



耿素云 张立昂 编著

概率统计题解

$$= P\{a_1 < Y_1 < b_1\}P\{a_2 < Y_2 < b_2\} \cdots P\{a_n < Y_n < b_n\}.$$

得证 Y_1, Y_2, \dots, Y_n 相互独立. |

下面是关于正态总体的统计量分布的几个定理.

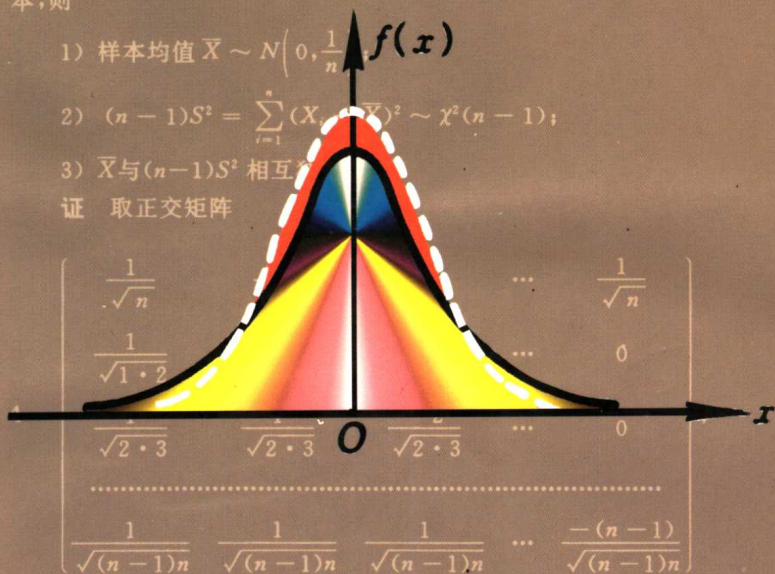
定理 6.6 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 $N(0, 1)$ 的一个样本, 则

1) 样本均值 $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$

2) $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$;

3) \bar{X} 与 $(n-1)S^2$ 相互独立.

证 取正交矩阵



$$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}X_1 + \frac{1}{\sqrt{n}}X_2 + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}X_n$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n),$$

北京大学出版社

概率统计题解

耿素云 张立昂 编著

北京大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书是与《概率统计》(第二版,耿素云、张立昂编著,北京大学出版社出版)配套的辅导教材,给出了该书中全部习题的解答与分析,并且添加了部分习题。

本书包括概率论和数理统计两大部分,共分十章,每章含内容提要、习题、解答与分析。

本书可作为普通高等院校非数学专业的学生和参加各种形式的高等教育学习(考试)的学生学习《概率论与数理统计》课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率统计题解/耿素云等编著. —北京:北京大学出版社,1999.5

ISBN 7-301-04189-6

I. 概… II. 耿 III. ①概率论-成人教育-教材 ②数理统计-成人教育-教材 IV. 021

书 名: 概率统计题解

著作责任者: 耿素云 张立昂

责任编辑: 沈承凤

标准书号: ISBN 7-301-04189-6/O·0448

出版者: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区中关村北京大学校内 100871

网 址: <http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm>

电 话: 出版部 6275207 编辑室 62754140

电子信箱: zpu@pku.edu.cn

排 版 者: 兴盛达激光照排中心

印 刷 者: 北京经纬印刷厂

发 行 者: 北京大学出版社

经 销 者: 新华书店

850毫米×1168毫米 32开本 10.875印张 282千字

1999年5月第一版 2000年5月第二次印刷

定 价: 16.00元

前 言

由于随机现象普遍存在于自然界和人类社会,概率论与数理统计作为研究随机现象的一门数学学科已经成为现代从事社会科学、自然科学、工程技术、管理、生产和经营等领域工作的人员的必备知识。它是高等院校大多数专业的一门必修课。

作为一门数学学科,概率论与数理统计具有数学所共有的特点:高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性。除此之外,对于正在或者将要学习这门课程的人,我们还想指出下面几点:

1. 概率论与数理统计以随机现象为研究对象,因此有自己的一整套崭新的概念、理论和方法。在学习中必须努力掌握这些概念、理论和方法,弄清它们的实际背景,理解和掌握是怎样用它们研究随机现象、刻画随机现象的。

2. 要经常使用高等数学以及组合数学(排列组合)、集合论等数学知识,在叙述概念和计算时都离不开它们。这就对学习者提出了更高的要求,要求他们较好地掌握这些知识,特别是高等数学。这也是一些人学习这门课程感到特别吃力的重要原因,因为他们这方面的基础不够扎实。弥补的办法只能是遇到这类问题随时复习要用的知识。其实,我们的知识都是在不断地复习和重复使用中掌握的。

3. 应用性强。数理统计给出各种处理随机现象的统计方法。这些方法都直接针对实际中的应用,学习时不应只去死记硬背几个公式和结论,只有弄清它们的应用背景和理论根据才能真正掌握。

做题是学好任何一门数学课程所不可缺少的。通过做题可以加深对概念的理解,巩固从教材中(课堂上)学到的知识,掌握各种

技巧。教科书通常不可能有很大篇幅介绍解题技巧和讨论解题中可能遇到的问题。有相当一部分人感到做题是一件困难的事情,特别是对于那些缺乏老师指导(如参加自学考试)的学生来说更是如此。我们撰写这本习题解答,希望对他们能够有所帮助。

本题解是与我们合写的教材《概率统计》第二版(北京大学出版社,1998年)配套的辅导教材。它包括概率论与数理统计两大部分,共10章。前5章是概率论部分,后5章是数理统计部分。每章有内容提要、习题、解答与分析三部分。内容提要扼要叙述本章的主要概念、性质、公式和定理。本题解给出《概率统计》中全部习题的解答,并且添加了一些新的习题及其解答。有些题给出多种解法,在有些题的解答与分析后面加注了说明、注意事项或这类题的解题思路等。对于解题方法,我们尽量采取有代表性的和普遍适用的方法。当然也力求简洁。我们的初衷是帮助读者学习概率论与数理统计这门课程,因此把重点放在概念和具有普遍意义的方法上,而不太多地关注技巧、演算过程,特别是微积分计算过程有时会跳过几步,但是关键步骤都会写出来。

《概率统计》和本题解的内容及要求与全国硕士研究生入学统一考试数学一、数学三考试大纲中概率论与数理统计部分基本一致。本题解可供普通高校非数学专业的学生和参加各种形式的高等教育学习(考试)的人员在学习这门课程时使用,也可供参加硕士研究生入学考试复习该课程时使用,还可供讲授这门课程的老师们参考。

最后,对使用本题解的学生我们要提一点忠告:看习题解答不能代替自己做题!通过做题加深理解和掌握学习的内容,关键在于“做”。做题是要动脑筋的,甚至要冥思苦想,很是艰辛。正是通过这样艰苦的劳动,才能真正有所收获。我们不希望本题解成为学生偷懒的工具。为了完成作业来抄答案,或者看看解答就以为自己学会了,这是我们十分担心和不愿意的事情。任何良药都是有副

作用的(何况这本题解也根本谈不上是什么良药),减少副作用和防止副作用的办法是医生的忠告与自己的科学使用。我们建议你用如下方式使用这本题解:一定要先自己做,然后再看解答与分析。如果自己做出来了,可以比较使用的方法和演算、论证的细节。如果觉得新意不多,可以看得很快,甚至不看。如果自己做不出来(应该是真正经过努力的),就要比较认真地看解答与分析。不是简单知道这个题的做法就行了,而是应该掌握它的方法,寻找自己做不出来的原因,是概念不清,没有掌握某条性质或定理的用法,还是缺乏技巧。习题中通常一种类型的题目总会有好几道,看完这道题后,再选一道同类型的题做,如果通过这道题的学习,能够自己解出同类型的其它题目,这才表示你真地学会了。

由于作者的水平 and 精力所限,题解中定有疏漏、不足和错误之处。望读者和教授这门课的老师不吝赐教。

作者

1998年末于北京大学燕北园

DAA 98/05

目 录

第一章 随机事件与概率	(1)
内容提要	(1)
习题	(9)
解答与分析	(19)
第二章 随机变量及其概率分布	(62)
内容提要.....	(62)
习题	(69)
解答与分析	(76)
第三章 多维随机变量及其概率分布	(105)
内容提要	(105)
习题	(111)
解答与分析	(119)
第四章 随机变量的数字特征	(162)
内容提要	(162)
习题	(167)
解答与分析	(172)
第五章 大数定律及中心极限定理	(200)
内容提要	(200)
习题	(201)
解答与分析	(203)
第六章 数理统计的基本概念	(208)
内容提要	(208)
习题	(214)
解答与分析	(217)
第七章 参数估计	(227)

内容提要	(227)
习题	(231)
解答与分析	(234)
第八章 假设检验	(246)
内容提要	(246)
习题	(252)
解答与分析	(256)
第九章 方差分析	(272)
内容提要	(272)
习题	(279)
解答与分析	(282)
第十章 回归分析	(300)
内容提要	(300)
习题	(306)
解答与分析	(309)

第一章 随机事件与概率

内 容 提 要

1. 随机事件和样本空间

可以在相同的条件下重复进行,并且每次试验的结果事先不可预知的试验称作**随机试验**.在随机试验中,可能发生也可能不发生的事件称作**随机事件**,或简称为**事件**.

随机试验中每一种可能的试验结果称作一个**样本点**,样本点的全体组成的集合称作**样本空间**或**基本空间**,常将样本空间记作 Ω .

随机事件是样本空间的子集.仅含一个样本点的随机事件称作**基本事件**,含两个或两个以上样本点的随机事件称作**复合事件**.

必然发生的事件称作**必然事件**,必然事件应该包含所有的样本点,因而它等于样本空间 Ω .不可能发生的事件称作**不可能事件**,因为它不能包含任何样本点,所以为空集,记作 \emptyset .

常用大写字母 A, B, C 等表示随机事件.

2. 事件之间的关系与运算

(1) 子事件(事件之间的包含关系)

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 是事件 B 的**子事件**,或称事件 B **包含**事件 A ,记作 $A \subseteq B$.如果 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,即 A 与 B 同时发生或同时不发生,则称事件 A 与 B **相等**,记作 $A = B$.

(2) 和事件

设 A, B 为两个事件,“ A 和 B 至少有一个发生”的事件称作 A

与 B 的**和事件**, 记作 $A \cup B$. 和事件可以推广到 $n (n \geq 2)$ 个事件的情况. “ A_1, A_2, \dots, A_n 中至少有一个发生”称作 A_1, A_2, \dots, A_n 的**和事件**, 记作 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^n A_i$. 和事件还可以推广到可数个事件的情况, 用 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示“ $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 中至少有一个发生”.

(3) 积事件

事件“ A 与 B 同时发生”称作 A 与 B 的**积事件**, 记作 $A \cap B$, 或简记为 AB . 积事件也可以推广到 $n (n \geq 2)$ 个事件的情况. n 个事件的积事件 $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$ 表示事件“ A_1, A_2, \dots, A_n 同时发生”, n 个事件的积事件也可记作 $\bigcap_{i=1}^n A_i$, 或 $A_1 A_2 \dots A_n$. 还可以推广到可数个事件的情况, $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 表示事件“ $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 同时发生”.

(4) 差事件

事件“ A 发生而 B 不发生”称作事件 A 与 B 的**差**, 记作 $A - B$.

(5) 逆事件(对立事件)

事件“ A 不发生”称作 A 的**逆事件**或 A 的**对立事件**, 记作 \bar{A} . 显然, $\bar{\bar{A}} = \Omega - A$, \bar{A} 发生当且仅当 A 不发生.

(6) 互不相容(互斥)事件

如果事件 A 与 B 不能同时发生, 则称 A 与 B **互不相容**或**互斥**, A 与 B 互斥当且仅当 $AB = \emptyset$.

易知, A 与 \bar{A} 互斥, 但要注意, 两个互不相容的事件, 不一定是互为逆事件的.

事件之间的运算具有下述性质:

- ① 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.
- ② 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

③ 分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

④ 德·摩根律 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$

$$\bigcup_{i=1}^n \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i},$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i}, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}.$$

⑤ 双重否定律 $\overline{\overline{A}} = A.$

⑥ 排中律 $A \cup \overline{A} = \Omega.$

⑦ 矛盾律 $A \cap \overline{A} = \emptyset.$

⑧ 差积转换律 $A - B = A \cap \overline{B} = A - (A \cap B).$

3. 概率的定义及基本性质

(1) 概率的统计定义

在不变的条件下,重复做 n 次试验,设 n 次试验中,事件 A 发生 m 次,如果当 n 很大时,频率 $\frac{m}{n}$ 稳定地在某一数值 p 附近摆动,而且一般说来,随着 n 的增大,这种摆动的振幅越小,则称数值 p 为事件 A 的**概率**,记作 $P(A) = p$. 这样定义的概率称作**统计概率**.

(2) 概率的古典定义

如果随机试验满足下述 3 个条件:

① 样本空间是有穷的,即 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\};$

② 基本事件 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$ 两两互不相容;

③ 基本事件 $\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \dots, \{\omega_n\}$ 发生的可能性相等,

则称这个问题为**古典概型**.

在古典概型中,设随机事件 A 含有 m 个样本点,定义 A 的概率为

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

这样定义的概率称作**古典概率**.

(3) 几何概率

如果随机试验的样本空间是某一个区域 G , G 的长度(或面积, 或体积)为 D , 并设随机点落入长度(或面积, 或体积)相同的子区域内是等可能的. 设 G' 是 G 的长度(或面积, 或体积)为 d 的子区域, 定义事件 $A = \text{“随机点落入 } G' \text{ 内”}$ 的概率为

$$P(A) = \frac{d}{D}.$$

这样定义的概率称为**几何概率**.

(4) 概率的基本性质

① 对于任何事件 A , $0 \leq P(A) \leq 1$;

② $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$;

注意: 零概率事件(即概率等于 0 的事件)不一定是不可能事件, 概率为 1 的事件也不一定是必然事件.

③ 有限可加性: 设 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

④ 完全可加性: 设 A_1, A_2, \dots 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i);$$

⑤ 若 $A \subseteq B$, 则 $P(A) \leq P(B)$.

4. 条件概率和事件的独立性

设 A, B 为两个事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 的**条件概率**.

如果 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则称 A 与 B **相互独立**. 设 n 个事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 如果对任意 $i \neq j$, A_i 与 A_j 相互独立, 则称这 n 个事件**两两相互独立**; 如果对于任意的 $2 \leq k \leq n$ 和 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots <$

$i_k \leq n$, 都有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_n}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_n}),$$

则称这 n 个事件**相互独立**.

注意: A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立与 A_1, A_2, \dots, A_n 两两相互独立是两个不同的概念. 前者蕴涵后者, 但反之不真.

当 $P(A) > 0$ 时, A 与 B 相互独立当且仅当 $P(B|A) = P(B)$.

直观上, A 与 B 相互独立的含义是 A 发生的概率与 B 是否发生无关; 同样, B 发生的概率与 A 是否发生无关.

若 A 与 B 相互独立, 则 A 与 \bar{B} , \bar{A} 与 B , \bar{A} 与 \bar{B} 也都相互独立.

5. 概率的计算公式

(1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

(2) $P(A - B) = P(A) - P(AB)$.

当 $B \subseteq A$ 时, $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

(3) 加法公式

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

一般地, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) \\ - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

例如,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) \\ - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

当 A, B 互不相容时, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

当 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互不相容时,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

这正是有限可加性的一般情况.

(4) 乘法公式

设 $P(A) > 0$, 则

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A).$$

设 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$, 则

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \\ \cdot \cdots \cdot P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

特别地, 当 A, B 相互独立时,

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

当 A_1, A_2, \dots, A_n 相互独立时,

$$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n).$$

(5) 全概公式

如果 n 个事件 B_1, B_2, \dots, B_n 两两互不相容, 且 $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$, 则称这 n 个事件是一个**完备事件组**.

设 B_1, B_2, \dots, B_n 是一个完备事件组, 且

$$P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n,$$

则对于任意的事件 $A \subseteq \Omega$,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i).$$

这个公式称作**全概公式**.

(6) 贝叶斯(Bayes)公式

设 B_1, B_2, \dots, B_n 是一个完备事件组且 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 又设 $P(A) > 0$, 则对于每个 $k(1 \leq k \leq n)$,

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)}.$$

这个公式称作**贝叶斯公式**或**逆概公式**.

6. 伯努利(Bernoulli)概型

在相同的条件下, 将同一试验重复做 n 次, 且这 n 次试验是相

互独立的,每次试验的结果为有限个,这样的 n 次试验称作 **n 次独立重复试验**.

特别地,若在 n 次独立重复试验中,每次试验的结果只有两种可能,则称这样的 n 次独立重复试验为**伯努利概型**.

在伯努利概型中,设事件 A 在每次试验中发生的概率为 p ,则在 n 次试验中事件 A 发生 $k(0 \leq k \leq n)$ 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

这个公式常称为**二项概率公式**.

7. 排列组合

在古典概型中,计算事件 A 的概率,要首先计算出样本空间所含样本点的个数(也就是基本事件总数) n ,和 A 中所含样本点的个数 m ,而 n, m 的计算往往要利用排列组合公式,因而这里介绍一些基本的排列组合公式,以及概率统计中,不同的抽样方式与排列组合的关系.

(1) 加法原则

设完成一件事情共有 $s(s \geq 1)$ 类不同的方法,第 i 类方法又有 r_i 种不同的情况, $i=1, 2, \dots, s$. 只要选择任何一类中的任何一种方法,这件事情就可以完成,则完成这件事情共有 $r_1 + r_2 + \dots + r_s$ 种不同的方法,这就是**加法原则**.

(2) 乘法原则

设完成一件事情有 $s(s \geq 1)$ 个步骤,第 i 个步骤有 m_i 种方法, $i=1, 2, \dots, s$. 完成这件事情必须经过每个步骤,则完成这件事情共有 $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_s$ 种不同的方法,这就是**乘法原则**.

(3) 排列

① 选排列与全排列

从 n 个不同的元素中,每次取出一个,取出后不再放回,连续抽取 $m(m \leq n)$ 次,依次排成一列称为**选排列**,其不同的排列数为

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

当 $m=n$ 时,称为**全排列**,其不同的排列数为

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

规定 $0! = 1$.

② 不全相异元素的全排列

设 n 个元素中只有 $m(m < n)$ 种不同的元素,其个数分别为 n_1, n_2, \dots, n_m , 且 $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. 将这 n 个元素取来全排列,称为**不全相异元素的全排列**,其不同的排列数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

③ 可重复的排列

从 n 个不同元素中有放回地抽取 m 个,依次地排成一列,称为**可重复的排列**,不同的排列数为 n^m .

① 环形排列

从 n 个不同的元素中,不带放回地抽取 $m(m \leq n)$ 个,依次地排成一个圆圈,称为**环形排列**,不同的排列数为

$$\frac{n!}{(n-m)!m}.$$

(4) 组合

① 不可重复的组合

从 n 个不同元素中抽取 m 个 ($m \leq n$),取出的元素不再放回,不考虑抽取顺序,称作**不可重复的组合**. n 中取 m 的不可重复的组合数为

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

有时将 C_n^m 也记成 $\binom{n}{m}$, 且规定: $C_n^0 = 1$; 当 $m > n$ 时, $C_n^m = 0$.

主要的组合公式有以下几个:

$$C_n^m = C_n^{n-m},$$

$$C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m,$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n,$$

$$C_{n_1+n_2}^m = \sum_{k=0}^m C_{n_1}^k C_{n_2}^{m-k}.$$

② 可重复的组合

从 n 个不同元素中抽取 m 个, 每次取出后再重新放回去, 不考虑抽取顺序, 称作可重复的组合. n 中取 m 的可重复的组合数为

$$C_{m+n-1}^m = C_{m+n-1}^{n-1}.$$

习 题

1.1 写出下列随机试验的样本空间, 并用样本点组成的集合表示给出的随机事件.

(1) 将一枚均匀硬币抛掷两次.

A = “第一次出现正面”;

B = “两次出现同一面”;

C = “至少有一次出现正面”.

(2) 一个口袋中有 5 个外形完全一样的小球, 编号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 从中任取 3 个球.

A = “球的最小编号为 1”;

B = “球的编号全为奇数”;

C = “球的编号全为偶数”.

(3) 在 1, 2, 3, 4 四个数中可重复地取出两个数.

A = “一个数是另一个数的两倍”;

B = “两个数互素”.

(4) 掷两颗骰子.

A = “出现的点数之和为奇数且恰好有一次是 1 点”;

B = “出现的点数之和为偶数且没有一颗是 1 点”.