

线性代数

学习指导与解题能力训练

主编 宋新霞 李焱华 相丽驰



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

线性代数

学习指导与解题能力训练

主编 宋新霞 李焱华 相丽驰



中南大学出版社
www.csupress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与解题能力训练/宋新霞,李焱华,相丽驰主编.
—长沙:中南大学出版社,2014.1

ISBN 978-7-5487-1039-4

I. 线... II. ①宋... ②李... ③相... III. 线性代数-高等学校-教学参考资料 IV. O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第019758号

线性代数学习指导与解题能力训练

主编 宋新霞 李焱华 相丽驰

☐责任编辑 刘颖维

☐责任印制 文桂武

☐出版发行 中南大学出版社

社址:长沙市麓山南路

邮编:410083

发行科电话:0731-88876770

传真:0731-88710482

☐印 装 长沙理工大印刷厂

☐开 本 787×1092 1/16 ☐印张 9.75 ☐字数 238 千字

☐版 次 2014年1月第1版 ☐2014年1月第1次印刷

☐书 号 ISBN 978-7-5487-1039-4

☐定 价 26.00 元

图书出现印装问题,请与经销商调换

前言

线性代数是各高校非数学专业重要的基础课程，它不仅是学习其他专业课程的基础，还是整个大学教育的一门基础课程，也是研究生入学考试必考的课程。在线性代数课程的学习中，学生不仅要获取必要的数学知识，为后续专业课打基础；更为重要的是，在获取数学知识的同时，要努力提高自己的抽象思维、逻辑思维、运算技能、综合应用等方面的能力。

目前，线性代数课程课时偏少，而内容较多，进度又快。加之，线性代数课程内容本身具有理论性强、抽象性强、概念多、定理多、计算量大、解题困难的特点，使得学生刚开始学习这门课程时，感到难以理解和接受，做习题时，有时感到无从下手。本书作为教学辅助读本，适合学生课下自主学习，有助于学生对课堂所学内容的理解消化、巩固提高。

本书编写过程中，主要参考了胡金德老师主编的《线性代数学习指导》，吴赣昌老师主编的《线性代数学习辅导与习题解答》和房宏、王学会老师主编的《线性代数习题精解与学习指导》，从中汲取了许多优点。本书包含矩阵、行列式、线性方程组、矩阵特征值与特征向量四章内容。每章从基础知识和主要内容和结论、典型例题和习题训练三个方面引导学生学习，各章最后附有习题参考答案。习题训练分为填空题、选择题、计算题和综合应用题四部分，题目数量多、知识点分布全面，既有基本题型也有综合应用类题型和考研题型，这也是本书的一大特点。本书最后附有近6年考研线性代数部分试题及答案，便于学生参考学习。

本书还可以作为经管类学生学期期末考试的复习资料。参加本书编写的还有吴慧玲、梁媛、鲁立刚、伍宪彬、徐园芬等教师。本书在编写过程中得到了本部门同仁的大力帮助和支持，在此深表谢意！

由于编者的水平有限，书中错误、疏漏之处在所难免，敬请同行们批评指正。

编者

2013年12月

目录

第1章 矩阵	(1)
1.1 基本要求	(1)
1.2 主要内容和结论	(1)
1.2.1 矩阵的定义	(1)
1.2.2 一些特殊的矩阵	(1)
1.2.3 矩阵的运算	(2)
1.2.4 矩阵的逆	(4)
1.2.5 矩阵的初等变换与初等矩阵	(5)
1.2.6 矩阵的秩	(6)
1.2.7 分块矩阵	(7)
1.3 典型例题	(8)
习题	(19)
参考答案	(31)
第2章 行列式	(41)
2.1 基本要求	(41)
2.2 主要内容和结论	(41)
2.2.1 行列式的定义	(41)
2.2.2 特殊行列式	(42)
2.2.3 行列式的性质	(42)
2.2.4 行列式按行按列展开	(43)
2.2.5 克莱姆(Cramer)法则	(44)
2.3 典型例题	(44)
习题	(53)
参考答案	(60)
第3章 线性方程组	(64)
3.1 基本要求	(64)
3.2 主要内容和结论	(64)
3.2.1 n 维向量的概念与运算	(64)
3.2.2 向量的线性关系	(65)
3.2.3 线性方程组	(67)

3.2.4 向量空间基、维数	(69)
3.3 典型例题	(69)
习题	(80)
参考答案	(91)
第 4 章 矩阵的特征值与特征向量	(102)
4.1 基本要求	(102)
4.2 主要内容和结论	(102)
4.2.1 向量的内积、长度、夹角	(102)
4.2.2 特征值与特征向量	(103)
4.2.3 相似矩阵	(104)
4.3 典型例题	(105)
习题	(111)
参考答案	(116)
附录	(125)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题	(125)
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题解析	(126)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题	(130)
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题解析	(132)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题	(135)
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题解析	(136)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题	(138)
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题解析	(139)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题	(141)
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题解析	(143)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题	(145)
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学三线性代数部分试题解析	(146)
参考文献	(149)

第1章 矩阵

1.1 基本要求

1. 理解矩阵有关概念; 掌握矩阵的加、减、数乘的运算; 熟练掌握矩阵乘法的技巧(重点内容).
2. 理解逆矩阵的概念与性质; 掌握逆阵的求法.
3. 了解分块矩阵的有关概念与性质.
4. 熟练地掌握矩阵的初等变换, 并用它把矩阵化为阶梯形矩阵, 行最简形及标准形.
5. 会用初等变换求矩阵的逆和矩阵的秩.
6. 会运用矩阵运算解决一些简单的实际问题.

1.2 主要内容和结论

1.2.1 矩阵的定义

$m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 按照一定的次序排成的 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵, 简称 $m \times n$ 矩阵, 记作 $A_{m \times n}$ 或 $(a_{ij})_{m \times n}$, 其中 a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素.

1.2.2 一些特殊的矩阵

1. 零矩阵: 所有元素都为 0 的矩阵, 记为 O 或 $O_{m \times n}$.

2. 行矩阵: 只有一行的矩阵 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

3. 列矩阵: 只有一列的矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$.

4. 对角矩阵: 主对角线以外的元素均为 0 的矩阵. 若 A 为 n 阶对角矩阵, 其对角元分别为 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$, 则 A 可记为

$$\mathbf{A} = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

5. 单位矩阵: 主对角线上的元素都为 1 的对角矩阵, 若 $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵, 则 $\mathbf{E}$ 可记为

$$\mathbf{E} = \text{diag}(1, 1, \cdots, 1) = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}.$$

6. 数量矩阵: 主对角线上的元素全为非零常数 k 的 n 阶对角矩阵, 记作

$$k\mathbf{E} = \text{diag}(k, k, \cdots, k) = \begin{bmatrix} k & & & 0 \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k \end{bmatrix}.$$

7. 上三角矩阵: 主对角线下方的元素全为零的矩阵, 如 $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

下三角矩阵: 主对角线上方的元素全为零的矩阵, 如 $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

8. 对称矩阵: 若 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$, 则 $\mathbf{A}$ 为对称矩阵.

9. 反对称矩阵: 若 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$, 则 $\mathbf{A}$ 为反对称矩阵.

10. 正交矩阵: $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{E}$.

11. 准对角矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}.$$

1.2.3 矩阵的运算

1. 矩阵的加法

设有两个 $m \times n$ 矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{m \times n}$, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的和

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵加法的运算规律为(设 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 都是 $m \times n$ 矩阵):

(1) 结合律: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

(2) 交换律: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

(3) 减法为: $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$, 若 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, 则 $-\mathbf{A} = (-a_{ij})$ 为 $\mathbf{A}$ 的负矩阵.

2. 数与矩阵的乘法

数 k 与矩阵 $\mathbf{A}$ 的乘积记作 $k\mathbf{A}$ 或 $\mathbf{A}k$,

$$k\mathbf{A} = \mathbf{A}k = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

数乘矩阵的运算规律($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 为 $m \times n$ 矩阵, k , l 为任意常数):

$$\textcircled{1} k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A} \quad \textcircled{2} (k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A} \quad \textcircled{3} k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$$

3. 矩阵的乘法

$$\text{设 } \mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times s} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{ms} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = (b_{ij})_{s \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$$

其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} b_{kj} \quad (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

注: 只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时, 两个矩阵才能相乘.

在运算可进行的条件下矩阵乘法满足以下运算规律:

(1) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

(2) $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$.

(3) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$.

对于方阵 $\mathbf{A}$ 及自然数 k , $\underbrace{\mathbf{A}^k}_{k\text{个}} = \mathbf{AA} \cdots \mathbf{A}$ 称为方阵 $\mathbf{A}$ 的 k 次幂, 方阵的幂具有以下性质:

(1) $\mathbf{A}^{k_1} \mathbf{A}^{k_2} = \mathbf{A}^{k_1 + k_2}$.

(2) $(\mathbf{A}^{k_1})^{k_2} = \mathbf{A}^{k_1 k_2}$ (k_1, k_2 为自然数).

注: 矩阵的乘法不满足交换律, 一般地:

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA} \quad (\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$$

4. 矩阵的转置

把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新的矩阵, 称之为 A 的转置矩阵, 记作 A^T 或 A' . 运算规律(假设运算都是可行的):

$$(1) (A^T)^T = A.$$

$$(2) (A + B)^T = A^T + B^T.$$

$$(3) (\lambda A)^T = \lambda A^T.$$

$$(4) (AB)^T = B^T A^T.$$

5. 方阵的行列式

由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变), 叫做方阵 A 的行列式, 记作 $|A|$ 或 $\det A$. 运算规律(设 A 、 B 为 n 阶方阵, λ 为数)

$$(1) |A^T| = |A|.$$

$$(2) |\lambda A| = \lambda^n |A|.$$

$$(3) |AB| = |A| |B|.$$

行列式的定义及计算方法见第二章.

1.2.4 矩阵的逆

1. 定义: 对于 n 阶矩阵 A , 如果存在一个 n 阶矩阵 B , 使得

$$AB = BA = E$$

则称矩阵 A 可逆, 并称矩阵 B 是 A 的逆矩阵, 记为 $B = A^{-1}$, 即

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

2. 矩阵可逆的充分必要条件

定理 1: n 阶方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$.

定理 2: 若 $|A| \neq 0$, 则矩阵 A 可逆, 且 $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵.

行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的如下的方阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵.

推论: 若 $AB = E$ (或 $BA = E$), 则 $B = A^{-1}$. 当 $|A| \neq 0$ 时, 称 A 为非奇异矩阵(或满秩矩阵). 当 $|A| = 0$ 时, 称 A 为奇异矩阵(或降秩矩阵).

3. 方阵的逆矩阵的运算规律(A 、 B 是 n 阶可逆矩阵, 数 $k \neq 0$):

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$(2) (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}.$$

$$(3) (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

$$(4) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}. \text{ (特别地: } (A^k)^{-1} = (A^{-1})^k, k \text{ 为正整数).}$$

$$(5) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}.$$

4. 伴随矩阵的运算规律(A 、 B 是 n 阶可逆矩阵, 数 $k \neq 0$).

$$(1) AA^* = A^*A = |A|E.$$

$$(2) (A^*)^{-1} = (A^{-1})^*.$$

$$(3) (kA)^* = k^{n-1}A^*.$$

$$(4) (A^T)^* = (A^*)^T.$$

$$(5) (AB)^* = B^*A^*.$$

$$(6) (A^*)^* = |A|^{n-2}A.$$

$$(7) |A^*| = |A|^{n-1}.$$

5. 求逆矩阵的一般方法

方法 1: 用伴随矩阵. 若 $|A| \neq 0$, 则 A 可逆, 且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$

方法 2: 初等变换法(见 1.2.5 矩阵的初等变换和初等矩阵), 即

$$(A, E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E, A^{-1})$$

对数值可逆矩阵而言, 这是基本且常用的方法.

方法 3: 用定义, 即求一个矩阵 B , 使 $AB = E$, 则 A 可逆, 且 $A^{-1} = B$.

1.2.5 矩阵的初等变换与初等矩阵

(1) 初等变换

矩阵的初等变换包括以下三种:

①交换矩阵的两行(列);

②用数 $k \neq 0$ 乘矩阵的某一行(列);

③某一行(列)的 l 倍加到另一行(列)上.

(2) 初等矩阵

对单位矩阵 E 施行一次初等变换后所得到的矩阵称为初等矩阵.

①第一种初等矩阵: 交换 E 的第 i 行(列)和第 j 行(列)得到的矩阵, 记作 $E(i, j)$;

②第二种初等矩阵: 用非零数 k 乘以 E 的第 i 行(列)得到的矩阵, 记作 $E(i(k))$;

③第三种初等矩阵: 将 E 的第 j 行(列)的 k 倍加到第 i 行(列)上得到的矩阵, 记作 $E(i, j(k))$.

注: 初等矩阵都是可逆矩阵, 且其逆矩阵仍是同类型的初等矩阵.

$$E_{i,j}^{-1} = E(i, j) \quad E^{-1}(i(k)) = E(i(\frac{1}{k})) \quad E^{-1}(i, j(k)) = E(i, j(-k))$$

(3) 初等矩阵与初等变换的关系

对 $m \times n$ 阶矩阵 A 进行初等行变换, 相当于将 A 矩阵左乘以相应的 m 阶初等矩阵.

同样, 对 A 进行初等列变换, 相当于将矩阵 A 右乘以相应的 n 阶初等矩阵.

结论: A 是可逆矩阵, 可以表示成一系列初等矩阵的乘积, 即 $A = P_1 P_2 \cdots P_s$, 其中, $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 是初等矩阵.

(4) 用初等变换求逆矩阵的方法

$$[A \mid E] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [E \mid A^{-1}],$$

$$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{bmatrix} E \\ A^{-1} \end{bmatrix}.$$

(5) 矩阵的等价与化简

①等价: 矩阵 A 可以经一系列初等变换变成矩阵 B , 则称 A 与 B 等价, 记作: $A \sim B$

结论: $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $A = PBQ$

②行阶梯矩阵: 如果矩阵中元素全为零的行, 简称零行(如果存在)全部位于非零行(元素不全为零的行)的下方, 各非零行的左起第一个非零元素的列序数有上至下严格递增(即必在前一行的第一个非零元素的右下位置), 则称此矩阵为行阶梯矩阵.

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 就是行阶梯矩阵.}$$

③行最简矩阵: 若行阶梯矩阵中的非零行的第一个元素为 1, 且 1 所在列的其他元素全为零, 则称此行阶梯矩阵为行最简形矩阵.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ 为行最简形矩阵.}$$

④标准形矩阵: 若 $m \times n$ 阶矩阵的左上角为一个 r 阶单位阵, 其余元素全为零, 即

$$\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{m \times n},$$

则称此矩阵为标准形矩阵, 它由 m, n, r 三个数唯一确定, 其中 r 为标准形矩阵中非零行的行数.

结论:

①矩阵 A 总能经过一系列初等行变换化成行阶梯矩阵和行最简形矩阵.

②矩阵 A 总能经过一系列初等变换化成标准形 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 即: $A \sim \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 且标准形是唯一的.

1.2.6 矩阵的秩

(1) 矩阵的秩的定义

$r(A) = r \Leftrightarrow A$ 的非零的子式的最高阶数是 r

$\Leftrightarrow A$ 中有一个 r 阶子式不等于零, 而所有 $r+1$ 阶子式都等于零.

性质:

①初等变换不改变矩阵的秩; 两个同型矩阵等阶 $\Leftrightarrow$ 秩相等;

②若矩阵 A 中有某个 s 阶子式不为 0, 则 $r(A) \geq s$;

③若矩阵 A 中所有 t 阶子式全为 0, 则 $r(A) \leq t$;

④ $0 \leq r(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$.

(2) 求矩阵秩的方法

$A \xrightarrow{\text{初等行变换}} \text{行阶梯形 } B, r(A) = B \text{ 中非零行的行数.}$

(3) 关于矩阵秩的结论

$$\textcircled{1} r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A}^T \mathbf{A}).$$

$$\textcircled{2} n \text{ 阶矩阵 } \mathbf{A} \text{ 可逆} \Leftrightarrow \text{秩}(\mathbf{A}) = n.$$

$$\textcircled{3} r(\mathbf{A}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

$$\textcircled{4} r(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

$$\textcircled{5} r(k\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}) \quad k \neq 0.$$

$$\textcircled{6} r(\mathbf{AB}) \leq \min\{r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}.$$

$$\textcircled{7} \text{若 } \mathbf{A} \text{ 可逆, 则 } r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{BA}) = r(\mathbf{B}).$$

$$\textcircled{8} r \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

$$\textcircled{9} r(\mathbf{A}^*) = \begin{cases} n, & r(\mathbf{A}) = n \\ 1, & r(\mathbf{A}) = n - 1. \\ 0, & r(\mathbf{A}) < n - 1 \end{cases}$$

1.2.7 分块矩阵

(1) 分块矩阵

用几条纵线和横线把一个矩阵分成若干小块, 每一小块称为原矩阵的子矩阵, 把子矩阵看作原矩阵的一个元素, 就得到了分块矩阵.

特别地, $\mathbf{A}$ 以行分块

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_m \end{bmatrix},$$

$\mathbf{A}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$ 是一个子矩阵.

$\mathbf{B}$ 以列分块

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \vdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \vdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \vdots & b_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \cdots, \mathbf{B}_n],$$

其中 $\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{bmatrix}$ 是 $\mathbf{B}$ 的一个子矩阵.

这时, $\mathbf{A}$ 被看成以子矩阵 $\mathbf{A}_i$ 为元素的 $m \times 1$ 矩阵(称为以行分块), $\mathbf{B}$ 被看成以子矩阵 $\mathbf{B}_j$ 为元素的 $1 \times n$ 矩阵(称为以列分块).

(2) 关于分块矩阵的结论

① 设对角块矩阵(准对角矩阵)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix},$$

$$|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_s|$$

A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow |A_i| \neq 0, i=1, 2, \cdots, s$, 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}.$$

②若 $A = \begin{bmatrix} & A_1 \\ A_2 & \end{bmatrix}$, A 可逆 $\Leftrightarrow |A_1| \neq 0, |A_2| \neq 0$, 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & \end{bmatrix}.$$

③三角块矩阵

$$A = \begin{bmatrix} B_{m \times m} & D \\ O & C_{n \times n} \end{bmatrix},$$

A 可逆 $\Leftrightarrow |B| \neq 0, |C| \neq 0$, 且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} & -B^{-1}DC^{-1} \\ O & C^{-1} \end{bmatrix}.$$

1.3 典型例题

例 1 求与矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 可交换的所有矩阵.

分析: 利用待定系数

解 设矩阵 $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$ 与 A 可交换, 则

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

由 $AB = BA$, 得

$$a_1 = 0, b_1 = a, c_1 = b, d_1 = c,$$

$$a_2 = 0, b_2 = a_1 = 0, c_2 = b_1 = a, d_2 = c_1 = b,$$

$$a_3 = 0, b_3 = a_2 = 0, c_3 = b_2 = 0, d_3 = c_2 = a.$$

$$\text{因此, } B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \text{ 其中 } a, b, c, d \text{ 为任意实数.}$$

例2 已知 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $A = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, 求 A^5 .

分析: A 是对角矩阵, A^5 易求, 而 $PP^{-1} = P^{-1}P = E$

$$\text{解 } P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, A = PAP^{-1}, A^5 = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 4^5 \end{bmatrix} = 32 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A^5 &= (PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1}) \\ &= PA(P^{-1}P)A(P^{-1}P)A(P^{-1}P)A(P^{-1}P)A(P^{-1}P) \\ &= PAEAEAEAEAP^{-1} \\ &= PA^5P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} 32 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 16 \begin{bmatrix} 33 & -31 \\ -31 & 33 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注: 本题的关键在于利用矩阵乘法的结合律, 即

$$(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA(P^{-1}P)A(P^{-1}P)A(P^{-1}P)A(P^{-1}P)AP^{-1}.$$

例3 已知矩阵 $A = [1, 2, 3]$, $B = [1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}]$, $C = A^T B$, 求 C^n .

分析: 由已知 A 、 B 均为行矩阵, $BA^T = 3$.

$$\begin{aligned} \text{解 } C^n &= \overbrace{(A^T B)(A^T B) \cdots (A^T B)}^{n \uparrow} = A^T \overbrace{(BA^T)(BA^T) \cdots (BA^T)}^{n-1 \uparrow} B \\ &= A^T (BA^T)^{n-1} B = 3^{n-1} A^T B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

例4 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解 方法 1: 用公式 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^*$.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \mathbf{A}_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$\mathbf{A}_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\mathbf{A}_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1, \mathbf{A}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{A}_{23} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$\mathbf{A}_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3, \mathbf{A}_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5;$$

$$\mathbf{A}_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

故 $\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{31} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{32} \\ \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix},$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{A}^* = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

方法 2: 用初等行变换 $[\mathbf{A} \mid \mathbf{E}] \xrightarrow{\text{初等行变换}} [\mathbf{E} \mid \mathbf{A}^{-1}]$.

$$\begin{aligned} &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{r_1 - 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{r_3 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{r_1 - 2r_3 \\ r_2 + r_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right],$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

例5 设 A 满足 $A^2 + A - E = 0$, E 为单位矩阵, 求 $(A - E)^{-1}$.

分析: 矩阵 A 不是具体给出的矩阵, 不能通过上题求法算出. 考虑用定义求其逆矩阵.

解 因为 $(A - E)(A + 2E) - 2E = A^2 + A - 4E = 0$

所以 $(A - E)(A + 2E) = 2E$

即: $(A - E) \frac{(A + 2E)}{2} = E$

由定义知 $(A - E)^{-1} = \frac{1}{2}(A + 2E)$

例6 设列矩阵 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $A = E - xx^T$. 证明

(1) $A^2 = A$ 的充分必要条件是 $x^T x = 1$;

(2) 当 $x^T x = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

证 (1) $A^2 = (E - xx^T)(E - xx^T) = E - 2xx^T + (xx^T)(xx^T)$

而 $(xx^T)(xx^T) = (x^T x)xx^T$, 故 $A^2 = E + (x^T x - 2)xx^T$. 因此, 由 $A^2 = A$ 得

$$A = E - xx^T \Rightarrow xx^T = 1$$

(2) 假设 A 可逆, 则 $A^2 = A$

得

$$A^{-1}A^2 = A^{-1}A = E$$

即

$$A = E$$

又因为

$$A = E - XX^T$$

所以

$$XX^T = 0$$

从而

$$X = 0$$

这与 $x^T x = 1$ 矛盾, 故 A 不可逆.

例7 已知两个线性变换 $\begin{cases} x_1 = 2y_1 + y_3 \\ x_2 = -2y_1 + 3y_2 + 2y_3 \\ x_3 = 4y_1 + y_2 + 5y_3 \end{cases}$, $\begin{cases} y_1 = -3z_1 + z_2 \\ y_2 = 2z_1 + z_3 \\ y_3 = -z_2 + 3z_3 \end{cases}$, 求从 z_1, z_2, z_3 到 x_1, x_2, x_3 的线性变换.

解 由已知

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$