全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数

学习指导与习题精解

第二版

毕守东 主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

线性代数学习指导与习题精解

第二版

毕守东 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习指导与习题精解/毕守东主编．—2版．—北京：中国农业出版社，2011.1
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 978-7-109-15306-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①毕… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2010）第 251748 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
策划编辑 朱 雷
文字编辑 魏明龙

北京通州皇家印刷厂印刷　新华书店北京发行所发行
2008 年 1 月第 1 版　2011 年 2 月第 2 版
2011 年 7 月第 2 版北京第 2 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16　印张：15
字数：264 千字
定价：24.00 元

第二版前言

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，本次修订基于下列考虑：(1) 结合教育部高等农林院校基础课程教学指导分委员会讨论的线性代数教学基本要求，对原书的内容及其重点、难点作了一些调整，删除了原来部分较难的题目，增添了少量基本题；(2) 对本书体系作了适当变动，由原来的五章改为六章，修订后六章的顺序分别为行列式、矩阵及其运算、线性方程组、向量组的线性相关性、特征值、特征向量及矩阵的对角化以及二次型，使之与中国农业出版社出版的全国高等农林院校“十一五”规划教材《线性代数》（毕守东主编）相配套；(3) 重新编写了书后的五套综合测试题。

本次修订由毕守东定稿。参加修订工作的有安徽农业大学的毕守东、徐丽、刘爱国、王凯、陈德玲、章林忠、张成堂、吴元翠和程娴，并增加王凯作为副主编。

编　者

2010 年 10 月

第一版前言

线性代数是高等学校理、工、农及经济管理等各专业大学生的必修课程。由于线性代数课程受课内学时的限制，只能讲述这门学科最基本的理论和方法，因此，初学者要想弄懂这些抽象的理论比较困难，更不易掌握这些概念与理论的内在规律性，学生们普遍感到不能灵活地运用基本理论和方法推证与计算变化万千的线性代数问题。

为了帮助初学者理顺思路、抓住重点，系统地掌握线性代数的主要内容，我们编写了本书。全书共五章，包括矩阵，行列式，向量组的线性相关性，线性方程组，相似矩阵及二次型。每章由基本要求、内容提要、例题解析和自测题四部分组成。基本要求部分指出了本章应理解和重点掌握的知识要点；内容提要部分归纳和简述了本章的基本概念、基本定理和基本方法及其内在的联系和规律性，并指出应注意的问题；例题解析部分精选了一定数量的典型题目，这部分是每章的重点，对于这些重点例题不仅给出了题前的分析，而且给出了题后的注释，以启发和引导读者对问题进行深入思考，期望达到举一反三的效果；自测题部分用于读者自我检测，我们列举了300多道习题，并都给出了详细解答，这些习题难度深浅各异，理论与计算均有，覆盖内容全面，有很好的参考价值。在本书最后，给出了五套综合测试题，以全面检测读者对本门课程的掌握程度。

本书由毕守东教授任主编，徐丽、刘爱国副教授任副主编，参加编写的还有吴怀孔副教授和陈德玲老师。

本书是全国高等农林院校“十一五”规划教材，其出版得到了安徽农业大学教务处、理学院和中国农业出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢。限于编者水平有限，错漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2007 年 11 月

目　录

第1章　行列式

1.1　基本要求

1. 知道行列式的定义和几个常见的特殊行列式．
2. 掌握行列式的性质、熟练掌握行列式的计算．
3. 会用克莱姆(Cramer)法则求解方程组和讨论方程组的解．

1.2　内容提要

1.2.1　行列式的定义及几个常见的特殊行列式

1. 二阶、三阶行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

称为一个二阶行列式．

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

称为一个三阶行列式．

2. n 阶行列式的定义

定义　n^2 个数 a_{ij}（i，$j=1$，2，…，n），称

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式，它表示数值

$$\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 1，2，…，n 的一个排列，$\tau=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$为这个排列

的逆序数，$\sum$ 表示对 1，2，…，n 的所有排列求和，这个和式中共有 $n!$ 项.

n 阶行列式 D 亦可定义为 $D=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$，其中 $\tau(q_1q_2\cdots q_n)$ 为行标排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数.

注 无论采用哪种定义，其本质是一样的，可以这样理解：n 阶行列式是一个数，等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素 a_{1p_1}，a_{2p_2}，…，a_{np_n} 乘积的代数和，共有 $n!$ 项；而每一项的正负号取决于组成该项的 n 个元素的列(行)下标排列的逆序数，即当 $p_1p_2\cdots p_n$(或 $q_1q_2\cdots q_n$)是偶排列时取正号，当 $p_1p_2\cdots p_n$(或 $q_1q_2\cdots q_n$)是奇排列时取负号.

3. 几个常见的特殊行列式

(1) 上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 次上三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & \\ \vdots & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

次下三角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & ⋰ & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1};$$

次对角行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

(3) 范德蒙(Vandermonde)行列式

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

1.2.2 行列式的性质及展开法则

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

此性质说明在行列式中行和列的地位是同等的，即对行成立的性质对列也成立.

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式改变符号.

推论 若行列式中两行(列)对应元素完全相同，则此行列式为零.

性质 3 行列式中某一行(列)元素的公因子可以提到行列式的外面.

此性质反过来即为：用某数乘以行列式等于用该数乘以行列式的某一行(列)的所有元素.

推论 1 若行列式某一行(列)的元素全为零，则该行列式为零.

推论 2 若行列式某两行(列)对应元素成比例，则该行列式为零.

性质 4 若行列式的某一行(列)的每一个元素都可表示为两数的和，则该行列式可以表示为两个行列式之和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 5 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一个数再加到另一行(列)对应的元素上去，行列式的值不变.

性质 6(Laplace 展开法则) 行列式等于它的任意一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或 $$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

推论 行列式任意一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0 \quad (i \neq j)$$

或 $$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0 \quad (i \neq j).$$

性质 6 及其推论可写成:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D_n, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad 或 \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \begin{cases} D_n, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

1.2.3 行列式的计算方法

行列式的计算是本章的重点，主要方法有:

1. 利用行列式的定义.
2. 利用行列式的性质化为三角行列式.
3. 利用行列式的性质作恒等变形化简，使行列式中出现尽量多的零元素，然后按零元素最多的行(列)展开.
4. 拆行列式为几个行列式的和.
5. 递推公式法.
6. 数学归纳法.
7. 应用范德蒙行列式.
8. 升阶法(加边法).

行列式的计算方法很多，技巧性较强，要想熟练掌握，必须多加练习，不断总结、积累. 练习时，首先要分析所求行列式的特点，元素的规律性，针对其特征，选用适当的方法.

1.2.4 克莱姆(Cramer)法则

定理(克莱姆法则) **如果线性方程组**

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么此线性方程组就有唯一一组解，而且这时解可以通过系数表示成：

$$x_j=\frac{D_j}{D},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 的第 j 列换成常数项 b_1，b_2，…，b_n 后所成的行列式.

推论　如果齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数行列式 $D\neq0$，则它只有零解.

换句话说，如果齐次线性方程组有非零解，那么必有 $D=0$.

克莱姆法则给出了方程个数和变量个数相等时方程组解的有关结论．显然，当变量个数较多时用克莱姆法则求解时，因需要求多个高阶行列式而计算量太大，因此克莱姆法则的使用有着很大的局限性，但这并不影响其重要性和理论价值．又当系数矩阵行列式为零时或方程个数和变量个数不等时，克莱姆法则无法使用，因此一般线性方程组的讨论将在第3、4章作进一步介绍．

1.3 例题解析

例 1.1　下列各项中，属于五阶行列式的展开式中的项的为(　　).

(A) $a_{42}a_{53}a_{34}a_{12}a_{25}$；　(B) $a_{12}a_{41}a_{35}a_{53}a_{24}$；

(C) $-a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$；　(D) $a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}$.

解　根据行列式的特点，逐项去检验：

(A) 因为 a_{42}，a_{12} 都是取自第2列，所以该项不是五阶行列式的展开式中

的项.

(B) $a_{12}a_{41}a_{35}a_{53}a_{24}=a_{12}a_{24}a_{35}a_{41}a_{53}$，而 $\tau=\tau(24513)=5$，为奇排列，因此该项应带有负号，故此项也不是五阶行列式的展开式中的项.

(C)、(D)只差一个负号．因为 $a_{52}a_{21}a_{34}a_{15}a_{43}=a_{15}a_{21}a_{34}a_{43}a_{52}$，且 $\tau=\tau(51432)=7$，为奇排列，故应选(C).

例 1.2 在函数 $f(x)=\begin{vmatrix} x & 2x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 2 & 3 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$ 中，求 x^4 和 x^3 的系数.

解 由行列式的定义知：仅当 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ 相乘时才会出现 x^4，其逆序数为 $\tau(1234)=0$，故其系数为 $(-1)^{\tau}=1$；仅当 $a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}$ 相乘时才会出现 x^3，其逆序数为 $\tau(2134)=1$，故其系数为 $(-1)^{\tau}\cdot 2=(-1)^1\cdot 2=-2$.

例 1.3 用定义计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

分析 由定义知，n 阶行列式共有 $n!$ 项，每一项的一般形式为 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$．若某一项的乘积中有零因子，则该项等于零．由于本行列式中零元素较多，因而为零的项就较多，故只需找出那些不为零的项就可求得该行列式的值.

解 所给行列式中，第一行元素除了 a_{12}（即 $p_1=2$）以外其余都为零，而第二行元素除了 a_{23}（即 $p_2=3$）以外其余都为零，继续分析第 3 行，第 4 行，…，第 n 行，可知在 $n!$ 项中只有一项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,\,n}a_{n1}$ 不为零，且它的列标排列 $23\cdots n1$ 的逆序数为 $n-1$，于是

$$D_n=(-1)^{n-1}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,\,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}n!.$$

注 若不要求用定义，本题也可利用行列式的性质，把最后一行逐行前移化为对角行列式计算.

例 1.4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

分析 这类元素为具体实数又无规律可循的行列式一般要求掌握到四阶．通常作法是化为上(或下)三角行列式或降阶，为避免计算中出现分数一般要使行列式左上角的元素为1.

解 对调第1行和第4行，得

$$D=-\begin{vmatrix}1&-5&3&3\\-5&1&3&-4\\2&0&1&-1\\3&1&-1&2\end{vmatrix},$$

再把第1行分别乘以5，−2，−3加到第2，3，4行上去，得

$$D=-\begin{vmatrix}1&-5&3&-3\\0&-24&18&-19\\0&10&-5&5\\0&16&-10&11\end{vmatrix},$$

再按第1列展开，得

$$D=-\begin{vmatrix}-24&18&-19\\10&-5&5\\16&-10&11\end{vmatrix},$$

第1列提取2，第2行提取5，得

$$D=-10\begin{vmatrix}-12&18&-19\\1&-1&1\\8&-10&11\end{vmatrix},$$

重复上述作法，得

$$D=-10\begin{vmatrix}0&6&-7\\1&-1&1\\0&-2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}6&-7\\-2&3\end{vmatrix}=40.$$

注 从该题的解题过程我们可以总结出行列式计算的一个基本原则是“零元素越多越好”．对于二、三阶行列式直接按“对角线法则”计算是一种可行的方法，尤其是在零元素较多时显得比较方便．

例 1.5 设 $f(x)=\begin{vmatrix}-x&1&0&0\\0&-x&1&0\\0&0&-x&1\\1&0&0&-x\end{vmatrix}$，求 $f(x)=0$ 的实根．

分析 这是一个以行列式形式给出的多项式 $f(x)$，首先求出行列式 $f(x)$，再解方程．

解 由行列式的性质，按第1列展开

$$f(x)=-x\begin{vmatrix}-x & 1 & 0\\ 0 & -x & 1\\ 0 & 0 & -x\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ x & 1 & 0\\ 0 & -x & 1\end{vmatrix}=x^4-1,$$

那么 $f(x)=x^4-1=0$ 的实根为 $x=\pm 1$.

注 此题行列式的计算中，由于第1列元素已有2个零，所以直接按第1列展开较简便，这种方法在行列式计算中经常使用.

例 1.6 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}x & a & a & \cdots & a\\ a & x & a & \cdots & a\\ a & a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}.$$

分析 此类行列式的特点是各行(列)元素之和相等，故可把每行或每列元素加到第1行(列)上去，提取公因子 $x+(n-1)a$，然后化为上三角行列式.

解
$$D_n=\begin{vmatrix}x+(n-1)a & a & a & \cdots & a\\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a\\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ 1 & x & a & \cdots & a\\ 1 & a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & a & a & \cdots & x\end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)\begin{vmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

注 此类行(列)元素的和相等的行列式计算方法具有普遍性．对于阶数不确定的(n 阶)行列式仔细观察找出其元素排列规律是解题的关键．

例 1.7 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^2 & a^3 & a^4 & \cdots & a \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

分析 通过观察，相临两行元素之间有一定的规律性，从第 2 行开始每行乘 $-a$ 加到上一行上去消零化为下三角行列式.

解 $$D_n=\begin{vmatrix} 1-a^n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-a^n & 0 \\ a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{vmatrix}=(1-a^n)^{n-1}.$$

例 1.8 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

分析 本行列式也称为爪型行列式，由其规律也可化为三角行列式来计算.

解 从第 $j(j=2,3,\cdots,n)$列开始每列乘以$-\dfrac{1}{j}$加到第 1 列，消零化为上三角行列式，得

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{1}{j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}=n!\left(1-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{j}\right).$$