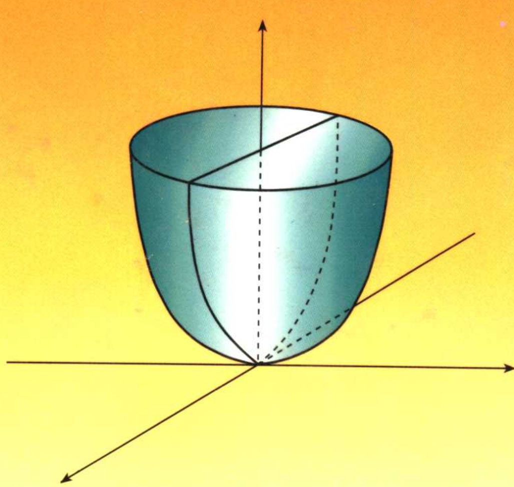
财经与管理等专业
教学与自学参考书

微积分

自学与考试参考题集
（附解答）

褚永增 主编
赵树嫄 胡显佑 主审



中国人民大学出版社

财经与管理等专业教学与自学参考书

微积分

自学与考试参考题集

（附解答）

褚永增　主编

赵树嫄　胡显佑　主审

中国人民大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分自学与考试参考题集/褚永增主编.
北京:中国人民大学出版社,1999
财经与管理等专业教学与自学参考书

ISBN 7-300-01579-4/O·29
Ⅰ.微…
Ⅱ.褚…
Ⅲ.微积分-高等教育-自学考试-习题
Ⅳ.0172—44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 53174 号

财经与管理等专业教学与自学参考书

微积分自学与考试参考题集
(附解答)

褚永增　主编
赵树嫄　胡显佑　主审

出版发行:中国人民大学出版社
(北京海淀路 157 号　邮编 100080)
发行部:62514146　门市部:62511369
总编室:62511242　出版部:62511239
E-mail:rendafx@263.net
经　销:新华书店
印　刷:中国煤田地质总局制图印刷中心

开本:850×1168 毫米 1/32　印张:9.625
1999 年 11 月第 1 版　1999 年 11 月第 1 次印刷
字数:238 000　印数:1-10 000

定价:13.00 元
(图书出现印装问题,本社负责调换)

前　言

由赵树嫄教授主编的《经济应用数学基础》，自 1981 年出版后，多年来发行量经久不衰，深受广大读者欢迎。该教材被广泛应用于本科教学及高等教育自学考试的教学与辅导，且近几年来需求量又有较大幅度的上升。人大出版社与该书作者不断收到各地读者的来信，要求出版与该教材配套的辅导书，以帮助读者充分理解基本概念和基本理论，学会和掌握各种计算方法和解题的技巧。应读者的要求，1997 年仍由赵树嫄教授担任主编，组织几位具有丰富教学经验的资深教授执笔，编写了微积分、线性代数和概率论与数理统计的学习与考试指导，出版后又受到了读者的一致好评，特别是该书中重要概念与定理的析疑和总结，结合多年教学实践的经验，对学生学习中的难点与疑点进行分析、讲解，以便读者对重要的概念、方法以及疑难问题理解、掌握得更深、更透，同时对规律性的内容加以总结，使之对知识的条理性和内在联系能够更加准确地把握。

实践表明，一些数学概念与方法的掌握以一定的习题数量为基础，为此，有必要出一本高质量的习题集，帮助读者在茫茫的题海中把握方向，有效地提高读者对知识点的掌握程度，并取得事半功倍的学习效果。应读者的要求，我们组织了部分有丰富教学经验与命题经验的教师编写了微积分与线性代数的参考题集，作为教学与学习的配套用书。

在编写过程中，我们从大量题目中精选出 600 题。特别是得

到了赵树嫄、胡显佑两位教授的指导与帮助，更加保证了本书的质量及题目的适宜性和精品性。

本参考题集中的题型按现行考试的要求设计，按内容分为10章，各章中的题目按照知识点的顺序排列，其中第十章为综合题。习题中有一定数量的基本训练题，同时有一些是有一定难度的提高题，在这些习题的序号前我们均打上了“*”号。本书可供财经、管理等专业的在校生及参加高等教育自学考试的学员使用，习题难度及类型的选择适宜参加高等教育自学考试学员应试的要求与需要，对其中打“*”的题目，学员可以选做。本书还可以供报考经济类的硕士生准备入学考试时复习参考。

参加本书编写的有褚永增、周邦珞、吴岚、肖淳、姜华。由褚永增任主编，赵树嫄、胡显佑主审。

因限于水平，错误与疏漏之处在所难免，不妥之处，敬请读者批评指正。

编 者

1999年6月

目　录

第一章　函数 1
一、函数概念、函数定义域 1
二、函数性质 8
三、反函数、复合函数 15
第二章　极限与连续 25
一、极限概念、无穷大量与无穷小量 25
二、求极限 30
三、两个重要极限 39
四、函数连续性 47
第三章　导数与微分 54
一、导数概念、导数几何意义 54
二、函数的连续性与可导性 61
三、求导数 68
四、微分 76
第四章　中值定理、导数应用 79
一、中值定理 79
二、罗必塔法则 84
三、函数的增减与极值 95
四、曲线的拐点 102
五、曲线的渐近线、函数作图 109
六、应用问题 115

第五章　不定积分……………………………………… 122
一、不定积分的概念与性质、基本积分…………… 122
二、换元积分……………………………………… 129
三、分部积分……………………………………… 136
四、有理分式函数积分…………………………… 141
第六章　定积分……………………………………… 144
一、定积分的概念和性质………………………… 144
二、牛顿-莱不尼兹公式 ………………………… 147
三、变上限定积分………………………………… 152
四、定积分的换元积分法………………………… 158
五、定积分的分部积分法………………………… 165
六、定积分的应用………………………………… 171
七、广义积分……………………………………… 180
第七章　无穷级数…………………………………… 185
一、无穷级数的概念及性质……………………… 185
二、正项级数的收敛性…………………………… 193
三、任意项级数的收敛性………………………… 198
四、幂级数………………………………………… 205
五、某些初等函数的幂级数展开式……………… 210
第八章　多元函数…………………………………… 217
一、空间直角坐标系……………………………… 217
二、二元函数……………………………………… 219
三、偏导数、隐函数微分法和复合函数
微分法………………………………………… 223
四、二元函数的极值……………………………… 234
五、二重积分……………………………………… 242
第九章　微分方程与差分方程……………………… 260
一、微分方程及其解的概念……………………… 260

二、一阶微分方程…………………………………………… 263
三、其他……………………………………………………… 271
第十章　综合题……………………………………………… 275

第一章　函　数

一、函数概念、函数定义域

（一）选择题

1. 如果集合 A 和 B 满足 $A \cup B = B$，那么 A 与 B 的关系必是（　　）.

(A) $A = B$　　(B) $A = \varnothing$

(C) $A \subset B$　　(D) $A \subseteq B$

【解】 $A = B, A = \varnothing, A \subset B$ 都是 $A \cup B = B$ 的充分条件，不是必要条件.

故本题应选(D).

2. 若 $f(x-a) = x(x-a)$（a 为大于零的常数），则 $f(x) =$（　　）.

(A) $x(x-a)$　　(B) $x(x+a)$

(C) $(x-a)(x+a)$　　(D) $(x-a)^2$

【解】 设 $x - a = t$，则 $x = a + t$，那么有

$$f(t) = (a+t)(a+t-a) = t(a+t)$$

即　$f(x) = x(a+x)$

故本题应选(B).

3. 下列函数中，与函数$f(x)=\begin{cases}\ln(x-1) & x>1\\ \ln(1-x) & x<1\end{cases}$不是相同函数的是(　　).

(A)$\ln^2(1-x)$　　　　(B)$\ln|1-x|$

(C) $\frac{1}{2}\ln(x-1)^2$　　　　(D)$\ln\sqrt{(x-1)^2}$

【解】 $f(x)$ 的定义域为$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

(A) 中函数定义域为$(-\infty,1)$，故(A) 中函数与 $f(x)$ 不是同一函数.

故本题应选(A).

4. 已知函数$f(x)$的定义域为$[0,1]$，那么$f(x+a)$的定义域为(　　).

(A)$[0,1]$　　　　(B)$[0,a]$

(C)$[a,1+a]$　　　　(D)$[-a,1-a]$

【解】 因$f(x)$的定义域为$[0,1]$，所以函数$f(x+a)$的定义域满足$0\leqslant x+a\leqslant 1$，即$-a\leqslant x\leqslant 1-a$.

故本题应选(D).

5. 设$f(x)$的定义域是$[0,1]$，则函数$g(x)=f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$的定义域为(　　).

(A)$[0,1]$　　　　(B)$[\frac{1}{4},\frac{5}{4}]$

(C)$[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$　　　　(D)$[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$

【解】 因$f(x)$的定义域是$[0,1]$，则

$$0\leqslant x+\frac{1}{4}\leqslant 1 \text{ 且 } 0\leqslant x-\frac{1}{4}\leqslant 1$$

由此得　$-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}$ 且 $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5}{4}$

所以 $f(x+\frac{1}{4})+f(x-\frac{1}{4})$ 的定义域为

$$[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}]\cap[\frac{1}{4},\frac{5}{4}]=[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$$

故本题应选(D).

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，则函数 $f(x)+f(x^2)$ 的定义域为(　　).

(A) $[1,2]$　　(B) $[1,\sqrt{2}]$

(C) $[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$　　(D) $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$

【解】 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[1,2]$，那么 $f(x^2)$ 的定义域满足 $1\leqslant x^2\leqslant 2$，即 $1\leqslant |x|\leqslant\sqrt{2}$，也就是 $[-\sqrt{2},-1]\cup[1,\sqrt{2}]$，$f(x)$ 与 $f(x^2)$ 定义域的交集为 $[1,\sqrt{2}]$.

所以函数 $f(x)+f(x^2)$ 的定义域为 $[1,\sqrt{2}]$.

故本题应选(B).

*7. 设 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{3-x}}+\lg(x-2)$，那么 $f(x+a)+f(x-a)$　$(0<a<\frac{1}{2})$ 的定义域为(　　).

(A) $(2-a,3-a)$　　(B) $(2+a,3+a)$

(C) $(2+a,3-a)$　　(D) $(2-a,3+a)$

【解】 $f(x)$ 的定义域，要求

$$\begin{cases}3-x>0\\x-2>0\end{cases}$$

即 $2<x<3$，所以 $D(f)=(2,3)$.

$f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域满足

$$\begin{cases}2<x+a<3\\2<x-a<3\end{cases}，即\ 2+a<x<3-a$$

所以 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为

$$(2+a, 3-a) \quad (0 < a < \frac{1}{2})$$

故本题应选(C).

(二) 填空题

8. 函数 $f(x) = 3x - |2x-1|$ 化为分段函数表达式为________.

【解】 $f(x) = 3x - |2x-1|$

$$= \begin{cases} 3x + (2x-1) & x < \frac{1}{2} \\ 3x - (2x-1) & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 5x - 1 & x < \frac{1}{2} \\ x + 1 & x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

9. 已知 $f(x) + f(y) = f(z)$，如果 $f(x) = \frac{1}{x}$，则 $z =$ ________.

【解】 因为 $f(x) + f(y) = f(z), f(x) = \frac{1}{x}$，所以

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}，即\frac{x+y}{xy} = \frac{1}{z}.$$

于是有 $z = \frac{xy}{x+y}$.

10. 若函数 $f(x)$ 的定义域是(1,2)，则函数 $f(x^2+1)$ 的定义域是________.

【解】 $f(x)$ 的定义域是(1,2)，即 $1 < x < 2$，所以 $f(x^2+1)$ 的定义域满足 $1 < x^2 + 1 < 2$，即 $0 < x^2 < 1$，$-1 < x < 1$ 且 $x \neq 0$.

故 $f(x^2+1)$ 的定义域为 $(-1,0) \cup (0,1)$.

11. 设 $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$，$f[\varphi(x)] = x - 1$，则 $\varphi(x)$ 的定义域

为________.

【解】 $f[\varphi(x)]=e^{-2\varphi(x)}$,故有

$$e^{-2\varphi(x)}=x-1$$

$$-2\varphi(x)=\ln(x-1)$$

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\ln(x-1)$$

由此可得,$\varphi(x)$ 的定义域为 $x>1$,即$(1,+\infty)$.

12. 函数 $y=\ln[\ln(\ln x)]$ 的定义域是________.

【解】 由 $\ln(\ln x)>0$,得 $\ln x>1$,即 $x>e$.

所以 $y=\ln[\ln(\ln x)]$ 的定义域为$(e,+\infty)$.

（三）计算题

13. 将满足不等式 $0<(x-1)^2\leqslant 4$ 中 x 的变化范围,用区间符号表示.

【解】 由$(x-1)^2\leqslant 4$,有 $|x-1|\leqslant 2$,即 $-2\leqslant x-1\leqslant 2$,

那么 $-1\leqslant x\leqslant 3$.

再由$(x-1)^2>0$,有 $x\neq 1$.

故可求得不等式的解为

$-1\leqslant x<1$ 与 $1<x\leqslant 3$

用区间表示为 $x\in[-1,1)\cup(1,3]$.

14. 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}+\lg[\lg(x-1)]$ 的定义域.

【解】 由 $x-1>0$,得 $x>1$.

由$\begin{cases}\lg(x-1)>0\\ x-1>0\end{cases}$,得 $x-1>1$,即 $x>2$.

所以所求的定义域为$(2,+\infty)$.

15. 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$ 的定义域.

【解】 由$\begin{cases}x+2\geqslant 0\\ |x|-x\neq 0\end{cases}$,得$\begin{cases}x\geqslant -2\\ x<0\end{cases}$

所以所求函数的定义域为$[-2,0)$.

$*$ 16. 求 $y=2^{\frac{1}{x}}+\arcsin[\ln(1-x)]$ 的定义域.

【解】 对于 $2^{\frac{1}{x}}$,要求 $x\neq 0$;

对于 $\arcsin[\ln(1-x)]$,要求 $|\ln(1-x)|\leqslant 1$,以及$(1-x)>0$.

解不等式组 $\begin{cases}-1\leqslant \ln(1-x)\leqslant 1\\ 1-x>0\end{cases}$,得

$$1-\mathrm{e}\leqslant x\leqslant 1-\mathrm{e}^{-1}$$

所以所给函数的定义域为$[1-\mathrm{e},0)\cup(0,1-\mathrm{e}^{-1}]$.

(四)证明题

17. 设 $f(x)=x^3+x^2+x+1$,证明 $x^3f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$.

【证】 $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1$

$$\begin{aligned}x^3f\left(\frac{1}{x}\right)&=x^3\left(\frac{1+x+x^2+x^3}{x^3}\right)\\&=1+x+x^2+x^3\\&=f(x)\end{aligned}$$

(五)应用题

18. 某商品价格与需求量的关系为$p=24-2Q$.(其中Q为需求量,p为价格.)试将市场销售总额S表示为商品价格p的函数.

【解】 市场销售总额等于需求量与价格的乘积,即

$$S=Qp,\text{而 } Q=12-\frac{p}{2}$$

所以 $$S=12p-\frac{p^2}{2}$$

19. 某公司全年需购进某商品1 000 台,每台购进价格为3 500元.分若干批进货,每批进货台数相同,一批商品销售完后马上进下一批货,每进货一次需消耗费用1 500 元,商品均匀投放市场(即平均年

库存量为批量的一半)，该商品每年每台库存费为进货价格的5%. 试将公司全年在该商品上的投资总额表示为每批进货量的函数.

【解】 设每批进货为 x 台，总投资为 y 元，则全年进货批数为 $\frac{1\,000}{x}$. 所以

全年进货费用为 $\frac{1\,000}{x}\times 1\,500$ 元

全年库存费用为 $\frac{x}{2}\times 3\,500\times 5\%$

全年商品价款为 $1\,000\times 3\,500$ 元

于是得 $$y = 3\,500\,000+\frac{175}{2}x+\frac{1\,500\,000}{x}$$

20. 如图1—1，把一个半径为2的圆形铁片，自中心处剪去中心角为 θ 的一扇形后围成一无底圆锥，试将此圆锥的体积表示为 θ 的函数.

【解】 由圆锥的做法知：圆锥的底面周长 $l=2(2\pi-\theta)$

因此圆锥的底面半径为

$$r=\frac{2(2\pi-\theta)}{2\pi}=\frac{2\pi-\theta}{\pi}$$

又因圆锥的高(如图 1 — 2)

$$h=\sqrt{2^2-r^2}$$

$$=\sqrt{4-\left(\frac{2\pi-\theta}{\pi}\right)^2}=\frac{\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}}{\pi}$$

所以圆锥的体积

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(\frac{2\pi-\theta}{\pi}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}}{\pi}$$

$$=\frac{(2\pi-\theta)^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}}{3\pi^2}$$

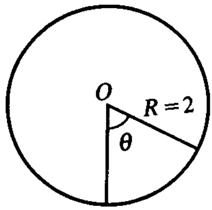


图 1—1

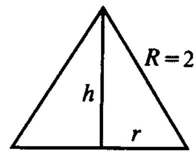


图 1 2

21. 在底 $AC=b$,高 $BD=h$ 的三角形 ABC 中,内接一个高 $NM=x$ 的矩形 $EFMN$,如图 1—3 所示,试将矩形 $EFMN$ 的周长 p 及其面积 S 表示为 x 的函数.

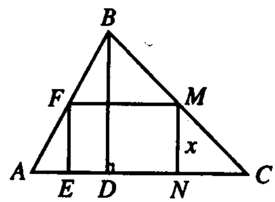


图 1—3

【解】 $\dfrac{FM}{AC}=\dfrac{BD-MN}{BD}$

所以 $FM=b(1-\dfrac{x}{h})$

$$p=2FM+2MN$$

$$=2b(1-\frac{x}{h})+2x$$

$$=2(1-\frac{b}{h})x+2b$$

$$S=FM\cdot MN=b(1-\frac{x}{h})x.$$

二、函数性质

(一) 选择题

1. 设函数 $f(x)=2^{\cos x}$,$g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin x}$,那么在区间$(0,\dfrac{\pi}{2})$

内(　　).

(A)$f(x)$ 是增函数,$g(x)$ 是减函数

(B)$f(x)$ 是减函数,$g(x)$ 是增函数

(C)$f(x)$,$g(x)$ 都是增函数

(D)$f(x)$,$g(x)$ 都是减函数

【解】 在$(0,\frac{\pi}{2})$内 2^x 是增函数,而 $\cos x$ 是减函数,故 $2^{\cos x}$ 是减函数.

$(\frac{1}{2})^x$ 是减函数,而 $\sin x$ 是增函数,故$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x}$ 是减函数.

故本题应选(D).

2. 下列函数中奇函数是(　　).

(A)$|x|-x$　　(B)$\lg\frac{x+5}{x-5}$

(C)e^x+e^{-x}　　(D)$x\cos x$

【解】 (A) 设 $f(x)=|x|-x$

则 $f(-x)=|-x|-(-x)=|x|+x\neq -f(x)$

(B) 设 $f(x)=\lg\frac{x+5}{x-5}$

则 $f(-x)=\lg\frac{-x+5}{-x-5}\neq -f(x)$

(C) 设 $f(x)=e^x+e^{-x}$

则 $f(-x)=e^{-x}+e^x=f(x)\neq -f(x)$

(D) 设 $f(x)=x\cos x$

则 $f(-x)=-x\cos(-x)=-x\cos x=-f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

故本题应选(D).

3. 函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内有意义,下列函数中必为偶函数的是(　　).

(A)$y=f^2(x)$　　(B)$y=x^2f(x)$