrix} 22 & 23 & 24 \\ 32 & 33 & 34 \\ 42 & 43 & 44 \end{vmatrix} - 12\begin{vmatrix} 21 & 23 & 24 \\ 31 & 33 & 34 \\ 41 & 43 & 44 \end{vmatrix} + 13\begin{vmatrix} 21 & 22 & 24 \\ 31 & 32 & 34 \\ 41 & 42 & 44 \end{vmatrix} \\ &\quad - 14\begin{vmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \\ 41 & 42 & 43 \end{vmatrix} \\ &= 11\left(22\begin{vmatrix} 33 & 34 \\ 43 & 44 \end{vmatrix} - 23\begin{vmatrix} 32 & 34 \\ 42 & 44 \end{vmatrix} + 24\begin{vmatrix} 32 & 33 \\ 42 & 43 \end{vmatrix}\right) \\ &\quad - 12\left(21\begin{vmatrix} 33 & 34 \\ 43 & 44 \end{vmatrix} - 23\begin{vmatrix} 31 & 34 \\ 41 & 44 \end{vmatrix} + 24\begin{vmatrix} 31 & 33 \\ 41 & 43 \end{vmatrix}\right) \\ &\quad + 13\left(21\begin{vmatrix} 32 & 34 \\ 42 & 44 \end{vmatrix} - 22\begin{vmatrix} 31 & 34 \\ 41 & 44 \end{vmatrix} + 24\begin{vmatrix} 31 & 32 \\ 41 & 42 \end{vmatrix}\right) \\ &\quad - 14\left(21\begin{vmatrix} 32 & 33 \\ 42 & 43 \end{vmatrix} - 22\begin{vmatrix} 31 & 33 \\ 41 & 43 \end{vmatrix} + 23\begin{vmatrix} 31 & 32 \\ 41 & 42 \end{vmatrix}\right) \\ &= 11[22(-10) - 23(-20) + 24(-10)] \\ &\quad - 12[21(-10) - 23(-30) + 24(-20)] \\ &\quad + 13[21(-20) - 22(-30) + 24(-10)] \\ &\quad - 14[21(-10) - 22(-20) + 23(-10)] \end{aligned}$$

$$= 11(-220+460-240)-12(-210+690-480)$$
$$+13(-420+660-240)-14(-210+440-230)$$
$$=0.$$

在 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中，划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行与第 j 列的各元素，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成的一个 $n-1$ 阶行列式称为**元素 a_{ij} 的余子式**，记为 M_{ij}. 在 M_{ij} 前面附以符号 $(-1)^{i+j}$，得到 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称为**元素 a_{ij} 的代数余子式**.

利用代数余子式的概念，(2.3) 的行列式的定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}. \tag{2.4}$$

例 1.6 求 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的值.

解 因为第 1 行除 a_{11} 外，其余元素全为 0，所以按 n 阶行列式的定义，

$$D=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$