2004年上海大学博士学位论文 47

孤子方程的新解

作 者：邓淑芳
专 业：计算数学
导 师：陈登远
张大军

上海大学出版社
·上海·

2004年上海大学博士学位论文

孤子方程的新解

作　者：邓淑芳
专　业：计算数学
导　师：陈登远
　　　　张大军

上海大学出版社
·上　海·

Shanghai University Doctoral Dissertation (2004)

The Novel Multisoliton Solutions for Some Solilton Equations

Candidate: Deng Shu-fang

Major: Computational Mathematics

Supervisors: Prof. Chen Dengyuan

Prof. Zhang Da-jun

Shanghai University Press

• Shanghai •

上 海 大 学

本论文经答辩委员会全体委员审查，确认符合上海大学博士学位论文质量要求。

答辩委员会名单：

主任：	楼森岳	教授，上海交通大学物理系	200030
委员：	范恩贵	教授，复旦大学数学所	200433
	李志斌	教授，华东师范大学数学系	200062
	马和平	教授，上海大学数学系	200444
	茅德康	教授，上海大学数学系	200444
导师：	陈登远	教授，上海大学数学系	200444
	张大军	教授，上海大学数学系	200444

评阅人名单:

李翊神	教授，中国科技大学数学系	230026
耿献国	教授，郑州大学数学系	450052
胡星标	教授，中科院数学院计算数学所	100080

评议人名单:

曾云波	教授，清华大学数学系	100084
张友金	教授，清华大学数学系	100084
盛万成	教授，上海大学数学系	200444
许梦杰	教授，上海大学数学系	200444

答辩委员会对论文的评语

孤子系统的可积性及精确求解是非线性科学的重要内容之一。邓淑芳同学的博士学位论文，以非线性发展方程的精确求解为主要研究内容，选题具有前沿性。对于一些经典的孤子求解方法包括Hirota方法，Wronskian技巧及Backlund变换方法做了一些实质性的系统推广。论文主要用上述推广后的方法研究了一系列的孤子系统，涉及KdV方程，非线性Schrodinger方程，Toda链，KP及具自容源KP方程等，获得了具有物理意义的新解。本文的结果系统完整和深入，论文有创新。

答辩委员会认为作者具有扎实的理论基础，娴熟的计算能力以及综合的分析问题和解决问题的能力，有较强的独立科研能力。本文是一篇优秀的博士学位论文。

答辩委员会表决结果

经答辩委员会表决，全票同意通过邓淑芳同学的博士学位论文答辩，建议授予理学博士学位。

答辩委员会主席：楼森岳

2004 年 3 月 11 日

摘 要

本文利用 Hirota 方法、 Wronskian 技巧和 Bäcklund 变换研究了一些等谱、非等谱与具自容源孤子方程的多孤子解. 在第二章中通过新的双线性导数公式，利用 Hirota 方法得到了 KP 方程、非线性自偶网格方程、 Toda 链和非线性 Schrödinger 方程新的单孤子、双孤子解，并猜测出新 N 孤子解的表达式，特别由这些新解可导出原经典解. 第三章叙述了 Wronskian 行列式的定义与性质，并以 KP 和 Toda 链方程为例，证明其具有 Wronskian 形式的新解. 然后在第四章中由 KP 方程的谱问题与时间发展式导出具自容源 KP 方程，利用 Hirota 截断技术，可得单孤子解、双孤子解、三孤子解等等，并猜测出 N 孤子解的一般表达式. 此外利用 Wronskian 行列式的性质和某些特殊的处理方法，证明了具自容源的 KP 方程具有 Wronskian 形式的解. 通过直接计算证明了由 Hirota 方法猜测的 N 孤子解的表达式与 Wronskian 形式的 N 孤子解是一致的. 类似于第二章的求解过程，利用 Hirota 方法得到了具自容源 KP 方程的新解. 在第五章中我们分别给出了非等谱 KP 和 KdV 方程的双线性形式和双线性 Bäcklund 变换. 利用 Hirota 方法得到了非等谱 KP 和 KdV 方程的多孤子解的表达式. 但是与等谱情形不同的是由 Hirota 方法得到的 f 的表达式与 Wronskian 形式解的表达式 f 在恢复非等谱方程的

N 孤子解时是不一致的. 由非等谱 KP 和 KdV 方程的双线性 Bäcklund 变换出发, 利用 Hirota 方法和 Wronskian 技巧分别得到这些方程解的表达式并讨论了其解的一致性. 需要指出的是在等谱方程 Bäcklund 变换的求解中, 一般是由方程的已知解求出新解, 再以所得的解作为已知解, 求出更新解, 周而复始. 但是在非等谱 KP 方程双线性 Bäcklund 变换中这种规则是不成立的. 把孤子方程的 Bäcklund 变换作一些修正, 利用修正的 Bäcklund 变换, 可以得到孤子方程的新解, 在本文的最后一章中以 KP 方程为例说明了这一点. 在附录中, 我们给出论文中所求出孤子解的相应图形.

本文中利用 Hirota 方法、Wronskian 技巧和双线性 Bäcklund 变换对孤子方程的求解技巧, 可推广到其他孤子方程.

关键词: 孤子方程, Hirota 方法, Wronskian 技巧, Bäcklund 变换, 新解

Abstract

In this paper, we consider the solution of some soliton equations by Hirota method, Wronskian technique and Bäcklund transformation. The novel multisoliton solutions for the KP equation, the nonlinear lumped self-dual network equations, the Toda lattice and the nonlinear Schrödinger equation are derived by using Hirota direct method. The KP equation and the Toda lattice have also solutions in the new Wronskian form. In addition, taking the KP equation as an example we also show the novel solutions obtained by Bäcklund transformation are coincidence with the novel solution obtained through Hirota method. The above three methods are easily to be extended to some other soliton equations.

The paper also proposes a KP equation with self-consistent sources from the linear problem of the KP system. One-, two- and even three-soliton solutions are successively constructed through the standard Hirota's approach. On the basis of this, We conjecture further a general formula of N-soliton solution. We also use Wronskian technique to give Wronski determinant solutions. By virtue of some determinantal identities, solution is verified by direct substitution into the bilinear equations of the KP equation

with self-consistent sources. The coincidence of the N-soliton solutions obtained by Hirota method and Wronskian technique is proved. The novel multisoliton solutions for the KP equation with self-consistent sources are also obtained by Hirota method.

Apart from that, the bilinear equation and bilinear Bäcklund transformation for the nonisospectral KP equation and the nonisospectral KdV equation are obtained. Exact solutions are constructed in terms of Wronskian and are verified by direct substitution to the satisfy the bilinear equation and the assiciated Bäcklund transofrmation respectively. These two nonisospectral equations are also solved through the Hirota method. Finally, some figures are presented to show the shape and motion of the soliton solutions for some equations.

Keywords: soliton equations, Hirota method, Wronskian technique, Bäcklund transformation, novel solutions

目　录

第一章 前 言

1.1 引 言

早在 1834 年，英国著名科学家 Scott Russell 偶然观察到了一种奇特的水波 [1]，这种水波在行进的过程中形状与速度并无明显变化. 他在后来的"论波动"一文中称它为孤立波，并认为这种孤立波是流体运动的一个稳定解. 但当时 Russell 并未成功地给出使物理学家信服的数学证明. 直到六十年后的 1895 年，荷兰著名数学家 Korteweg 和他的学生 de Vries 在研究浅水波的运动时提出一个描述一维长波在浅水沟中的传播运动的非线性方程，即著名的 KdV 方程 [2]

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.1.1}$$

并求出形如

$$u(x,t) = \frac{k^2}{2}\operatorname{sech}^2(kx - k^3t + \xi^{(0)})$$

的行波解，其中 $k, \xi^{(0)}$ 为常数. 这一结果为 Russel 的观察提供了完美的理论解释. 然而这种波相互作用时是否稳定？即两个孤立波碰撞后能否变形？这个问题长期没有得到解决.

在 20 世纪 50 年代，著名物理学家 Fermi, Pasta 和 Ulam (FPU)[3] 在研究有固定点的一维非谐振子链的能量分布时，发现经典物理难以解释的现象：随着时间的推移，能量并未像预期的那样均匀分布，而是最终又回到原来的初始分布状态. 1965 年，美国物理学家 Kruskal 和 Zabusky[4] 利用先进的计算机通过数值计算详细研究了 KdV 方程两波相互作用的全过程. 经过对作用前后所得的数据进行分析后发现孤波的形状和速度保持不变而且具有弹性散射的性质. 他们把这些特殊的波称为"孤立子". Kruskal 和 Zabusky 的这项研究工作，是孤立子理论发展史中的一个重要里程碑，他们所揭示的孤立波的本质，已被普遍的接受. 从此一个研究非线性发展方程与孤立子的热潮在学术界蓬勃地开展起来.

1.2 孤子方程的求解

孤立子理论从各个角度研究了孤立子方程以及方程所涉及的数学内容，其中重要的一个方面就是如何求解孤立子方程以及讨论解的性质. 因此，寻求精确解的方法一直是孤立子方程研究中的前沿问题. 目前已经有许多成功的方法，如反散射变换方法、Bäcklund 变换方法、Hirota 方法、Darboux 变换方法、Wronskain 技巧等等，每一种方法都产生了很丰富的数学理论.

1967 年，Gardner, Greene, Kruskal 和 Miura(GGKM) 对 KdV 方程做了深入的研究，并得到一系列的结果 [5–10]. 他们首先对

KdV 方程 (1.1) 作 Miura 变换 $u = -(v_x + v^2)$ 得到 mKdV 方程

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0, \tag{1.2.1}$$

再在 Miura 变换中令 $v = \psi_x/\psi$ 并通过 Galileo 不变性引入谱参数得到一维定态的 Schrödinger 方程

$$\psi_{xx} + u(x,t) = \lambda\psi. \tag{1.2.2}$$

如果方程 (1.2.2) 的势函数 $u(x,t)$ 按照 KdV 方程 (1.1.1) 随时间 t 演化，那么谱参数 λ 就与时间无关的，并且波函数 ψ 随时间的演化满足方程

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(\lambda - u)\psi_x = 0. \tag{1.2.3}$$

于是由量子力学中的 Schrödinger 方程的正散射方法得到 $t = 0$ 时刻的势函数 u 的散射数据，再通过 (1.2.3) 构造出散射数据随时间演化的常微分方程组，解得 t 时刻的散射数据，由此还原出 Schrödinger 方程的势函数，即 KdV 方程的解，这就是著名的反散射变换方法. 此外他们还发现 KdV 方程具有无穷多个守恒律，存在任意多的孤子解，这些工作奠定了非线性 Fourier 分析的基础.

反散射方法已被广泛的应用到一系列的非线性发展方程中，例如：mKdV、非线性 Schrödinger 和 sine-Gordon 等方程 [11–18]. 这一方法有其严格的物理背景和数学严谨性 [5, 10]，而且可以求出与同一谱问题相联系的整个等谱发展方程族的多孤子解. 一般说来，如果给定谱问题的位势，求此谱问题的本征函数及所对应的

离散谱, 连续谱等散射数据称为正散射, 反之给定散射数据, 要求恢复谱问题的位势称为反散射问题. 它的主要步骤是先从与方程相联系的线性问题出发, 将所求的位势归结为 Gelfand-Levitan-Marchenko (GLM) 线性积分方程, 并建立散射数据与时间的关系; 然后由 GLM 积分方程的解来获得初值问题的解. 反散射方法利用了大量的分析技巧和算子谱理论分析的有关知识 [17,18]. 它是传统的 Fourier 分析的思想在解决非线性问题的推广.

Bäcklund 变换也是一种求解的方法. 1883 年, 几何学家 Bäcklund 在研究负常曲率曲面时, 发现 sine-Gordon 方程的一个有趣的性质 [19], 即由 sine-Gordon 方程的一解 u 通过变换得到另一解 u'. L. P. Eisenhart 在他于 1909 年发表的著作《曲线与曲面的微分几何教程》中介绍了 Bäcklund的工作, 并将其放在重要位置, 他把 sine-Gordon 方程解之间的这种变换称为 Bäcklund 变换 [20]. 随着孤子理论的发展, Bäcklund 变换愈来愈受到重视, 并且不限于 sine-Gordon 方程, 人们发现其他孤子方程也有类似的变换, 统称之为 Bäcklund 变换, 从此 Bäcklund 变换就成为求非线性方程解的重要方法.

利用 Bäcklund 变换, 可从孤子方程的已知解出发求出新的孤子解, 并可进一步以新解作为已知解, 求出更新的解, 周而复始, 即可生成方程一系列的解. 人们逐渐发现存在一些方法构造非线性偏微分方程的 Bäcklund变换, 而且所得 Bäcklund变换的形式是完全不同的. 直接从两个解 u 与 u' 满足的偏微分方程出发, 消去这些解的高阶导数所得的 u 与 u' 的微分方程组称为 Wahlquist-