原子能譯丛

反应堆物理学与热工学

Г. И. 馬尔丘克等著

6

"原子能"編譯委員会編

科学出版社

反应堆物理学与热工学

（原子能譯叢6）

Г. И. 馬尔丘克等著

“原子能”編譯委員会編

科　学　出　版　社

1959

Физика и теплотехника реакторов

(Приложение №1 к журналу "Атомная энергия" за 1958 год)

Атомиздат, Москва—1958

內容簡介

本书据苏联"原子能"杂誌副刊1958年第一号譯出．书中包括反应堆物理学与热工学方面的論文18篇，其中关于反应堆物理学和安全防护的問題以前在文献中是較少研究过或甚至完全沒有談到过的．

本书对于从事反应堆物理学及热工学研究的科学工作者、工程物理学者和高年級大学生都有参考价值．

反应堆物理学与热工学

編譯者	"原子能"編譯委員会
出版者	科学出版社 北京朝阳門大街117号 北京市书刊出版业营业許可証出字第061号
印刷者	北京新华印刷厂
总經售	新华书店

1959年9月第一版　书号：1902　字数：178,000
1959年9月第一次印刷　开本：787×1092 1/25
(京)0001—4,500　印张：8 2/25

定价：1.10元

苏联“原子能”杂誌編輯部的説明

在这本論文集里介紹了一些苏联作者关于反应堆建設方面的工作．文集中的文章可以大致分为两部分．

第一部分是有关反应堆物理学的文章，其中有一些談到反应堆的物理学計算，另一些描述了研究反应堆物理学与安全問題的一些实驗以及一些与此有关的問題．这部分文章涉及的問題相当广泛．这些問題以前在文献中很少研究过或甚至沒有談到过．

第二部分的文章是带有工程性質的，它們描述在动力反应堆与从反应堆中导出热量的迴路中的热的相互关系．这些文章从某些方面闡述了一个极重要的問題——如何最有效地导出及利用动力反应堆的活性区所放出的热量．同时也討論了与此紧密联系着的反应堆取热迴路的放射性沾染問題．

編輯部希望通过論文集“反应堆物理学与热工学”的出版，能对属于这一专业的科学研究人員、工程物理学家以及高年級大学生有所帮助．

目　录

关于核反应堆的多羣計算方法問題

馬尔丘克(Г. И. Марчук)

引　言

求反应堆的基本方程系和共轭方程系的精确解是一个极复杂的問題. 因此求这些問題的解，要用各种近似方法，以便在并不減少精确度的前提下，把問題作最大限度的簡化. 为此，通常用熟知的分羣方法[1-6]，也就是各羣間隔中，引进了对解的性质的附加假設，而簡化了問題中的能量算符的性质. 这些假設归根結底是与在求解时采用哪一种內插公式有关的. 結果，共轭方程与基本方程一样都近似地用扩散类型的方程系表示.

解扩散方程本身已經沒有多大困难了. 这个問題可以用各种数值方法有效地解得[1, 7, 8].

大家知道，在慢化中子微弱吸收的情况下，慢化密度函数 q 随对数能量的变化极小，因此要求出相应的多羣系統的解，用較少数量能量羣来研究便足够了.

当反应堆中存在着強烈吸收慢化中子的区域，即在单位对数能量間隔內，由于中子吸收，函数 q 有显著改变时，則完全为另一个样子.

为了达到那种反应堆的物理計算所要求的精确度，可以增加能量羣的数目，但是这个办法大大增加了計算人員的工作量. 因此就有必要少数的羣扩散方程，以一定的精确度来解这类問題.

本文討論了用于反应堆的基本方程系和共轭方程系的那种方法.

1. 反应堆的多羣基本方程系

我們討論的反应堆的基本方程系，在扩散年龄近似中具有形式[1)]

1) 例如可参考文献[1].

$$\nabla D\nabla nv - \Sigma_c nv = \frac{\partial q}{\partial u} - \chi(u)Q(\mathbf{r}), \tag{1.1}$$

$$\nabla D_T\nabla\Phi - \Sigma_{cT}\Phi = -q(\mathbf{r}, u_T), \tag{1.2}$$

$$Q(\mathbf{r}) = \nu_f\left(\int_{-\infty}^{u_T}\Sigma_f nv\, du + \Sigma_{fT}\Phi\right), \tag{1.3}$$

式中 $nv(\mathbf{r}, u)$——对数能量为 u 时的慢化中子通量；$q = \xi\Sigma_s nv$——慢化密度；Φ——热中子通量；$Q(\mathbf{r})$——次級中子数；$\chi(u)$——分裂譜，其它函数和常数的符号是大家都知道的.

其次討論慢化方程(1.1)，为方便起見，預先將它写成下列形式：

$$\frac{\partial q}{\partial u} + \frac{\Sigma_c}{\xi\Sigma_s}q = \nabla D\nabla nv + \chi(u)Q(\mathbf{r}). \tag{1.4}$$

从分析方程(1.4)可看出，当中子在相当于它們在堆中被強烈吸收的那些能量时，此方程左边的每一項，显著地大于在右边部分的各項，因此它們彼此間相互抵消.

这个情况提示了这种想法：看来，表式 $\nabla D\nabla nv$ 可以用任何一个近似表式來替代，只要一方面能保証計算所要求的精确度，另一方面又能使計算是最簡单和方便的.

为此，这里假設，函数 $\nabla D\nabla nv$ 已給定，再把一級綫性非齐次方程(1.4)积分，得

$$q = p^j(u)q^{j-1} + \int_{u_{j-1}}^{u}\nabla D\nabla nv\, e^{-\int_{u'}^{u}\frac{\Sigma_c}{\xi\Sigma_s}du''}du' + \chi^j(u)Q(\mathbf{r}), \tag{1.5}$$

式中

$$q^j = q(\mathbf{r}, u_j),$$

$$p^j(u) = e^{-\int_{u_{j-1}}^{u}\frac{\Sigma_c}{\xi\Sigma_s}du},$$

$$\chi^j(u) = \int_{u_{j-1}}^{u}\chi(u')e^{-\int_{u'}^{u}\frac{\Sigma_c}{\xi\Sigma_s}du''}du'.$$

取 $u = u_j$，表式(1.5)变成

$$q^j = p^j q^{j-1} + \int_{u_{j-1}}^{u_j}\nabla D\nabla nv\,\frac{p^j}{p^j(u')}du' + \chi^j Q(\mathbf{r}), \tag{1.6}$$

式中

$$p^j = p^j(u_j), \quad \chi^j = \chi^j(u_j).$$

关系式(1.5)和(1.6)是把慢化方程(1.4)化为多羣方程系形式时各种近似方法的基础.

如上面所指出的，在关系式(1.5)和(1.6)中，表式 $\nabla D \nabla nv$ 可以采取一定的近似,只要考虑到該函数性質的基本特点. 因此首先产生了把量 $q(\mathbf{r}, u)$ 表示成乘积形式的想法:

$$q(\mathbf{r}, u) = \psi(\mathbf{r}, u) p^j(u), \tag{1.7}$$

式中函数 $\psi(\mathbf{r}, u)$ 应当为緩慢变化的,主要与中子从反应堆中的漏脫有关. 应該注意到，对于无反射层的反应堆，函数 $\psi(\mathbf{r}, u) = \psi(\mathbf{r})$ 仅与径向量有关，在这种情况下，应用表式(1.7)是自然的，而且是最合宜的. 对于屏蔽物的慢化作用很弱(重物質)的反应堆,应用表式(1.7)同样是合理的.

当討論到在活性区中有強烈的中子吸收、反射层有良好的慢化作用、但并不显著地吸收慢化中子的这类反应堆时，情况就完全不同了. 在这种情况下,裂变中子的相当一部分由于散射的結果将进入反射层,并在那里継續慢化. 活性区中,中子的主要部分在慢化过程中达到中能区域后，都将十分強烈地被吸收. 所以从某一个对数能量值开始，进入反射层的中子通量完全終止,以后在反射层中預有的中子通量“高峯”(всплеск)的影响下，形成了由反射层流入活性区的逆流. 同时，在隣近活性区边界的那部分活性区中，将造成与中心区域完全不同的中子譜,在中心区域里，中子譜是仍旧可滿意地用公式(1.7)来描写的. 在靠近活性区与反射层边界处的那部分活性区內，函数 q 的譜随对数能量改变极少,因为它的主要部分由反射层流来的中子通量所决定. 在反射层中中子慢化源的总量与能量的关系很小，只随中子朝活性区方向与通过反应堆的外边界的漏失而改变.

于是,在反应堆的活性区中,直到离反射层大約等于扩散长度的距离內,由于在活性区內存在中子通量的梯度,形成了随对数能量緩慢变化的能譜. 因为从某一个能量値开始,由于有从反射层流来的中子,活性区內的中子数显著地增加,因此,正是对于分布在靠近活性区与反射

层边界处的那些点，需要更正确地表示中子的漏失过程.

由此可見，对于反应堆活性区內的这些点，函数 q 可以用下面三个最簡单的內插公式之一来描写：

$$\left.\begin{array}{ll} q = q^i, & \text{公式 I} \\ q = \dfrac{u - u_{j-1}}{\Delta u_j} q^i + \dfrac{u_j - u}{\Delta u_j} q^{i-1}, & \text{公式 II} \\ q = q^{i-1}. & \text{公式 III} \end{array}\right\} \tag{1.8}$$

这些內插公式不能滿意地描写远离（与反射层的）交界处的活性区中的中子慢化密度.

但是，在进行方程(1.6)右边部分的积分时，这些公式仍旧都可以应用，因为对于这些点，

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j} \nabla D \nabla nv \frac{p^i}{p^i(u)} du \tag{1.9}$$

这一項比起其余項来得小. 所以在計算这一項时卽使有相当大的誤差，在最后結果中也不会引进很大的誤差. 对于反射层中的点，应用公式(1.8)是毫无問題的.

因此最后可看出，为了近似地表示积分(1.9)，在反应堆的所有点上完全可以滿意地应用內插公式 I—III.

我們来討論表式(1.9)，这对于反应堆的一定区域內的点，可近似地写成下列的形式：

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j} \nabla D \nabla nv \frac{p^i}{p^i(u)} du = \int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{D}{\xi \Sigma_s} \frac{p^i}{p^i(u)} \nabla^2 q du =$$

$$= \frac{1}{\Delta u_j} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{p^i}{\xi \Sigma_s} \frac{du}{p^i(u)} \int_{u_{j-1}}^{u_j} D^i \nabla^2 q du, \tag{1.10}$$

式中

$$D^i = \frac{\displaystyle\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{D}{\xi \Sigma_s} p^i \frac{du}{p^i(u)}}{\displaystyle\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{p^i}{\xi \Sigma_s} \frac{du}{p^i(u)}}.$$

为了求出积分(1.10)，我們用內插公式(1.8)，由于在区域的分界面

上 $D^i\nabla nv^i = D'^i\nabla nv'^i$,积分(1.10)不难写成这样形式

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j} \nabla D\nabla nv \frac{p^j}{p^j(u)} du = A^j\nabla D^j\nabla nv^j + B^j\nabla D^{j-1}\nabla nv^{j-1}. \quad (1.11)$$

表 1

公 式	A^j	B^j
I	$\xi\Sigma_s^j\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{1}{\xi\Sigma_s}\frac{p^j}{p^j(u)}du$	0
II	$\frac{\xi\Sigma_s^j}{2}\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{1}{\xi\Sigma_s}\frac{p^j}{p^j(u)}du$	$\frac{D^j}{D^{j-1}}\cdot\frac{\xi\Sigma_s^{j-1}}{2}\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{1}{\xi\Sigma_s}\frac{p^j}{p^j(u)}du$
III	0	$\frac{D^j}{D^{j-1}}\xi\Sigma_s^{j-1}\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{1}{\xi\Sigma_s}\frac{p^j}{p^j(u)}du$

量 A^j 和 B^j 可由表 1 确定，現在将积分(1.11)代入表式(1.6)，这样，經过幷不复杂的变换后，在公式 I 和公式 II 的情况下，得扩散方程系：

$$\nabla D^j\nabla nv^j - \Sigma^j nv^j = -f^j \quad (j = 1, 2, \cdots, m), \qquad (1.12)$$

式中

$$\Sigma^j = \frac{\xi\Sigma_s^j}{A^j},$$

$$f^j = \frac{1}{A^j}(p^j\xi\Sigma_s^{j-1}nv^{j-1} + B^j\nabla D^{j-1}\nabla nv^{j-1} + \chi^j Q).$$

利用扩散方程(1.12)，从 f^j 的表式中消去函数 $\nabla D^{j-1}\nabla nv^{j-1}$，由此我們得出下列循环关系式：

$$f^j = \frac{1}{A^j}[(p^j\xi\Sigma_s^{j-1} + B^j\Sigma^{j-1})nv^{j-1} - B^jf^{j-1} + \chi^j Q]. \qquad (1.13)$$

最后，将热中子羣的扩散方程归併到方程系(1.12)，即求得反应堆的多羣方程系：

$$\nabla D^j\nabla nv^j - \Sigma^j nv^j = -f^j \quad (j = 1, 2, \cdots, m, m + 1), \quad (1.14)$$

式中 $nv^{m+1} = \Phi$，而数量 D^j, Σ^j 和 f^j 由表 2 所决定.

表 2

j	nv^j	D^j	Σ^j	f^j
(1)—(m)	nv^j	D^j	$\dfrac{\xi\Sigma_s^j}{A^j}$	$\dfrac{1}{A^j}[(p^j\xi\Sigma_s^{j-1}+B^j\Sigma^{j-1})nv^{j-1}-B^jf^{j-1}+\chi^jQ]$
($m+1$)	Φ	D_{T}	Σ_{CT}	$\xi\Sigma_s^m nv^m$

最后，在公式Ⅲ情况下，同理可得

$$\nabla D^j\nabla nv^{j-1}+\Sigma^j nv^{j-1}=f^j, \tag{1.15}$$

式中

$$D^j=\frac{\displaystyle\int_{u_{j-1}}^{u_j}\frac{D}{\xi\Sigma_s}\frac{p^j}{p^j(u)}du}{\displaystyle\int_{u_{j-1}}^{u_j}\frac{1}{\xi\Sigma_s}\frac{p^j}{p^j(u)}du}, \tag{1.16}$$

$$\Sigma^j=p^j\frac{\xi\Sigma_s^{j-1}}{B^j},\quad f^j=\frac{\xi\Sigma_s^j}{B^j}nv^j-\frac{\chi^j}{B^j}Q,$$

量 B^j 仍可由表 1 决定.

对未知函数 nv^j，解方程(1.15)，不难得

$$nv^j=\frac{B^j}{\xi\Sigma_s^j}\left(\Sigma^j nv^{j-1}+\nabla D^j\nabla nv^{j-1}+\frac{\chi^j}{B^j}Q\right). \tag{1.17}$$

現在来計算裂变积分 $Q(\mathbf{r})$:

$$Q(\mathbf{r})=\nu_f\left(\int_{-\infty}^{u_{\text{T}}}\Sigma_f nv\,du+\Sigma_{f_{\text{T}}}\Phi\right). \tag{1.18}$$

按多羣計算的观念，公式(1.18)可表示成

$$Q(\mathbf{r})=\nu_f\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{u_{j-1}}^{u_j}\Sigma_f nv\,du+\Sigma_{f_{\text{T}}}\Phi\right). \tag{1.19}$$

可見，問題就在于利用区間 (u_{j-1}, u_j) 的边界上已知値，求得在該区間范围内函数 nv 的最好近似式.

为了这个目的，在慢化中子弱吸收情况下，可以利用最簡单的內插公式(1.8)，但当函数 q 在所討論的区間內变化很大时，那样的近似是不正确的. 必須想别的办法，也卽是要利用在羣的范围內，由公式(1.5)

所决定的精确解，但是在这个公式中，积分号下是未知函数 $\nabla D\nabla nv$. 因此首先必須用点 u_{j-1} 和 u_j 处的已知值把这个函数表示出来. 为此就要用到推导反应堆多羣方程系时用过的那样的假設. 这样，最后我們就可得到一个內插公式，这在計算 $Q(r)$ 中的积分时，除了由于改用多羣方法，已經包含在函数 nv^j 中的誤差外，不会带来額外的誤差.

那么，我們用公式(1.5)来找得合适的內插公式. 我們討論积分

$$\int_{u_{j-1}}^{u} \nabla D\nabla nv e^{-\int_{u'}^{u}\frac{\Sigma_c}{\xi\Sigma_s}du''} du' = \int_{u_{j-1}}^{u} \nabla D\nabla nv \frac{p^j(u)}{p^j(u')} du'.$$

对于反应堆內固定的区域，这一表式可写成：

$$\int_{u_{j-1}}^{u} \nabla D\nabla nv \frac{p^j(u)}{p^j(u')} du' = \int_{u_{j-1}}^{u} \frac{D}{\xi\Sigma_s} \frac{p^j(u)}{p^j(u')} \nabla^2 q \; du'. \tag{1.20}$$

在表式(1.20)中的函数 q，我們用內插公式(1.8)来表示，这些內插公式早先为了得到多羣扩散方程系曾經用过. 由此将有

$$\int_{u_{j-1}}^{u} \nabla D\nabla nv \frac{p^j(u)}{p^j(u')} du' = $$
$$= A^j(u)\nabla D^j\nabla nv^j + B^j(u)\nabla D^{j-1}\nabla nv^{j-1}, \tag{1.21}$$

式中函数 $A^j(u)$ 和 $B^j(u)$ 为表 3 所决定.

表 3

公式	$A^j(u)$	$B^j(u)$
I	$\frac{p^j(u)}{D^j}\xi\Sigma_s^j\int_{u_{j-1}}^{u}\frac{D}{\xi\Sigma_s}\frac{du'}{p^j(u')}$	0
II	$\frac{p^j(u)}{D^j}\xi\Sigma_s^j\int_{u_{j-1}}^{u}\frac{D}{\xi\Sigma_s}\frac{u'-u_{j-1}}{\Delta u_j}\frac{du'}{p^j(u')}$	$\frac{p^j(u)}{D^{j-1}}\xi\Sigma_s^{j-1}\int_{u_{j-1}}^{u}\frac{D}{\xi\Sigma_s}\frac{u_j-u'}{\Delta u_j}\frac{du'}{p^j(u')}$
III	0	$\frac{p^j(u)}{D^{j-1}}\xi\Sigma_s^{j-1}\int_{u_{j-1}}^{u}\frac{D}{\xi\Sigma_s}\frac{du'}{p^j(u')}$

把表式(1.21)代入方程(1.5)后，得

$$q = p^j(u)q^{j-1} + A^j(u)\nabla D^j\nabla nv^j + B^j(u)\nabla D^{j-1}\nabla nv^{j-1} + \chi^j(u)Q. \tag{1.22}$$

我們利用扩散方程(1.14)，把关系式(1.22)中的表式 $\nabla D^j\nabla nv^j$ 和 $\nabla D^{j-1}\nabla nv^{j-1}$ 消去.

那么，对于公式Ⅰ和Ⅱ得到下列内插公式：

$$\left.\begin{array}{l} nv = \dfrac{1}{\xi\Sigma_s}[p^j(u)\xi\Sigma_s^{j-1}nv^{j-1} + A^j(u)(\Sigma^j nv^j - f^j) + \\ \quad + B^j(u)(\Sigma^{j-1}nv^{j-1} - f^{j-1}) + \chi^j(u)Q]; \\ \text{对于公式Ⅲ：} \\ nv = \dfrac{1}{\xi\Sigma_s}[p^j(u)\xi\Sigma_s^{j-1}nv^{j-1} + B^j(u)(f^j - \Sigma^j nv^{j-1}) + \chi^j(u)Q]. \end{array}\right\} \quad (1.23)$$

把公式(1.23)代入(1.19)，那么，对公式Ⅰ和Ⅱ得

$$Q = \nu_f \sum_{j=1}^{m+1} (\alpha^j nv^j - \beta^j f^j) + \nu_f \varepsilon Q, \quad (1.24)$$

式中

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{\Sigma_f}{\xi\Sigma_s} \chi^j(u) du, \quad (1.25)$$

量 α^j 和 β^j 在表 4 中列出

表 4

j	α^j	β^j
(1) − (m − 1)	$\alpha_1^{j+1} + \alpha_2^j$	$\beta_1^{j+1} + \beta_2^j$
(m)	α_2^j	β_2^j
(m + 1)	Σ_{f_T}	0

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1^j = \displaystyle\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{\Sigma_f}{\xi\Sigma_s}[\xi\Sigma_s^{j-1}p^j(u) + \Sigma^{j-1}B^j(u)]du, \\ \alpha_2^j = \Sigma^j \displaystyle\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{\Sigma_f}{\xi\Sigma_s} A^j(u) du, \\ \beta_1^j = \displaystyle\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{\Sigma_f}{\xi\Sigma_s} B^j(u) du; \quad \beta_2^j = \displaystyle\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{\Sigma_f}{\xi\Sigma_s} A^j(u) du. \end{array}\right\} \quad (1.26)$$

最后，从方程(1.24)解出函数 $Q(\mathbf{r})$：

$$Q(\mathbf{r}) = \frac{\nu_f}{1 - \nu_f \varepsilon} \sum_{j=1}^{m+1} (\alpha^j nv^j - \beta^j f^j). \quad (1.27)$$

对于公式Ⅲ，可以得到类似的关系.

2. 反应堆多羣系共軛方程

現在轉到反应堆共軛方程系的討論，它在扩散年龄近似中具有下面形式：

$$\nabla D_{\mathrm{T}} \nabla \Phi^{*}-\Sigma_{c\mathrm{T}} \Phi^{*}=-\Sigma_{f\mathrm{T}} Q^{*}(\mathbf{r}), \tag{2.1}$$

$$\nabla D \nabla n v^{*}-\Sigma_{c} n v^{*}=-\xi \Sigma_{s} \frac{\partial n v^{*}}{\partial u}-\Sigma_{f} Q^{*}(\mathbf{r}), \tag{2.2}$$

$$Q^{*}(\mathbf{r})=\nu_{f} \int_{-\infty}^{u_{\mathrm{T}}} \chi(u) n v^{*} d u, \tag{2.3}$$

式中 $\Phi^{*}(\mathbf{r})$——热中子价值；$nv^{*}(\mathbf{r}, u)$——对数能量为 u 的慢化中子价值. 函数 nv^{*} 和 Φ^{*} 間的关系为

$$n v^{*}(\mathbf{r}, u_{\mathrm{T}})=\Phi^{*}(\mathbf{r}).$$

方程(2.2)可改写成

$$\frac{\partial n v^{*}}{\partial u}-\frac{\Sigma_{c}}{\xi \Sigma_{s}} n v^{*}=-\frac{1}{\xi \Sigma_{s}} \nabla D \nabla n v^{*}-\frac{\Sigma_{f}}{\xi \Sigma_{s}} Q^{*}(\mathbf{r}). \tag{2.4}$$

假設方程(2.4)的右边部分为已知，在 (u, u_j) 范围內，把方程(2.4)当作一級非齐次微分方程求解，得

$$n v^{*}=p^{*j}(u) n v^{*j}+\int_{u}^{u_{j}} \frac{1}{\xi \Sigma_{s}} \nabla D \nabla n v^{*} e^{-\int_{u}^{u'} \frac{\Sigma_{c}}{\xi \Sigma_{s}} d u''} d u'+ + \eta^{j}(u) Q^{*}(\mathbf{r}), \tag{2.5}$$

式中

$$p^{*j}(u)=e^{-\int_{u}^{u_{j}} \frac{\Sigma_{c}}{\xi \Sigma_{s}} d u},$$

$$\eta^{j}(u)=\int_{u}^{u_{j}} \frac{\Sigma_{f}}{\xi \Sigma_{s}} e^{-\int_{u}^{u'} \frac{\Sigma_{c}}{\xi \Sigma_{s}} d u''} d u'.$$

在方程式(2.5)中采用 $u=u_{j-1}$ 后，得

$$n v^{*j-1}=p^{j} n v^{*j}+\int_{u_{j-1}}^{u_{j}} \frac{1}{\xi \Sigma_{s}} \nabla D \nabla v^{*} e^{-\int_{u_{j-1}}^{u} \frac{\Sigma_{c}}{\xi \Sigma_{s}} d u'} d u+\eta^{j} Q^{*}(\mathbf{r}), \tag{2.6}$$

式中

$$\eta^i=\eta^i(u_{j-1}),\quad p^j=p^{*j}(u_{j-1})=p^j(u_j).$$

为了得到反应堆的多羣方程系，必須在表式(2.6)的积分項中，在区間 (u_{j-1}, u_j) 上假設 $\nabla D\nabla nv^*$ 的近似函数；为此，我們討論积分

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j}\nabla D\nabla nv^*\frac{e^{-\int_{u_{j-1}}^{u}\frac{\Sigma_c}{\xi\Sigma_s}du'}}{\xi\Sigma_s}du=\int_{u_{j-1}}^{u_j}\nabla D\nabla nv^*\frac{p^j(u)}{\xi\Sigma_s}du,$$

它在反应堆的固定区域可写成下列形式：

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j}\nabla D\nabla nv^*\frac{p^j(u)}{\xi\Sigma_s}du=\int_{u_{j-1}}^{u_j}\frac{D}{\xi\Sigma_s}p^j(u)\nabla^2nv^*du. \tag{2.7}$$

引入符号

$$D^j=\frac{\int_{u_{j-1}}^{u_j}\frac{D}{\xi\Sigma_s}p^j(u)du}{\int_{u_{j-1}}^{u_j}\frac{1}{\xi\Sigma_s}p^j(u)du},$$

关系式(2.7)写成下列形式：

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j}\nabla D\nabla nv^*\frac{p^j(u)}{\xi\Sigma_s}du=\int_{u_{j-1}}^{u_j}\frac{1}{\xi\Sigma_s}p^j(u)du\int_{u_{j-1}}^{u_j}D^j\nabla^2nv^*du. \tag{2.8}$$

为了求出关系式(2.8)中的后一个积分，我們利用了最簡单的內插公式：

$$\left.\begin{aligned}
&nv^*=nv^{*j-1}, && \text{公式 I}\\
&nv^*=\frac{u_j-u}{\Delta u_j}nv^{*j-1}+\frac{u-u_{j-1}}{\Delta u_j}nv^{*j}, && \text{公式 II}\\
&nv^*=nv^{*j}. && \text{公式 III}
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

就有

$$\int_{u_{j-1}}^{u_j}\nabla D\nabla nv^*\frac{p^j(u)}{\xi\Sigma_s}du=A^{*j}\nabla D^j\nabla nv^{*j-1}+B^{*j}\nabla D^{j+1}\nabla nv^{*j} \tag{2.10}$$

(量 A^{*j} 和 B^{*j} 由表 5 給出。)

表 5

公式	A^{*j}	B^{*j}
I	$\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{p^j(u)}{\xi\Sigma_s} du$	0
II	$\int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{p^j(u)}{\xi\Sigma_s} \frac{u_j - u}{\Delta u_j} du$	$\frac{D^j}{D^{j+1}} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{p^j(u)}{\xi\Sigma_s} \frac{u - u_{j-1}}{\Delta u_j} du$
III	0	$\frac{D^j}{D^{j+1}} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \frac{p^j(u)}{\xi\Sigma_s} du$

現在将表式(2.10)代入(2.6),对于公式 I 和 II ,得

$$\nabla D^j \nabla nv^{*j-1} - \Sigma^j nv^{*j-1} = -f^{*j} \quad (j = m, m-1, \cdots, 1), \tag{2.11}$$

式中

$$\Sigma^j = \frac{1}{A^{*j}},$$

$$f^{*j} = \frac{1}{A^{*j}} (p^j nv^{*j} + B^{*j} \nabla D^{j+1} \nabla nv^{*j} + \eta^j Q^*). \tag{2.12}$$

用扩散方程(2.11)把 $\nabla D^{j+1} \nabla nv^{*j}$ 从 f^{*j} 的表式中消去，由此求得循环关系式

$$f^{*j} = \frac{1}{A^{*j}} [p^j nv^{*j} + B^{*j}(\Sigma^{j+1} nv^{*j} - f^{*j+1}) + \eta^j Q^*]. \tag{2.13}$$

把对于热中子羣的扩散方程併到方程系(2.11)中，得到下列多羣共軛方程系:

$$\nabla D^j \nabla nv^{*j-1} - \Sigma^j nv^{*j-1} = -f^{*j} \quad (j = m+1, m, \cdots, 1), \tag{2.14}$$

式中 $nv^{*m+1} = \Phi^*$,而量 D^j, Σ^j 和 f^{*j} 在表 6 中列出.

表 6

j	nv^{*j-1}	D^j	Σ^j	f^{*j}
$(m+1)$	Φ^*	D_T	Σ_{CT}	$\Sigma_{fT} Q^*$
$(m)-(1)$	nv^{*j-1}	D^j	$\frac{1}{A^{*j}}$	$\frac{1}{A^{*j}}[p^j nv^{*j} + B^{*j}(\Sigma^{j+1} nv^{*j} - f^{*j+1}) + \eta^j Q^*]$

留下的就是討論应用內插公式III的多羣共軛方程系. 这时,可得到下列形式的方程:

$$\nabla D^{i+1}\nabla nv^{*i} + \Sigma^{i+1} nv^{*i} = f^{*i}, \tag{2.15}$$

式中

$$\Sigma^{i+1} = \frac{p^i}{B^{*i}}, \quad f^{*i} = \frac{1}{B^{*i}} nv^{*i-1} - \frac{\eta^i}{B^{*i}} Q^*. \tag{2.16}$$

从方程(2.15)解出 nv^{*i-1}:

$$nv^{*i-1} = B^{*i}(\nabla D^{i+1}\nabla nv^{*i} + \Sigma^{i+1} nv^{*i}) + \eta^i Q^* \quad (j = m, m-1, \cdots, 1). \tag{2.17}$$

函数 Φ^* 的方程也要併入方程系(2.17).

現在回过来計算函数 $Q^*(\mathbf{r})$. 为此討論表式

$$Q^* = v_f \int_{-\infty}^{u_T} \chi(u) nv^* du, \tag{2.18}$$

它表示成求和的形式

$$Q^* = v_f \sum_{j=1}^{m} \int_{u_{j-1}}^{u_j} \chi(u) nv^* du. \tag{2.19}$$

为了求出表式(2.19)右边部分的积分,我們要获得在区間(u_{j-1}, u_j)中,函数 nv^* 的內插公式.

类似于在前一节中計算函数 $Q(\mathbf{r})$ 时所曾做过的那样,可以得到相应的公式.

于是,从表式(2.5)出发, 并考慮到用来表示积分的內插公式 I—Ⅲ,不难得到,

$$nv^* = p^{*i}(u) nv^{*i} + A^{*i}(u)\nabla D^i \nabla nv^{*i-1} + B^{*i}(u)\nabla D^{i+1}\nabla nv^{*i} + \eta^i(u) Q^* \tag{2.20}$$

(函数 $A^{*i}(u)$ 和 $B^{*i}(u)$ 在表 7 中列出).

表 7

公 式	$A^{*i}(u)$	$B^{*i}(u)$
I	$\frac{1}{D^i}\int_u^{u_j} \frac{D}{\xi\Sigma_s} \frac{p^{*i}(u)}{p^{*i}(u')} du'$	0
Ⅱ	$\frac{1}{D^i}\int_u^{u_j} \frac{D}{\xi\Sigma_s} \frac{p^{*i}(u)}{p^{*i}(u')} \frac{u_j - u'}{\Delta u_j} du'$	$\frac{1}{D^{i+1}}\int_u^{u_j} \frac{D}{\xi\Sigma_s} \frac{p^{*i}(u)}{p^{*i}(u')} \frac{u' - u_{j-1}}{\Delta u_j} du'$
Ⅲ	0	$\frac{1}{D^{i+1}}\int_u^{u_j} \frac{D}{\xi\Sigma_s} \frac{p^{*i}(u)}{p^{*i}(u')} du'$