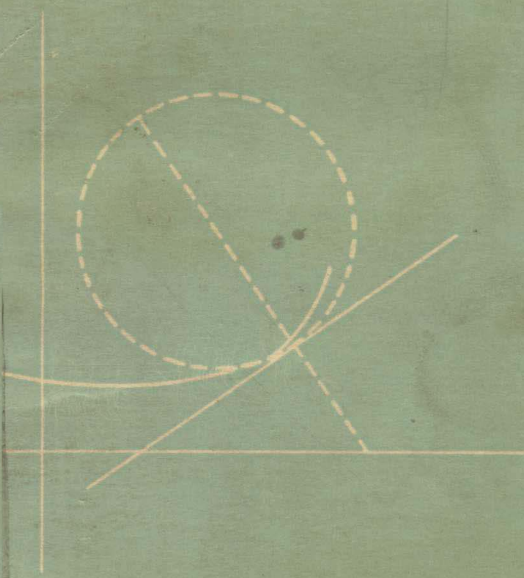
中央电大数学组

高等数学讲义学习辅导

下　册



中央广播电视大学出版社

《高等数学讲义》学习辅导

下　册

中央电大数学组　编

中央广播电视大学出版社

《高等数学讲义》学习辅导

下　　册

中央电大数学组　编

*

中央广播电视大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092　1/32　印张 6.75　千字 140

1984 年 1 月第 1 版　1984 年 10 月第 1 次印刷

印数　　1—223,000

书号：13300·16　定价：0.68 元

目　录

第十章　多元函数微分学

我们已经学习了一元函数的微积分，运用一元函数微积分能解决不少实际问题。但是在相当一部分实际问题中，却有多个变量，仅仅利用一元函数微积分的方法，还不足以解决问题，所以需要学习多元函数微积分。

多元函数与一元函数有着密切的联系，我们常常把多元函数问题转化为一元函数的问题，再利用一元函数微积分的概念和方法加以解决。同时还要注意到多元函数和一元函数不同之处，这些不同之处反映了多元函数的特殊性。

由于三元以上的多元函数的研究方法与二元函数类似，因此我们主要以二元函数为代表对多元函数微分学进行讨论。

一、教学目的

1. 正确理解多元函数的概念；
2. 理解多元函数微分理论；
3. 掌握多元函数微分的基本计算方法；
4. 掌握多元函数微分在几何及求极值方面的应用。

二、内容提要及要求

内容提要	要　求
1. 多元函数，极限及连续。	
1° 多元函数	
(1) 二元函数的定义。	了解二元函数的定义。
(2) 多元函数的定义域。	会求多元函数的定义域及掌握用平面图形表示二元函数的定义域。
(3) 二元函数的图形。	了解某些特殊的二元函数的图形。
2° 二元函数的极限。	了解二元函数极限的定义并会求某些简单的极限。
3° 二元函数的连续性。	
(1) 定义。	了解二元函数连续的定义。
(2) 二元连续函数的性质。	理解一切多元初等函数在其定义域内是连续的。
2. 偏导数	
1° 二元函数的一	

阶偏导数，$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。	
(1) 一阶偏导数的定义。	掌握一阶偏导数的定义及有关概念。
(2) 一阶偏导数的计算。	熟练掌握一阶偏导数的计算方法。
(3) 一阶偏导数的几何意义。	了解一阶偏导数的几何意义。
(4) 一阶偏导数与连续的关系。	了解二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续，但在该点不一定有偏导数。而在 (x_0, y_0) 有偏导数，但在该点不一定连续。
2° 高阶偏导数。	了解二阶偏导数的概念，并能熟练，正确计算二阶偏导数。
(1) 二阶偏导数设 $z=f(x,y)$。 $f_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ $f_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ $f_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ $f_{yx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$	
(2) 二阶偏导数与次序无关的条件。	了解 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 成立的条件。

3. 全微分	
1° 二元函数 $z=f(x, y)$在点 $P(x, y)$可微及全微分的定义。	理解全微分的概念。
2° 全微分的存在定理，即§3定理1，及全微分的计算。	理解全微分存在的关键是偏导数连续并能熟练正确计算全微分。
3° 可微与连续的关系，即§3定理2，可微与偏导数的关系，即§3定理3。	理解二元函数可微与连续的关系，可微与偏导数的关系，可微的充分条件。
4. 复合函数微分法及隐函数微分法。	
1° 复合函数微分法，即§4定理1。	这是本章的重点，要熟练掌握复合函数微分法则，正确计算出结果。
2° 一阶全微分的形式不变性。	会用全微分形式不变性计算函数的全微分及偏导数。
3° 隐函数的微分法。	
(1) 隐函数存在定理，即§4定理2。	了解定理2的条件和结论。
(2) 隐函数的微分法则。	熟练掌握求隐函数微分的两种基本方法。
*4° 复合函数和隐	会计算复合函数及隐函数的二

函数的二阶偏导数。

阶偏导数。

5. 多元函数微分学的几何应用。

1° 空间曲线的切线及法平面。

会求由参数方程给出的空间曲线：$x=x(t), y=y(t), z=z(t)$的切线及法平面方程，并理解$\{x'(t), y'(t), z'(t)\}$是曲线的切向量。

2° 曲面的切平面及法线。

会求曲面 $F(x, y, z)=0$ 的切平面及法线方程，并理解$\{F'_x, F'_y, F'_z\}$是曲面的法向量。

3° 全微分的几何意义。

了解全微分的几何意义。

6. 极值问题。

1° 二元函数的极值。

(1) 二元函数极值存在的必要条件，即§6定理1。

理解并掌握二元函数极值的必要条件。要注意驻点与极值点的关系，(见例15)。

(2) 二元函数极值存在的充分条件，即§6定理2。

会利用二元函数极值的充分条件判断极值点，并注意此充分条件只适用二元函数。

2°条件极值及拉格朗日乘子法。

(1) 条件极值。

理解条件极值与极值是两个不同的概念。

(2) 拉格朗日乘子法。	会用拉格朗日乘子法求条件极值。
(3) 用条件极值来解决实际问题中的最大最小问题。	由实际问题，会列出所求问题及该问题所要满足的条件的函数关系，由拉格朗日乘子法则求出可能的极值点，再由问题本身判断是否为最大最小值点。

三、典型例题分析

(一) 多元函数的定义域

例 1 求下列函数的定义域并用平面图形表示。

① $z=\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$ ② $z=\ln[x\ln(y-x)]$

解 ① 函数 z 是两个函数

$$z_1=\sqrt{4x-y^2} \qquad z_2=\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$$

之积，因此 z 的定义域是 z_1 与 z_2 定义域的公共部分。

$$z_1=\sqrt{4x-y^2},$$

定义域是 $4x-y^2\geqslant 0$ 即 $y^2\leqslant 4x$. 图形为图 10-1 包括边界的阴影部分。

$$z_2=\frac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}$$

定义域为 $\begin{cases} x-\sqrt{y}>0 \\ y\geqslant 0 \end{cases}$

即 $x^2>y\geqslant 0$. 图形为 10-2 除去边界 $x=\sqrt{y}$ 的阴影部分。

故函数 z 的定义域为

$$\begin{cases}\sqrt{4x}\geqslant y\geqslant 0\\ x^2>y\geqslant 0\end{cases}$$

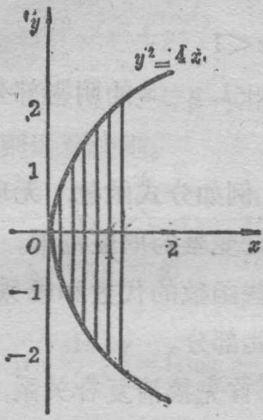


图 10-1

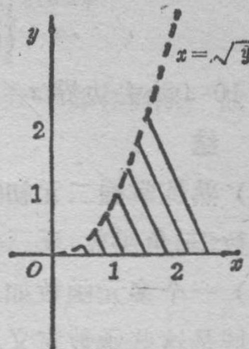


图 10-2

图形为 10-3 除去边界 $x=\sqrt{y}$，包括边界 $y=\sqrt{4x}$ 及 $y=0$ 的阴影部分。

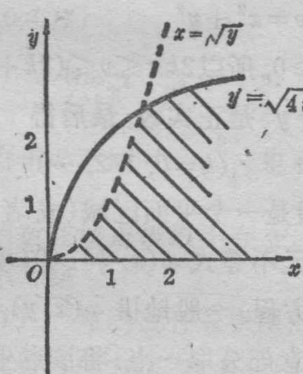


图 10-3

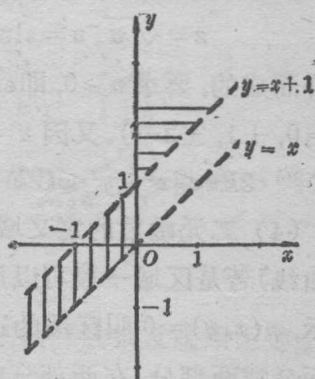


图 10-4

② 这是复合函数 $z=\ln u$, $u=x\ln(y-x)$ 要求 $u>0$，即 $x\ln(y-x)>0$, 即

$$\begin{cases} x>0 \\ y-x>1 \end{cases}$$

即 $y-1>x>0$ 或

$$\begin{cases} x<0 \\ 0<y-x<1 \end{cases}$$

图形为 10-4 除去边界 $x=0, y=x+1, y=x$ 的阴影部分。

小　结

(1) 熟练掌握二元初等函数，例如分式函数，无理函数，对数函数，三角函数，反三角函数自变量的取值范围。

(2) 一个多元函数如果是某些函数的代数和或乘积时，其定义域是这些函数定义域的公共部分。

(3) 求复合函数的定义域时，首先搞清复合关系，每一复合步骤对变量取值范围的要求，然后从外到里，一层一层做下去，最后得到复合函数定义域。

例如　$z=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$，是由

$$z=\sqrt{u},\ u=\sin v,\quad v=x^2+y^2$$

复合而成的，要求 $u\geqslant 0$，即 $\sin v\geqslant 0$，所以 $2k\pi\leqslant v\leqslant(2k+1)\pi$，$(k=0, \pm 1, \pm 2\cdots)$。又因 $v=x^2+y^2$ 是正实数，最后得

$$2k\pi\leqslant x^2+y^2\leqslant(2k+1)\pi \qquad (k=0, 1, 2, \cdots)$$

(4) 二元函数的定义域一般是一个平面区域(或者是一条曲线)若是区域一般可以用二元不等式 $\varphi(x, y)>0$(或 <0)表示，$\varphi(x, y)=0$ 叫区域的边界方程。一般地讲 $\varphi(x, y)=0$ 把平面分成两部分，在两部分中任意部分取一点，将该点坐标代入 $\varphi(x, y)$，若满足 $\varphi(x, y)>0$(或 <0)，则该点所在的区域为要求的区域。这个方法在教材例题中具体讲到，要注意掌握这个方法。

（二）二元函数的极限与连续性

例 2 求下列函数的极限:

① $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ② $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}$

解 ① 当 $x\to 1, y\to 0$ 时，分子分母都有极限，故可用极限的四则运算法则。

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\ln(x+e^y)}{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\ln 2}{1}=\ln 2$$

② $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}y\dfrac{\sin xy}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}y\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin xy}{xy}=2$

例 3 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$。

解 考虑动点(x, y)沿曲线 $y=kx^2$(其中 k 为任意常数)趋于$(0, 0)$时

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^2\to 0}}\frac{kx^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k}{1+k^2}$$

由于 k 不同时，$\dfrac{k}{1+k^2}$也不同，故$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$的值不确定，所以函数在该点极限不存在。

小　结

（1）一元函数有关极限的四则运算法则及应用无穷小量性质求极限的方法，在多元函数中也适用。

（2）如果函数在该点无定义，可将函数适当变形，消去相同的无穷小量，再由求极限的基本方法或者变成我们熟悉的两个重要极限的形式，把相应的两个自变量看作一个整体，利

用一元函数的方法加以解决。

(3) 如果函数在 $P_0(x_0, y_0)$ 点极限存在，则动点 $P(x, y)$ 以任意方式趋于定点 $P_0(x_0, y_0)$时，函数都必有相同的极限值。所以如果能找到一种方式，使 $P(x, y)$沿这种方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$时极限不存在(或极限值不确定)则可判定函数当 $P(x, y)$趋于 $P_0(x_0, y_0)$时极限不存在。不能因为动点 $P(x, y)$按某些特殊方式(尽管有时这样的方式有无穷多种)趋于定点 $P_0(x_0, y_0)$时函数有极限，就判断函断在 $P_0(x_0, y_0)$有极限。

例 4 讨论下列函数的连续性

① $$z=f(x, y)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{y}{x}} & x\neq 0\\ e^y & x=0\end{cases}$$

② $$z=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & x^4+y^2\neq 0\\ 0 & x^4+y^2=0\end{cases}$$

解 ① 这是分段函数，在非分段处，它显然连续。所以重点考虑分段处的连续性。

由函数连续的定义，考虑当$(x, y)\longrightarrow(0, y_0)$时，函数是否有极限且极限值是否等于该点的函数值。因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}(1+x)^{\frac{y}{x}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to y_0}}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^y=e^{y_0}=f(0, y_0)$$

所以函数在直线 $x=0$ 连续，从而函数在全平面连续。

② 我们已经知道 $z=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$在 $x=0$，$y=0$ 处极限不存在，尽管补充了定义，z 在这点也不连续，所以函数除(0, 0)点外，全平面处处连续。

小　结

(1) 多元初等函数在它有定义的区域都是连续的，连续函数的和、差、积、商(分母不为零)及复合函数也是连续的。

(2) 分段函数在其分段处的连续性用定义去判别。

(3) 函数不连续的一般情况：函数在一点的邻域内有定义，而这点无定义，则这点不连续；函数在一点极限不存在，则该点不连续；在一点，虽然函数有极限，但极限值不等于该点函数值，则该点不连续。这些情况都与一元函数判别不连续是相似的，但在一元函数中，间断点是孤立的，而在二元函数中，所谓间断点可以是孤立的，也可以是曲线。

(三) 偏导数

例 5　求下列函数对各自变量的一阶偏导数。

① $z=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{y}{x}}$　　② $u=x^{y^z}$

解　① $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)}{\partial x}$

$$=\frac{1}{1+\frac{y}{x}}\left(-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{y}}{(x+y)\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{(x+y)\sqrt{y}}$$

② *方法一*：对于底及指数都是变量的函数，可以先取对数之后，再求偏导数。

$$\ln u=y^z\ln x$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}=y^z\frac{1}{x}\qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=uy^z\frac{1}{x}=x^{y^z-1}y^z$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}\ln x \quad \frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z}y^{z-1}z\ln x$$

$$\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial z}=y^z\ln y\ln x \quad \frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}y^z\ln y\ln x$$

方法二：直接利用求导法则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^z x^{y^z-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{y^z}\ln x\frac{\partial(y^z)}{\partial y}=x^{y^z}y^{z-1}z\ln x$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{y^z}\ln x\frac{\partial(y^z)}{\partial z}=x^{y^z}y^z\ln x\cdot\ln y$$

注意：这是以 x 为底，以 y^z 为指数的函数。用这个方法，由于指数的“层次”较多，容易发生错误，最好先取对数，降低指数的“层次”后，再求偏导数。

小　结

求函数对某自变量的偏导数时，将其余自变量看作常量，用一元函数求导法则求导。求二阶偏导数时，将已得到的一阶偏导数作为新的函数，继续对自变量求偏导数。

（四）全微分

例 6　函数 $z=f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，问 z 在$(0,0)$点可微吗？

解　第一步：计算 z 在$(0,0)$点的全微分，由于 $f(x,y)$ 不是初等函数。故求$(0,0)$点的偏导数时要用定义去求。

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|(0+\Delta x)\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0$$

同理　$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}}=0$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=0$$

第二步: 计算 $f(x, y)$在(0, 0)处的增量 Δz, 并计算增量 Δz 与全微分 dz 的差。

$$\Delta z\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=f(0+\Delta x,\ 0+\Delta y)-f(0, 0)=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}$$

$$\Delta z\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}-dz\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}-0=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}$$

第三步: 求点$(\Delta x, \Delta y)$到点(0, 0)的距离 ρ

$$\rho=\sqrt{(\Delta x-0)^2+(\Delta y-0)^2}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

第四步: 计算

$$\frac{\Delta z-dz}{\rho}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ 是否为无穷小量。

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{|\Delta x\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\xlongequal{\text{令}\Delta x=\Delta y}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x\to 0}}\frac{|\Delta x|}{\sqrt{2}\,|\Delta x|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

这表示当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ 时

$$(\Delta z-dz)\Big|_{\substack{x=0\\y=0}}$$

不是较 ρ 高阶的无穷小量, 所以函数(0, 0)点不可微。

注意: 在一元函数中, 若某点导数存在, 则该点一定可微。而这个例子说明, 二元函数中, 尽管两个偏导数存在, 函数却不一定可微。其原因是函数在(0, 0)点偏导数不连续, 只有在两个偏导数存在且连续时, 函数才是可微的。

例 7 设 $z=\arcsin\frac{x}{y}$, 求 dz。

解 方法一: 用定理