高等财经院校试用教材

线性规划

经济应用数学基础（四）

中国人民大学出版社

经济应用数学基础(四)

高等财经院校试用教材

线性规划

中国人民大学数学教研室编

中国人民大学出版社

高等财经院校试用教材
经济应用数学基础（四）
线 性 规 划
中国人民大学数学教研室编
*
中国人民大学出版社出版
（北京西郊海淀路39号）
外 文 印 刷 厂 印 刷
（北京西郊车公庄西路19号）
新华书店北京发行所发行
*
开本：850×1168毫米32开　印张：5.125
1981年7月第1版　1982年9月第3次印刷
字数：132,000　册数：40,001—68,000
统一书号：13011·20　定价：0.65元

前　言

本书介绍线性规划的基本知识，可作为高等学校财经专业的试用教材，也可供财经工作者阅读。本书是根据我校1962年以来的线性规划讲义修改而成。在编写过程中得到了南京大学数学系唐述钊教授和中国科学院系统科学研究所田丰同志等的指导与帮助，参考了兄弟院校的有关教材，特别是“参数线性规划”与“灵敏度分析”参考了唐述钊教授讲稿的内容，谨在此表示感谢。

由于我们水平不高，教学经验不足，本书一定还有不少缺点和错误，请广大读者提出批评指正。

编　者

1981.6.

目　录

第一章 线性规划问题的数学模型

§1.1 引言

在工农业生产、交通运输、财贸工作等各项经济活动中，必须提高经济效果，做到耗费较少的人力物力财力，创造出较多的经济价值，以加速实现四个现代化的进程。

提高经济效果可以通过两种途径：一是技术方面的各种改进，例如工业生产上改善工艺，使用新的设备和新型原材料等。二是生产组织和计划的改进，即合理安排人力物力资源，合理组织生产过程，在条件不变的情况下，统筹安排，使总的经济效果最好。后者就是运筹学研究的主要内容。

运筹学有规划论、排队论、对策论等许多分支，线性规划是其中的一个重要分支。早在本世纪三十年代末就有人从运输等问题开始研究。它在运筹学中是研究较早，发展较快，应用较广，比较成熟的一个分支。它研究的问题主要有两类：一是一项任务确定后，如何统筹安排，尽量做到用最少的人力物力资源去完成这一任务。二是已有一定数量的人力物力资源，如何安排使用它们，使得完成任务最多。其实这两类问题是一个问题的两个方面，就是所谓寻求整个问题的某个整体指标最优的问题。在经济领域里，这种问题很多。例如：

（一）运输问题。在某一地区内，有某种产品的产地与销地各若干个，把这种产品从各个产地调运到各个销地，调运方案可以很多，应如何组织调运，才能使总的运费或运输量(即总的运行吨公里数)最少。

（二）生产的组织与计划问题。一个工厂或车间有各种不同类

型的车床各若干台，各种不同车床生产各种零件的效率不同，在一个生产周期，应如何安排各车床的生产时间，使得成套的产品总量最大。类似的还有劳动力的安排等问题。

（三）合理下料问题。在加工中需要将某类的条材或板材，下不同规格的毛坯，各种毛坯的数量也可能不同，应如何选取合适的裁法，使毛坯数量符合要求，并且使总料头最少（即所用原材料最少）。

（四）配料问题。在食品、化工、冶炼等企业，常常用几种原料，制成达到含有一定成份的产品，而这些不同原料价格不同，应如何决定配料的方案，才能使生产的产品所含成份合乎要求，而产品的成本最低。

（五）布局问题。各种作物在不同土壤上单位面积产量不一样，如何合理安排各种作物在各种土壤上的种植面积，达到因地制宜，在完成种植计划的前提下，使总产量最多。这是作物布局问题。将某几个地方出产的原料，集中到某几个地方加工成成品，然后再运到某几个成品需要地。有些地方可能既是原料出产地，又是成品需要地，也是成品加工地。因各地间运费不同，成品加工费不同，设厂条件不同，应在什么地方设厂，规模多大，才能满足成品需要地的需要，又使费用（包括运费、加工费）最低。这是工厂布局问题。

在经济领域中应用初等数学方法进行计算，有着悠久的历史，而运用高等数学方法作为分析经济活动，提高经济效果的辅助手段，则是近几十年的事情。线性规划和其他学科一样，也是由于生产力发展的需要，而产生和发展的。随着现代生产的规模越来越大，各个部门之间的相互联系越来越密切和复杂，在生产的组织与计划、交通运输、财贸等方面都要求有新的数学方法来为它们服务，因此，早在本世纪三十年代末四十年代初，康托洛维奇（Конторвич）和希奇柯克（Hitchcok）等在生产组织和运输问题等方面就开始研究应用线性规划这一数学方法；后来，在四十年代末又由旦茨基（Dantzig）等人进一步从理论上给线性规划奠定了基础。特别是随着电子计算机的不断发展，计算能力的大大提高，使这一数学方法在经济活动中的广

泛应用不仅提供了可能性，而且发展的速度也是很快的。在1951年，国际水平只能解约束条件为10个方程的线性规划问题，到了1963年就能解1000—10000个方程的线性规划问题了。另一方面，从时间上看，解一个67个方程的线性规划问题，1956年要一小时，到1963年只要28秒钟。现在，不但解题规模更大，速度更快，而且有的计算机还有解线性规划问题的专用程序，解题时，只要调用这专用程序，输入有关数据，几乎立即就可把要求计算的结果打印或显示出来。

我国在建国初期就开始应用线性规划的方法。如东北的一个物资调运小组，就创造了一个物资调运的图上作业法；1958年又经中国科学院数学研究所的同志给予理论上证明，并在全国推广应用，对我国交通运输战线作出了卓越的贡献。图上作业法具有方法简便，直观易懂，容易推广，比传统的代数方法有着很大优越性。

§1.2 线性规划问题的数学模型

前面提到，线性规划的应用是很广泛的，应用的实际问题各式各样。数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式。对数学模型的研究，有助于我们认识这类问题的性质和寻求它的一般解法。现在先从几个典型的实际问题讲起。

（一）运输问题。

例　设有两个砖厂 A_1, A_2。产量分别为23万块与27万块。它们的产量供应 B_1, B_2, B_3 三个工地。其需要量分别为17万块，18万块和15万块。而自各产地到各工地的运价列表如下：

表 1-1

运价（元/万块）　工地 砖厂	B_1	B_2	B_3
A_1	50	60	70
A_2	60	110	160

问应如何调运，才使总运费最省？

解 设 x_{ij} 表示由砖厂 A_i 运往工地 B_j 砖的数量（单位：万块）($i=1, 2; j=1, 2, 3$)，例如 x_{11} 表示由砖厂 A_1 运往工地 B_1 砖的数量等等。现列表如下：

表 1-2

工地 / 砖厂	B_1	B_2	B_3	发量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	23
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	27
收量	17	18	15	50

因为由砖厂 A_1 运往三个工地砖的总数应为 A_1 的产量 23 万块，即：$x_{11}+x_{12}+x_{13}=23$

同样由砖厂 A_2 运往三个工地砖的总数应为 A_2 的产量 27 万块，即：$x_{21}+x_{22}+x_{23}=27$

另一方面，两个砖厂供给 B_1 工地的砖的数量应等于 B_1 的需要量 17 万块，即：$x_{11}+x_{21}=17$

同理可得：$x_{12}+x_{22}=18$

$x_{13}+x_{23}=15$

因此，调运方案就是满足下面约束条件的一组变量 $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$ 的值：

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \\ x_{ij}\geqslant 0, \quad (i=1, 2; y=1, 2, 3) \end{cases}$$

显然，可行的调运方案有很多个。

现在的问题就是要在这很多个可行的方案中，找一个运费最少的方案，即：

求一组变量 $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}$ 的值，使它满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=23 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=27 \\ x_{11}+x_{21}=17 \\ x_{12}+x_{22}=18 \\ x_{13}+x_{23}=15 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,\ j=1,2,3) \end{cases}
$$

并使目标函数 $S=50x_{11}+60x_{12}+70x_{13}+60x_{21}+110x_{22}+160x_{23}$ 的值最小(即总运费最少)。

一般地，设某种物资有 m 个产地：$A_1, A_2, \cdots, A_m$，联合供应 n 个销地：$B_1, B_2, \cdots, B_n$。各产地产量(单位：吨)，各销地销量(单位：吨)，各产地至各销地单位运价(单位：元/吨)如下表所示：

表 1-3

单价(元/吨) 销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	产量(吨)
A_1	C_{11}	C_{12}	$\cdots$	C_{1n}	a_1
A_2	C_{21}	C_{22}	$\cdots$	C_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	C_{m1}	C_{m2}	$\cdots$	C_{mn}	a_m
销量(吨)	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

表中：a_i 表示产地 A_i 的产量($i=1, 2, \cdots, m$)；

b_j 表示销地 B_j 的销量($j=1, 2, \cdots, n$)；

c_{ij} 表示 A_iB_j 间的单位运价(元/吨)($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)。

问应如何调运，才使总运费最少？

解　当产销平衡$\left(\text{即}\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$时

设 x_{ij} 表示由产地 A_i 运往销地 B_j 的物资数($i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$)。

那么，上述运输问题的数学模型为:

求一组变量 $x_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$的值，使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\cdots+x_{1n}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+\cdots+x_{2n}=a_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{m1}+x_{m2}+\cdots+x_{mn}=a_m \\ x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{m1}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{m2}=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{mn}=b_n \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

并使目标函数 $S=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+\cdots+c_{mn}x_{mn}$ 的值最小。

利用连加号(Σ)，这一数学模型可以写为:

求一组变量 $x_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$的值，使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad (i=1, 2, \cdots, m) \\ \quad \text{(产地 } A_i \text{ 发到各销地的发量总和应等于} A_i \text{的产量)} \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=1, 2, \cdots, n) \\ \quad \text{(各产地发到销地} B_j \text{的发量总和应等于} B_j \text{的销量)} \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n) \\ \quad \text{(调运量不能为负数)} \end{cases}$$

并且使目标函数 $S=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$ 的值最小。

(总运费最少)

如果运输问题中，没有产销平衡这一限制，当产大于销时$\left(即\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$，这一问题的数学模型应为:

求一组变量 $x_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$的值，使它满足

$$
约束条件\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i \quad (i=1, 2, \cdots, m) \\ \qquad (产地A_i发到各销地的发量总和不超过A_i的产量) \\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad (j=1, 2, \cdots, n) \\ \qquad (各产地发到销地B_j的发量总和应等于B_j的销量) \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n) \\ \qquad (调运量不能为负数)\end{cases}
$$

并且使目标函数 $S=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$ 的值最小。

（总运费最少）

（二）布局问题。

（1）作物布局。

某生产队要在 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ n 块地上，种植 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ m 种作物，各块土地亩数，各种作物计划播种面积及各种作物在各块地上的单产(每亩的产量)如下页表 1—4 所示，问应如何合理安排种植计划，才使总产量最多。

这里假定$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j$(即计划播种总面积等于土地面积)。

解　设 x_{ij} 为土地 B_j 种植作物 A_i 的亩数$(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$，那么作物布局问题的数学模型为:

求一组变量 $x_{ij}(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$的值，使它满足

$$
\text{约束条件}\begin{cases}
\sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\
\quad\text{（在各块地上种植作物 } A_i \text{ 的总亩数，应等于 } A_i \\
\quad\text{的计划播种数）} \\
\sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \quad (j=1,2,\cdots,n) \\
\quad\text{（在土地 } B_j \text{ 上种植各种作物的总亩数，应等于} \\
\quad B_j \text{ 的面积）} \\
x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n) \\
\text{（种植数不能为负数）}
\end{cases}
$$

并且使目标函数 $S=\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$ 的值最大。

（总产量最多）

表 1-4

单产（斤/亩） 土地 / 作物	B_1 B_2 $\cdots$ B_n	播种面积（亩）
A_1	C_{11} C_{12} $\cdots$ C_{1n}	a_1
A_2	C_{21} C_{22} $\cdots$ C_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\vdots$	$\vdots$
A_m	C_{m_1} C_{m_1} $\cdots$ C_{mn}	a_n
土地亩数	b_1 b_2 $\cdots$ b_n	

表中：a_i 表示作物 A_i 的播种面积 $(i=1,2,\cdots,m)$；

b_j 表示土地 B_j 的亩数 $(j=1,2,\cdots,n)$；

C_{ij} 表示在土地 B_j 上种植作物 A_i 的单产数 $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$。

这一数学模型和前面运输问题的数学模型相同。具有这样数学

模型的问题还有机床加工零件的问题(见习题一第2题)等，我们称这类问题为康—希问题，或者统称为运输问题。

(2) 工厂布局问题。

设有 n 个地方 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，在一个计划期内，已知：$A_i(i=1, 2, \cdots, n)$产某种原料 a_i 吨，需要成品 b_i 吨(假定用 c 吨原料可制得一吨成品)，在 A_i 设厂加工成品的加工费为 d_i 元/吨，在A_i 设厂生产成品数最多为e_i吨，最少为f_i吨，(如果在 A_p 不能设厂，那么$e_p=f_p=0$，如果在 A_q 设厂产品数不限，那么 $e_q=$成品数,$f_q=0$)。c_{ij} 表示原料或成品从A_i 运到$A_j(i, j=1, 2, \cdots, n)$的单位运价，问应在何地设厂，生产多少成品，才能既满足需要，又使生产费用(包括原料和成品运费，成品加工费)最少？

解　设 x_{ij} 表示由 A_i 运到 A_j 的原料数(单位：吨)$(i, j=1, 2, \cdots, n)$，其中 $j=i$ 时表示 A_i 留用数；y_{ij} 表示由 A_i 运到 A_j 的成品数(单位：吨)$(i, j=1, 2, \cdots, n)$，其中 $j=i$ 时，表示 A_i 留用数；z_i 表示 A_i 设厂的年产成品数(单位：吨)$(i=1, 2, \cdots, n)$。那么，这一问题的数学模型为：

求一组变量 $x_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，$y_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$，$z_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的值，使它满足以下约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

(从 A_i 运往各地原料总数以及留用数应等于 A_i 的原料产量)

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ji}=cz_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

(从各地运往 A_i 的原料总数以及 A_i 的留用数应等于在 A_i 设厂所需原料数)

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}=z_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

（由 A_i 运往各地的成品总数以及留用数应等于 A_i 的产品数）

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ji}=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

（从各地运到 A_i 的成品数以及 A_i 的留用数应等于 A_i 所需成品数）

$$f_i \leqslant z_i \leqslant e_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

（在 A_i 生产的成品数必须在 f_i 至 e_i 之间）

$$x_{ij} \geqslant 0, y_{ij} \geqslant 0 \quad z_i \geqslant 0$$

（调运原料教，调运成品数，生产成品数都不能为负数）

并且使目标函数 $S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x_{ij}+y_{ij})+\sum_{i=1}^{n} d_i z_i$ 的值最小。

（生产总费用最少）

（三）生产组织与计划问题。

（1）设某车间用机床 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 生产由 $B_1, B_2 \cdots B_n$ 这 n 个不同零件构成的机器，如果每架机器需要各种零件的数目成比例 $\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n$，机床 A_i 生产零件 B_j 的效率（每日生产零件数）为 c_{ij}，问应如何分配机床负荷，才使生产的机器最多。

解　设 x_{ij} 为机床 A_i 生产零件 B_j 的时间（单位：日）$(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$，这一问题的数学模型为：

求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使它满足以下约束条件：

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

（机床 A_i 生产各种零件时间总和应等于 1）

$$\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1} : \sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2} : \cdots : \sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in} = \lambda_1 : \lambda_2 : \cdots : \lambda_n$$

$$\text{即:}\quad \frac{\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}}{\lambda_1}=\frac{\sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}}{\lambda_2}=\cdots=\frac{\sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in}}{\lambda_n}=S$$

（各机床一天生产各种零件总数，应成已定比例）

$$x_{ij}\geqslant 0\quad (i=1,2,\cdots,m;\ z=1,2,\cdots,n)$$

（生产零件时间不能为负数）

并且使目标函数 $S=\dfrac{\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}}{\lambda_1}$ 的值最大。

（生产机器最多）

特别地，当 $\lambda_1:\lambda_2:\cdots:\lambda_n=1:1:\cdots:1$（即每架机器需要各种零件数目相同）时，它的数学模型为：

求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 的值，使它满足

$$\text{约束条件}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1\quad (i=1,2,\cdots,m)\\[2ex] \sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}=\sum_{i=1}^{m} c_{i2}x_{i2}=\cdots=\sum_{i=1}^{m} c_{in}x_{in}\\[2ex] x_{ij}\geqslant 0\quad (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

并且使目标函数 $S=\sum_{i=1}^{m} c_{i1}x_{i1}$ 的值最大。

（2）设用 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 种原料，可以生产 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 种产品。现有原料数，每单位产品所需原料数，及每单位产品可得利润数如下表所示：

表 1-5

单位产品所需原料 产品 / 原料	B_1 B_2 $\cdots$ B_n	现有原料
A_1	C_{11} C_{12} $\cdots$ C_{1n}	a_1
A_2	C_{21} C_{22} $\cdots$ C_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$ $\cdots$ $\vdots$	$\vdots$
A_m	C_{m1} C_{m2} $\cdots$ C_{mn}	a_m
单位产品可得利润	b_1 b_2 $\cdots$ b_n	

问应如何组织生产才能使利润最大？

解　设 x_j 为生产产品 $B_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 的计划数，那么这一问题的数学模型为：

求一组变量 $x_j(j=1, 2, \cdots, n)$ 的值，使它满足

约束条件
$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_j \leqslant a_i \quad (i=1, 2, \cdots, m) \\ \text{(生产各种产品所需原料 } A_i \text{ 的总数不能超过 } A_i \text{ 现有数 } a_i\text{)} \\ x_j \geqslant 0 \quad (j=1, 2, \cdots, n) \\ \text{(各种产品计划生产数不能为负数)} \end{cases}$$

并且使目标函数 $S=\sum_{j=1}^{n} b_jx_j$ 的值最大。

(总利润最多)

(3) 某工厂用机床 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 加工 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 种零件，在一个生产周期，各机床只能工作的机时、工厂必须完成各零件加工数、各机床加工每个零件的时间(单位：机时/个)和加工每个零件的成本(单位：元/个)如表 1—6 和表 1—7 所示，问在这个生产周期，怎样安排各机床的生产任务，才能既完成加工任务，又使总的加工成本最低。