

群交叉 Yetter-Drinfel'd 范畴

王栓宏 著



科学出版社

群交及 Yetter-Drinfel'd 范畴

王忠信 著

科学出版社

群交叉 Yetter-Drinfel'd 范畴

王栓宏 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要介绍 Yetter-Drinfel'd 模范畴、Schur-Weyl 对偶定理、群交叉 Yetter-Drinfel'd 辫子张量范畴和扭曲 Drinfel'd 偶的基本概念和理论,重点是群交叉 Yetter-Drinfel'd 范畴的构造方法. 本书内容由浅入深,既有理论又有新的应用,反映了近 20 年来国际上在辫子张量范畴理论领域最新的研究成果.

本书可供高等院校数学和数学物理专业方向的高年级本科生、研究生、教师以及研究人员阅读和参考.

图书在版编目(CIP)数据

群交叉 Yetter-Drinfel'd 范畴/王栓宏著. —北京: 科学出版社, 2012

ISBN 978-7-03-033530-2

I. ①群… II. ①王… III. ①群论 IV. ①O152

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 021147 号

责任编辑: 赵彦超 / 责任校对: 张小霞

责任印制: 钱玉芬 / 封面设计: 王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 3 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2012 年 3 月第一次印刷 印张: 10 3/4

字数: 205 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前言

1967年,著名的诺贝尔物理学奖获得者杨振宁教授得到具有某种排斥作用势的一维薛定谔多体系统的精确解.1972年,澳大利亚 Baxter 教授得到六顶角统计模型的精确解,这是多体统计理论方面的重大进展.在这两个模型精确求解过程中出现了一个关键性的非线性方程——杨-Baxter 方程.利用这个方程,这些模型就可以精确求解,同时,对一大类低维量子可积模型有着重要的应用.

近30年来,理论物理学家和数学家对量子杨-Baxter 方程进行了深入的研究,并在20世纪80年代取得了重大的突破.在求量子杨-Baxter 方程的解的研究中,量子群理论得以建立,这一理论本身也是数学理论的重大发展.前苏联数学物理学家 Drinfel'd 因其在这一领域的突出贡献而荣获1990年 Fields 奖.

从范畴的角度,一个辫子张量范畴中的辫子可以提供量子杨-Baxter 方程的解.进一步,一个 Hopf 代数的 (余) 表示范畴是一个辫子张量范畴的充分必要条件是这个 Hopf 代数是 (余) 拟三角 Hopf 代数 (即量子群).这两类范畴又是任意 Hopf 代数上的 Yetter-Drinfel'd 范畴的特殊情况,而 Yetter-Drinfel'd 范畴是有限维有点 Hopf 代数分类的重要工具.如何构造这类辫子张量范畴就成为本书特别关注的问题.

自1991年开始,作者在这一领域开展了一系列研究工作,如 Radford 双积构造、拟三角 Hopf 代数的构造、Schur-Weyl 对偶定理、群交叉辫子张量范畴、扭曲 Drinfel'd 偶以及群交叉 Yetter-Drinfel'd 范畴,取得了一些可喜成绩.尤其是作者两次到美国印第安纳大学访问著名代数拓扑学家 Turaev,使得我们在这一领域的研究工作拓展到了群交叉 Yetter-Drinfel'd 范畴——一种特殊的群交叉辫子张量范畴,从而为解群量子杨-Baxter 方程提供了新的数学途径.

本书的目的是介绍国际前沿学科的研究方向:群交叉 Yetter-Drinfel'd 范畴.读者可以从书中领略到这一理论具有很强的概括性、处理问题简明、涉及面广的特点.本书的取材具有很深的拓扑学以及数学物理学背景,建立在作者近年来与同行专家合作研究的基础之上.在写作方面,本书尽量做到自成体系,当然也假定读者熟知范畴论与 Hopf 代数的基本概念.

在本书付梓之际,作者首先感谢导师许永华教授在研究生阶段对作者的谆谆教导;感谢印第安纳大学数学系国际著名代数拓扑学家 Turaev 教授的两次邀请和阿根廷卡尔多瓦大学数学物理系国际著名代数学家 Andruskiewitsch 教授的邀请,感谢他们在作者访问期间所给予的各种帮助与指导性的交流合作.

作者也借此机会感谢马天水博士与杨涛博士对本书稿的宝贵建议;感谢博士生

王伟、陈全国、郭双键、董丽红和王圣祥的认真阅读和打印工作,尤其感谢王伟对全书的统一校对工作.最后,作者感谢妻子与女儿这么多年来无怨无悔的大力支持.

本书得到了东南大学“985 项目”、国家自然科学基金项目 (No. 10871042) 以及江苏省基础 Research 计划项目 (No. BK2009258) 的资助.

书中难免有不足甚至错误之处,恳请读者批评指正.

作 者

2011 年 9 月于南京

目 录

前言

第 1 章	Yetter-Drinfel'd 模范畴	1
1.1	概念和例子	1
1.2	扭曲张量双积的构造	5
1.3	余拟三角 Hopf 代数结构	11
1.4	拟三角 Hopf 代数结构	19
第 2 章	Schur-Weyl 对偶定理	28
2.1	辫子代数	28
2.2	辫子李代数	35
2.3	辫子李代数的泛包络代数	39
2.4	Schur-Weyl 对偶定理	50
第 3 章	群交叉 Yetter-Drinfel'd 范畴	57
3.1	基本概念与性质	57
3.2	拟三角 Hopf 群余代数	62
3.3	量子偶构造	66
3.4	群交叉 Yetter-Drinfel'd 范畴	68
第 4 章	扭曲 Drinfel'd 偶	72
4.1	Hopf 代数的斜配对	72
4.2	拟三角弱 Hopf 群余代数	85
4.3	拟三角乘子 Hopf 代数	104
4.4	拟三角群余分次乘子 Hopf 代数	112
第 5 章	群交叉辫子张量范畴	124
5.1	基于弱 Hopf 代数的构造方法	124
5.2	基于乘子 Hopf 代数的构造方法	136
5.3	拟三角拟 Hopf 群余代数	147
参考文献		156

第 1 章 Yetter-Drinfel'd 模范畴

本章主要介绍 Yetter-Drinfel'd 模范畴的基本概念与 Radford 双积之间的联系. 这个范畴包括了 (余) 拟三角 Hopf 代数的 (余) 模表示范畴, 这些都是一些特殊的辫子张量范畴, 其中的辫子提供了量子杨-Baxter 方程的解. 其次, 我们知道一个 Hopf 代数的 (余) 模表示范畴是辫子张量范畴的充分必要条件是该 Hopf 代数是 (余) 拟三角 Hopf 代数. 于是, 本章主要给出如何构造 (余) 拟三角 Hopf 代数的方法.

我们始终工作在某个固定的域 $\mathbb{F}$ 上. 这意味着所有的张量积 $\otimes$, Hom 以及研究对象均指域 $\mathbb{F}$ 上. 设 H 是一个 Hopf 代数, 其余乘记为 Δ , 余单位 ε 和对极 (antipode) 记为 S . 记左 H 模范畴为 ${}_H\mathbf{M}$ 和左 H 余模范畴为 ${}^H\mathbf{M}$. 利用 Hopf 代数理论中的标准术语与符号, 例如用 Sweedler-Heyneman 记法, 记 $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$, 对于任意 $h \in H$. 尤其, 对 $m \in M \in {}^H\mathbf{M}$, 记余作用为 $\rho(m) = \sum m_{(-1)} \otimes m_0$ (见文献 [2, 105, 107, 130, 189, 190]). 为了记号方便, 我们常常省略括号和求和号 $\sum$, 例如, 在不致引起误解的前提下, 记 $\Delta(h) = h_1 \otimes h_2$. 对余模表示有类似记法.

1.1 概念和例子

本节主要介绍辫子张量范畴、(余) 拟三角 Hopf 代数、Yetter-Drinfel'd 模范畴以及 Radford 双积, 这些概念可以在文献 [24, 58, 72, 82, 99, 101, 118, 119] 中查到.

首先回顾, 一个张量范畴 $\mathcal{C} = (C, \otimes, \mathbb{I}, a, l, r)$ 是一个范畴 $\mathcal{C}$ 带有一个函子 $\otimes : C \times C \rightarrow C$ (张量积), 一个对象 $\mathbb{I} \in C$ (单位对象), 一族自然同构 $a = a_{U,V,W} : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$, 对任意 $U, V, W \in C$ (结合子), 及可逆态射 $l = l_U : \mathbb{I} \otimes U \rightarrow U$ (左单位子) 和 $r = r_U : U \otimes \mathbb{I} \rightarrow U$ (右单位子), 对任意 $U \in C$, 满足: 对任意 $U, V, W, X \in C$, 有 $a_{U,V,W} \otimes a_{U \otimes V, W, X} = (id_U \otimes a_{V,W,X}) a_{U, V \otimes W, X} (a_{U,V,W} \otimes id_X)$ (五角等式) 和 $(r_U \otimes id_V) = (id_U \otimes l_V) a_{U, \mathbb{I}, V}$ (三角等式). 一个张量范畴 $\mathcal{C}$ 称为严格的, 如果结合子、左单位子和右单位子为恒等式. 众所周知, 每个张量范畴等价于一个严格张量范畴.

一个辫子张量范畴^[70, 96] $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴带有张量积 $\otimes$ 和单位对象 $\mathbb{I}$, 且对任意 $M \in C$, 有自然同构 $\tau_{M,-} : M \otimes - \rightarrow - \otimes M$ 和 $\tau_{-,M} : - \otimes M \rightarrow M \otimes -$, 使得 $\tau_{-,V}(W) = \tau_{-,W}(V)$ 和下面条件成立:

$$\begin{cases} \tau_{V \otimes W, -} = (\tau_{V, -} \otimes W) \circ (V \otimes \tau_{W, -}), \\ \tau_{-, V \otimes W} = (V \otimes \tau_{-, W}) \circ (\tau_{-, V} \otimes W), \end{cases}$$

对任意 $V, W \in \mathcal{C}$.

作为推论, 容易得到 $\tau_{V, \mathbb{I}} = \tau_{\mathbb{I}, V} = id_V$. 称 $\mathcal{C}$ 是**对称范畴**, 如果 $\tau_{V, W} \circ \tau_{W, V} = id$, 对任意 $V, W \in \mathcal{C}$. 尤其, 映射 $\tau_{A, A} : A \otimes A \longrightarrow A \otimes A$ 称为**对合**, 如果 $\tau_{A, A}^2(a \otimes a') = a \otimes a'$, 对任意 $a, a' \in A \in \mathcal{C}$.

定义 1.1.1 (1) 一个**拟三角 Hopf 代数**(quasitriangular Hopf algebra) 是一对 (H, R) , 这里 H 是一个 Hopf 代数且 $R = \sum R^{(1)} \otimes R^{(2)} \in H \otimes H$, 满足下面条件:

$$\begin{aligned} \text{(QT1)} \quad & \sum \varepsilon(R^{(1)})R^{(2)} = \sum R^{(1)}\varepsilon(R^{(2)}) = 1_H; \\ \text{(QT2)} \quad & \sum \Delta(R^{(1)}) \otimes R^{(2)} = \sum R^{(1)} \otimes r^{(1)} \otimes R^{(2)}r^{(2)}; \\ \text{(QT3)} \quad & \sum R^{(1)} \otimes \Delta(R^{(2)}) = R^{(1)}r^{(1)} \otimes r^{(2)} \otimes R^{(2)}; \\ \text{(QT4)} \quad & \sum h_2R^{(1)} \otimes h_1R^{(2)} = \sum R^{(1)}h_1 \otimes R^{(2)}h_2, \end{aligned}$$

对任意 $h \in H$, 这里 $r = R$. 称 R 为 H 上的**拟三角结构**. 进一步, 如果 $R^{-1} = \sum R^{(2)} \otimes R^{(1)}$, 则 (H, R) 称为**三角 Hopf 代数**(triangular Hopf algebra).

(2) 对偶地, 一个**余拟三角 Hopf 代数**(co-quasitriangular Hopf algebra) 是一对 (B, σ) , 其中 B 是一个 Hopf 代数, $\sigma \in \text{Hom}(B \otimes B, \mathbb{F})$, 并且对任意的 $b, b', b'' \in B$, 下面条件成立:

$$\begin{aligned} \text{(BR1)} \quad & \sigma(1, b) = \sigma(b, 1) = \varepsilon(b); \\ \text{(BR2)} \quad & \sigma(bb', b'') = \sum \sigma(b, b'_1)\sigma(b', b''_2); \\ \text{(BR3)} \quad & \sigma(b, b'b'') = \sum \sigma(b_1, b'')\sigma(b_2, b'); \\ \text{(BR4)} \quad & \sum b'_1b_1\sigma(b_2, b'_2) = \sum \sigma(b_1, b'_1)b_2b'_2. \end{aligned}$$

也称 σ 是 B 上的一个**余拟三角结构**. 而且, 如果 $\sigma^{-1}(b, b') = \sigma(b', b)$ 成立, 则称 (B, σ) 为**余三角 Hopf 代数**(co-triangular Hopf algebra).

回顾, 一个左 H 模代数 A 是范畴 ${}_H M$ 中的一个代数, 即如果对所有的 $a, b \in A$ 和 $h \in H$,

$$h \cdot (ab) = \sum (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b) \text{ 且 } h \cdot 1_A = \varepsilon(h)1_A.$$

类似地, 一个左 H 模余代数 C 是范畴 ${}_H M$ 中的一个余代数.

一个左 H 余模代数 A 是范畴 ${}^H M$ 中的一个代数, 即对任意的 $a, b \in A$, 有

$$\rho(ab) = \sum a_{(-1)}b_{(-1)} \otimes a_0b_0, \quad \rho(1_A) = 1_H \otimes 1_A.$$

类似地, 一个左 H 余模范代数 C 是范畴 ${}^H\mathbf{M}$ 中的一个余代数.

定义 1.1.2 设 H 为 Hopf 代数且其对极 S 为双射. 一个 (左左) Yetter-Drinfel'd 模 V 是一个向量空间 V 带有一个左 H 模作用 $\cdot$ 和一个左 H 余模作用 ρ , 并且满足下面条件:

$$\rho(h \cdot v) = \sum h_1 v_{(-1)} S(h_3) \otimes h_2 \cdot v_0, \quad h \in H, v \in V.$$

Yetter-Drinfel'd 模和左 H 线性左 H 余线性映射构成的范畴记为 ${}^H_H\mathcal{YD}$, 称之为 Yetter-Drinfel'd 模范畴. 这是一个辫子张量范畴, 其辫子为

$$\tau : M \otimes N \longrightarrow N \otimes M, \quad m \otimes n \mapsto m_{(-1)} \cdot n \otimes m_0,$$

对任意 $m \in M \in {}^H_H\mathcal{YD}$ 和 $n \in N \in {}^H_H\mathcal{YD}$.

注 相关的研究见文献 [32, 34—36, 62, 71, 104, 114, 125—127, 155, 159, 162, 166, 167, 175, 176, 181, 182].

例 1.1.3 (1) 若 $H = (H, \sigma)$ 是余拟三角 Hopf 代数, 则左 H 余模范畴 ${}^H\mathbf{M}$ 是 Yetter-Drinfel'd 模范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 的辫子张量子范畴, 其模作用: $h \cdot m = \sum \sigma(h, m_{(-1)}) m_0$, 对任意的 $h \in H, m \in M \in {}^H\mathbf{M}$. 而且带有辫子结构: $\tau_{M,N}(m \otimes n) = \sigma(m_{(-1)}, n_{(-1)}) n_0 \otimes m_0$.

(2) 设 $H = (H, R)$ 是拟三角 Hopf 代数, 则范畴 ${}_H\mathbf{M}$ 是 Yetter-Drinfel'd 模范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 的辫子张量子范畴, 其余模作用: $\rho(m) = \sum R^{(2)} \otimes R^{(1)} \cdot m$, 对 $m \in M \in {}_H\mathbf{M}$, 而且带有辫子结构: $\tau_{M,N}(m \otimes n) = R^{(2)} \cdot n \otimes R^{(1)} \cdot m$.

(3) 设 (H, R) 是一个拟三角 Hopf 代数, $(B, \langle | \rangle)$ 是余拟三角 Hopf 代数. 那么一个左广义 Long 模^[168] 是一个向量空间 $(M, \cdot, \rho)$ 满足 $(M, \cdot) \in {}_H\mathbf{M}$ 且 $(M, \rho) \in {}^B\mathbf{M}$ 和下面相容条件:

$$\rho(h \cdot m) = m_{(-1)} \otimes h \cdot m_0,$$

对任意 $m \in M, h \in H$. 那么可以形成一个范畴 ${}^B_H\mathcal{L}$. 于是该范畴为 Yetter-Drinfel'd 范畴 ${}^{H \otimes B}_{H \otimes B}\mathcal{YD}$ 的辫子张量子范畴. 事实上, 对 $M \in {}^B_H\mathcal{L}$, 定义

$$(h \otimes x) \cdot m = \langle x | m_{(-1)} \rangle h \cdot m_0 \quad \text{和} \quad \rho(m) := m_{[-1]} \otimes m_{[0]} := R^{(2)} \otimes m_{(-1)} \otimes R^{(1)} \cdot m_0,$$

对任意 $h \in H, x \in B, m \in M$. 直接验证可得 $(M, \cdot, \rho) \in {}^{H \otimes B}_{H \otimes B}\mathcal{YD}$. 而且, 带有辫子结构:

$$\begin{aligned} \tau_{M,N}(m \otimes n) &= m_{[-1]} \cdot n \otimes m_{[0]} = (R^{(2)} \otimes m_{(-1)}) \cdot n \otimes R^{(1)} \cdot m_0 \\ &= \langle m_{(-1)} | n_{(-1)} \rangle (R^{(2)} \cdot n_0 \otimes R^{(1)} \cdot m_0). \end{aligned}$$

(4) 设 G 是一个群. 对 $g \in G$, 设 g 的共轭类 X 有限且生成 G . 对 $V \in {}^{\mathbb{F}G}_{\mathbb{F}G}\mathcal{YD}$. 设 $\rho : V \longrightarrow \mathbb{F}G \otimes V$ 是 $\mathbb{F}G$ 在 V 上的余作用. 那么 $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$, 这里 $V_g = \{v \in V \mid \rho(v) = g \otimes v\}$. 进一步, $hV_g = V_{hgh^{-1}}$.

(5) 设 (δ, W) 是 $C_G(g)$ 的一个表示, 且 $M(g, \delta) = \text{Ind}_{C_G(g)}^G(\delta)$ 是诱导 G 模. 那么 $M(g, \delta) \in {}_{\mathbb{F}G}^G\mathcal{YD}$, 其中 $\mathbb{F}G$ 在 $M(g, \delta)$ 上的余作用为 $\rho(h \otimes w) = hgh^{-1} \otimes (h \otimes w)$ 对 $h \in H, w \in W$.

(6) 设 $\mathbb{E}$ 为 $\mathbb{F}$ 的域扩张. 设 $V_{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \otimes_{\mathbb{F}} V$. 那么 $V_{\mathbb{E}} \in {}_{\mathbb{F}G}^{\mathbb{E}G}\mathcal{YD}$.

定理 1.1.4(Radford 双积)^[118] 设 H 是一个 Hopf 代数, A 既为代数又为余代数 (不必为双代数). 那么 A 是 Yetter-Drinfel'd 范畴 ${}^H_H\mathcal{YD}$ 中的一个辫子 Hopf 代数当且仅当冲积 (smash product) $A \# H$ 构成一个 Hopf 代数, 其上的余乘为冲余积 (smash coproduct).

注 1.1.5 (1) Radford 双积也被 Majid 称为波色化子, 在有限维有点 Hopf 代数的分类中起着非常重要的作用 (见文献 [3, 4, 7, 9, 20, 31, 37, 38, 65, 66, 87, 88, 97, 98, 112, 113, 170, 183]).

(2) 一个 Yetter-Drinfel'd 模可以诱导出一个余环 (coring)^[24, 189], 也可以由架和 2 余循环来研究^[8].

(3) 设 A 是 Yetter-Drinfel'd 模范畴 ${}_{\mathbb{F}G}^{\mathbb{F}G}\mathcal{YD}$ 中的一个辫子 Hopf 代数. 记其在此范畴中的余乘为: $\Delta_A: A \rightarrow A \otimes A$, $\Delta_A(a) = a^{[1]} \otimes a^{[2]}$. 那么冲积 $A \# \mathbb{F}G$ (即 A 的波色化子) 是一个 Hopf 代数. 作为向量空间, $A \# \mathbb{F}G = A \otimes \mathbb{F}G$, 但其上的乘法和余乘分别为

$$(a \# h)(b \# g) = a(h \cdot b) \# hg;$$

$$\Delta_{A \# \mathbb{F}G}(a \# h) = a^{[1]} \# a^{[2]}_{(-1)} h \otimes a^{[2]}_0 \# h,$$

对 $a, b \in A, h, g \in G$. 进一步, 有两个 Hopf 代数同态: $\iota: \mathbb{F}G \rightarrow A \# \mathbb{F}G$, $\iota(g) = 1 \# g$ 和 $\pi: A \# \mathbb{F}G \rightarrow \mathbb{F}G$, $\pi(a \# h) = \varepsilon(a)h$, 满足 $\pi\iota = id$.

例 1.1.6 设 B 是一个 Hopf 代数带有两个 Hopf 代数同态: $\iota: \mathbb{F}G \rightarrow B$ 和 $\pi: B \rightarrow \mathbb{F}G$ 使得 $\pi\iota = id$. 那么 $A = \{b \in B \mid (id \otimes \pi)\Delta(b) = b \otimes 1\}$ 是 Yetter-Drinfel'd 模范畴 ${}_{\mathbb{F}G}^{\mathbb{F}G}\mathcal{YD}$ 中的一个辫子 Hopf 代数. 事实上, 作为代数 A 是 B 的一个子代数. A 的 $\mathbb{F}G$ 模作用, $\mathbb{F}G$ 余模作用和余乘分别为: $h \cdot a = \iota(h)a\iota(h^{-1})$, $\rho(a) = \sum \pi(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}$ 和 $\Delta_A(a) = \sum \lambda(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}$, 其中 $\lambda: B \rightarrow A$ 定义为 $\lambda(b) = \sum b_{(1)}\iota(\pi(S_B(b_{(2)})))$. A 上的对极为: $S_A: A \rightarrow A$, $S_A(a) = \sum \iota\pi(a_{(1)})S_B(a_{(2)})$. 那么 $A \# \mathbb{F}G \rightarrow B$, $a \# h \mapsto a\iota(g)$ 是一个 Hopf 代数同构.

例 1.1.7 设 B 是一个 Hopf 代数. 设 $\sigma: B \otimes B \rightarrow \mathbb{F}$ 是一个正则的 2 余循环映射, 即满足: 对 $x, y, z \in B$,

$$\sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma(x_{(2)}y_{(2)}, z) = \sigma(y_{(1)}, z_{(1)})\sigma(x, y_{(2)}z_{(2)}); \quad \sigma(x, 1) = \varepsilon(x) = \sigma(1, x).$$

由文献 [55], 有扭曲 Hopf 代数 B_{σ} : 作为余代数 $B_{\sigma} = B$, 但具有新的乘法 $\cdot_{\sigma}$ 为

$$x \cdot_{\sigma} y = \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)}\sigma^{-1}(x_{(3)}, y_{(3)}).$$

考虑 $B = A \# \mathbb{F}G$ (见例 1.1.6). 设 $\sigma : G \otimes G \rightarrow \mathbb{F}^\times$ 是一个正则的 2 余循环映射. 那么 σ 可以扩张到 A 上, $\sigma_\pi = \sigma(\pi \otimes \pi)$. 因为 $\mathbb{F}G$ 是余交换的, 所以 $\iota : \mathbb{F}G \rightarrow B_{\sigma_\pi}$ 和 $\pi : B_{\sigma_\pi} \rightarrow \mathbb{F}G$ 仍然是 Hopf 代数同态. 那么 $A_\sigma = \{b \in B_{\sigma_\pi} \mid (id \otimes \pi)\Delta(b) = b \otimes 1\}$ 是 Yetter-Drinfel'd 模范畴 ${}_{\mathbb{F}G}^G \mathcal{YD}$ 中的一个辫子 Hopf 代数.

例 1.1.8 设 (B, β) 为余拟三角 Hopf 代数. 设 A 为范畴 ${}^B \mathcal{M}$ 中的 Hopf 代数. 则 A 是范畴 ${}_B^B \mathcal{YD}$ 中 Hopf 代数, 其 B 作用为 $b \rightarrow a = \beta(a_{(-1)}, b)a_0$, $a \in A, b \in B$.

下面命题可直接验证.

命题 1.1.9 设 H 为 Hopf 代数且其对极 S 为双射, A 为范畴 ${}_H^H \mathcal{YD}$ 中一个余代数. 令 $\underline{A}^{\text{cop}} = A$ (作为向量空间), 且和 A 有相同的余单位 ε . 定义一个新余乘如下:

$$\underline{\Delta}(a) = S^{-1}(a_{2(-1)}) \cdot a_1 \otimes a_{20}, \quad \text{对 } a \in A.$$

那么 $(\underline{A}^{\text{cop}}, \underline{\Delta}, \varepsilon)$ 是通常的余结合余代数.

1.2 扭曲张量双积的构造

设 A 和 B 为结合代数且分别带有单位元 1_A 和 1_B . 假设 $R : B \otimes A \rightarrow A \otimes B$ 是一个线性映射. 在向量空间 $A \otimes B$ 上定义乘法

$$m_{A \#_R B} = (m_A \otimes m_B)(\iota_A \otimes R \otimes \iota_B), \quad \text{或 } (a \#_R b)(a' \#_R b') = aa' \#_R bb', \quad (1.1)$$

其中 $a_R \otimes b_R = R(b \otimes a)$, $\forall a, a' \in A, b, b' \in B$. 记带有该乘法的 $A \otimes B$ 为 $A \#_R B$. 如果 $A \#_R B$ 是一个结合代数且带有单位元 $1_A \# 1_B$, 则称 $A \#_R B$ 为扭曲张量积代数 (twisted tensor product algebra). 此时映射 R 被称为一个扭曲映射 (twisted map).

由文献 [22, 142] 知, $A \#_R B$ 是扭曲张量积代数当且仅当下列条件成立:

$$R(m_B \otimes \iota_A) = (\iota_A \otimes m_B)(R \otimes \iota_B)(\iota_B \otimes R), \quad (1.2)$$

$$R(\iota_B \otimes m_A) = (m_A \otimes \iota_B)(\iota_A \otimes R)(R \otimes \iota_A), \quad (1.3)$$

$$R(b \otimes 1_A) = 1_A \otimes b, \quad R(1_B \otimes a) = a \otimes 1_B. \quad (1.4)$$

定义 1.2.1 设 A 和 B 是两个 Hopf 代数. 如果扭曲张量积 $A \#_R B$ 带上通常的张量积余代数结构是一个 Hopf 代数, 则称 $A \#_R B$ 为扭曲张量积 Hopf 代数.

例 1.2.2 (1) 设 B 是 Hopf 代数且 A 既是代数又是余代数 (但不必是双代数). 假设 A 是左 B 模代数. 那么有扭曲映射 $R : B \otimes A \rightarrow A \otimes B$, 定义为 $R(b \otimes a) = \sum b_{(1)} \cdot a \otimes b_{(2)}$, $\forall a \in A, b \in B$, 其中 $\cdot$ 表示 B 在 A 上的左作用. 因此可得通常的冲积 $A \#_R B = A \# B$, 其乘法结构为 $(a \# b)(a' \# b') = \sum a(b_{(1)} \cdot a') \# b_{(2)} b'$, 对于 $a, a' \in A, b, b' \in B$ (见文献 [105]).

(2) 设 B 是 Hopf 代数 (其对极为 S_B) 且 A 为 B 双模代数. 则有扭曲映射 $R: B \otimes A \rightarrow A \otimes B$ 定义为 $R(b \otimes a) = \sum b_{(1)} \rightarrow a \leftarrow S_B(b_{(3)}) \otimes b_{(2)}$. 有扭曲冲积 $A \star B$, 其乘法为 $(a \otimes b)(a' \otimes b') = \sum a(b_{(1)} \rightarrow a' \leftarrow S_B(b_{(3)})) \otimes b_{(2)}b'$, 对于 $a, a' \in A, b, b' \in B$, 其中 $\rightarrow$ 和 $\leftarrow$ 分别表示 B 在 A 上的左和右作用^[171, 172].

(3) 作为 (2) 的特殊情况, 称 (A, B, θ) 为斜配对(skew pairing)^[55], 如果 A 和 B 为两个 Hopf 代数且有一元素 $\theta \in \text{Hom}(A \otimes B, \mathbb{F})$ 满足下面条件:

$$(\text{SP1}): \theta(1_A, b) = \varepsilon(b), \theta(a, 1_B) = \varepsilon(a);$$

$$(\text{SP2}): \theta(aa', b) = \theta(a, b_1)\theta(a', b_2) \text{ 和}$$

$$(\text{SP3}): \theta(a, bb') = \theta(a_1, b')\theta(a_2, b), \text{ 对任意 } a, a' \in A, b, b' \in B.$$

那么可以构造一个有如下结构的新代数, 即量子偶 $A \bowtie_\theta B$ (或 $A \bowtie B$). 作为余代数, 量子偶等于张量积余代数 $A \otimes B$. 而乘法由下面扭曲映射决定:

$$R(b \otimes a) = \theta(a_1, b_1)a_2 \otimes b_2\theta^{-1}(a_3, b_3), \quad \forall a \in A, b \in B.$$

(4) 尤其作为 (3) 的特殊情况, 给定一个余拟三角 Hopf 代数 (A, β) , 可以构造量子偶 $A \bowtie_\beta A$, 其乘法由下面扭曲映射决定: $R(x \otimes a) = \beta(a_1, x_1)a_2 \otimes x_2\beta^{-1}(a_3, x_3)$, $\forall a, x \in A$. 而且量子偶 $A \bowtie_\beta A$ 有余拟三角结构 α , 其中

$$\alpha(a \otimes b, a' \otimes b') = \beta(a, a'_1b'_1)\beta^{-1}(a'_2b'_2, b), \quad \forall a, a', b, b' \in A.$$

余拟三角 Hopf 代数 $(A \bowtie_\beta A, \alpha)$ 被称为双量子群(double quantum group)^[67].

下面命题的证明是直接的.

命题 1.2.3 设 A 为代数, B 为双代数. 假设 $A \#_R B$ 是扭曲张量积代数, 如果 $a_R \otimes b_R = a_R \varepsilon_B(b_{1R}) \otimes b_2, \forall a \in A, b \in B$, 那么 $A \#_R B$ 是通常的冲积, 其中 B 在 A 上的左作用定义为 $b \cdot a = (\iota_A \otimes \varepsilon_B)R(b \otimes a), \forall a \in A, b \in B$.

对偶地, 设 A 和 B 为两个余代数. 给定一个线性映射 $T: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$, 则扭曲张量余积 $A \times_T B = A \otimes B$ (作为向量空间) 有余结构

$$\overline{\Delta}(a \times_T b) = a_1 \times b_{1T} \otimes a_{2T} \times b_2, \quad (1.5)$$

其中 $b_T \otimes a_T = T(a \otimes b), \forall a \in A, b \in B$. 如果 $A \times_T B$ 是一个余结合余代数且带有余单位 $\varepsilon_A \otimes \varepsilon_B$, 那么称 $A \times_T B$ 为扭曲张量余积余代数(twisted tensor coproduct coalgebra). 此时映射 T 被称为余扭曲映射(cotwisted map).

由文献 [22, 24] 知, $A \times_T B$ 是一个扭曲张量余积余代数当且仅当下面条件成立:

$$(\iota_B \otimes \Delta_A)T = (T \otimes \iota_A)(\iota_A \otimes T)(\Delta_A \otimes \iota_B), \quad (1.6)$$

$$(\Delta_B \otimes \iota_A)T = (\iota_B \otimes T)(T \otimes \iota_B)(\iota_A \otimes \Delta_B), \quad (1.7)$$

$$(\iota_B \otimes \varepsilon)T = \varepsilon \otimes \iota_B, \quad (\varepsilon \otimes \iota_A)T = \iota_A \otimes \varepsilon. \quad (1.8)$$

假设 A 和 B 是 Hopf 代数. 如果扭曲张量积余代数 $A \times_T B$ 带上通常的张量积代数结构成为 Hopf 代数, 那么称 $A \times_T B$ 为 **扭曲张量余积 Hopf 代数** (twisted tensor coproduct Hopf algebra).

例 1.2.4 (1) 设 B 是 Hopf 代数, A 为左 B 余模余代数. 定义余扭曲映射 $T: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ 为 $T(a \otimes b) = a_{(-1)}b \otimes a_0, \forall a \in A, b \in B$. 那么有通常的冲余积 $A \times B$, 其余积为 $\overline{\Delta}(a \times b) = a_1 \times a_{2(-1)}b_1 \otimes a_{20} \times b_2, \forall a \in A, b \in B$.

(2) 设 B 为 Hopf 代数 (其对极为 S_B), A 为 B 双余模余代数. 定义余扭曲映射 $T: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$ 为 $T(a \otimes b) = a_{(-1)}bS_B(a_{0(1)}) \otimes a_{00}, \forall a \in A, b \in B$. 则有扭曲冲余积 $A \star B$, 其余积结构为 $\overline{\Delta}(a \star b) = a_1 \otimes a_{2(-1)}b_1S_B(a_{20(1)}) \otimes a_{200} \otimes b_2, \forall a \in A, b \in B$ (见文献 [172]).

下面结果对偶于命题 1.2.3.

命题 1.2.5 设 A 为余代数, B 为双代数. 设 $A \times_T B$ 为扭曲张量余积余代数. 如果下面条件成立:

$$a_T \otimes b_T = a_T \otimes 1_{BT}b, \quad \forall a \in A, b \in B, \quad (1.9)$$

那么 $A \times_T B$ 是通常的冲余积, 其中 B 在 A 上的左余作用为 $\rho(a) = T(a \otimes 1_B), \forall a \in A$.

引理 1.2.6 设 A 和 B 为两个代数, 同时为两个余代数. 设 $A \#_R B$ 为扭曲张量积代数, $A \times_T B$ 为扭曲张量余积余代数. 假设存在两个线性映射 $S_A: A \rightarrow A$ 和 $S_B: B \rightarrow B$, 并且满足 $S_A(a_1)a_2 = a_1S_A(a_2) = \varepsilon(a)1_A, \forall a \in A$ 和 $S_B(b_1)b_2 = b_1S_B(b_2) = \varepsilon(b)1_B, \forall b \in B$. 定义 $\overline{S} = R \circ (S_B \otimes S_A) \circ T$. 那么有

$$\begin{aligned} m_{\#}(\overline{S} \otimes \iota_A \otimes \iota_B)(\overline{\Delta}(a \# b)) &= \varepsilon(a)\varepsilon(b)1_A \otimes 1_B, \\ m_{\#}(\iota_A \otimes \iota_B \otimes \overline{S})(\overline{\Delta}(a \# b)) &= \varepsilon(a)\varepsilon(b)1_A \otimes 1_B, \end{aligned}$$

其中 $m_{\#}$ 表示 $A \#_R B$ 中乘法.

证明 对任意的 $a \in A, b \in B$, 有

$$\begin{aligned} & m_{\#}(\overline{S} \otimes \iota_A \otimes \iota_B)(\overline{\Delta}(a \# b)) \\ &= (m_A \otimes m_B)(\iota_A \otimes R \otimes \iota_B)(R(S_B \otimes S_A)T \otimes \iota_A \otimes \iota_B)(a_1 \otimes b_{1T} \otimes a_{2T} \otimes b_2) \\ &= (\iota_A \otimes m_B)(m_A \otimes \iota_B \otimes \iota_B)(\iota_A \otimes R \otimes \iota_B)(R \otimes \iota_A \otimes \iota_B) \\ & \quad \times (S_B(b_{1T}) \otimes S_A(a_{1T}) \otimes a_{2T} \otimes b_2) \\ &= (\iota_A \otimes m_B)(R \otimes \iota_B)(\iota_B \otimes m_A \otimes \iota_B)(S_B(b_{1T}) \\ & \quad \otimes S_A(a_{1T}) \otimes a_{2T} \otimes b_2) \quad (\text{由 (1.2) 和 (1.6)}) \\ &= (\iota_A \otimes m_B)(R(S_B(b_{1T}) \otimes 1_A \varepsilon(a_T)) \otimes b_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon_A(a)1_A \otimes S_B(b_1)b_2 \quad (\text{由 (1.4) 和 (1.8)}) \\
&= \varepsilon_A(a)\varepsilon_B(b)(1_A \otimes 1_B).
\end{aligned}$$

这样就证明了引理的第一个等式. 第二个等式类似可证. $\square$

定理 1.2.7 设 B 是 Hopf 代数, A 既为代数又为余代数 (不必为双代数). 假设存在线性映射 $S_A: A \rightarrow A$ 使得 $m_A(S_A \otimes \iota_A)\Delta_A = 1_A \varepsilon_A$ 和 $m_A(\iota_A \otimes S_A)\Delta_A = 1_A \varepsilon_A$ 成立. 那么下面结论等价:

(1) 对任意的 $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, $T = t, R = r$, 下面条件 (B1) ~ (B8) 成立:

(B1) $A \#_R B$ 是一个扭曲张量积代数;

(B2) $A \times_T B$ 是一个扭曲张量余积余代数;

(B3) $T(1_A \otimes 1_B) = 1_B \otimes 1_A$, $\Delta_A(1_A) = 1_A \otimes 1_A$;

(B4) $(aa')_1 \otimes 1_{BT} \otimes (aa')_{2T} = a_1 a'_{1R} \otimes 1_{BTR} 1_{Bt} \otimes a_{2T} a'_{2t}$;

(B5) $b_T \otimes a_T = 1_{BT} b_t \otimes a_T 1_{At}$;

(B6) $(b_1 b'_1)_T \otimes 1_{AT} \otimes b_2 b'_2 = b_{1T} b'_{1t} \otimes 1_{AT} 1_{AtR} \otimes b_{2R} b'_{2t}$;

(B7) $a_{R1} \otimes b_{R1T} \otimes a_{R2T} \otimes b_{R2} = a_{1R} \otimes b_{1TR} 1_{Bt} \otimes 1_{AT} a_{2tr} \otimes b_{2r}$;

(B8) $(\varepsilon_A \otimes \varepsilon_B)R = \varepsilon_B \otimes \varepsilon_A$, 并且 ε_A 是代数同态.

(2) $(A_T \odot_R B, \overline{\Delta}, \overline{\varepsilon}, \overline{S})$ 是一个 Hopf 代数, 其中乘法、 $\overline{\Delta}$ 、 $\overline{\varepsilon}$ 和 $\overline{S}$ 由下面形式给出:

$$\begin{cases} (a \odot b)(a' \odot b') = (a \otimes 1)R(b \otimes a')(1 \otimes b'), \\ \overline{\Delta}(a \odot b) = (\iota_A \otimes T \otimes \iota_B)(\Delta_A(a) \otimes \Delta_B(b)), \\ \overline{\varepsilon} = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B \quad \text{和} \quad \overline{S} = R(S_B \otimes S_A)T. \end{cases}$$

此时, 称 $A_T \odot_R B$ 为扭曲张量双积 Hopf 代数 (twisted tensor biproduct Hopf algebra) 或扭曲张量双积 (twisted tensor biproduct)^[93,94].

证明 (1) $\Rightarrow$ (2). 由 (B1) 知 $A_T \odot_R B$ 是以 $1_A \odot 1_B$ 为单位元的结合代数. 由 (B2) 知 $\overline{\Delta}$ 是余结合的且 $\overline{\varepsilon}$ 是余单位.

下面证明 $\overline{\Delta}$ 是代数同态. 事实上, 令 $T = t = U = u = s$, $R = r = P = p$. 对任意的 $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, 有

$$\begin{aligned}
&\overline{\Delta}[(a \odot b)(a' \odot b')] = (aa'_R)_1 \odot (b_{R1} b'_1)_T \otimes (aa'_R)_{2T} \odot b_{R2} b'_2 \\
&= a_1 a'_{R1r} \odot 1_{Btr} 1_{Bs} (b_{R1} b'_1)_T \otimes a_{2t} a'_{R2s} 1_{AT} \odot b_{R2} b'_2 \quad (\text{由 (B5) 和 (B4)}) \\
&= a_1 a'_{R1r} \odot 1_{Btr} b_{R1T} b'_{1U} \otimes a_{2t} a'_{R2T} 1_{AUP} \odot b_{R2P} b'_2 \quad (\text{由 (B6) 和 (B5)}) \\
&= a_1 a'_{1R} \odot (1_{Bt} b_{1T})_R 1_{Bu} b'_{1U} \otimes a_{2t} 1_{AT} a'_{2ur} 1_{AUP} \odot b_{2rP} b'_2 \quad (\text{由 (B7) 和 (1.2)}) \\
&= a_1 a'_{1R} \odot b_{1TR} b'_{1t} \otimes a_{2T} a'_{2tr} \odot b_{2r} b'_2 \quad (\text{由 (B5) 和 (1.3)}) \\
&= (\overline{\Delta}(a \odot b))(\overline{\Delta}(a' \odot b')).
\end{aligned}$$

由条件 (B8) 知 $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B$ 是代数同态. 由引理 1.2.6 知 $m_{A_T \odot_R B}(\bar{S} \otimes \iota_A \otimes \iota_B)(\bar{\Delta}(a \odot b)) = \bar{\varepsilon}(a \odot b)1_{A \odot B}$ 和 $m_{A_T \odot_R B}(\iota_A \otimes \iota_B \otimes \bar{S})(\bar{\Delta}(a \odot b)) = \bar{\varepsilon}(a \odot b)1_{A \odot B}$.

因此可得 $(A_T \odot_R B, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}, \bar{S})$ 是 Hopf 代数.

(2) $\Rightarrow$ (1). 直接可证. $\square$

推论 1.2.8 设 $A_T \odot_R B$ 是扭曲张量双积. 假设 $\varepsilon(a_R)b_R = \varepsilon(a)b$ 和 $1_{A_T} \otimes b_T = 1_A \otimes b$ 成立. 对任意的 $a \in A, b \in B$, 如果令 $b \cdot a = \varepsilon_B(b_R)a_R$, $\rho(a) = 1_{B_T} \otimes a_T$, 那么 $A \odot B$ 就是 Radford 双积 (记为 $A \# B$)^[118].

证明 应用 $(\iota_A \otimes \varepsilon_B \otimes \varepsilon_A \otimes \iota_B)$ 到 (B7) 两边可得 $a_R \otimes b_R = a_R \varepsilon_B(b_{1R}) \otimes b_2$. 由命题 1.2.3 知 $A \#_R B$ 为通常的冲积. 类似地, 由命题 1.2.5 知 $A \times_T B$ 为通常的冲余积. 则由定理 1.2.7 知 $(A, B, \cdot, \rho)$ 是 Hopf 代数, 即 Radford 双积. $\square$

注 当 A 和 B 都是 Hopf 代数时, 定理 1.2.7 就是文献 [22] 中定理 4.5.

推论 1.2.9 设 B 是 Hopf 代数, A 既是代数又是余代数 (但不必是双代数). 假设 A 是左 B 余模余代数. 那么下面叙述等价:

(1) 对任意的 $a, a' \in A, b, b' \in B$, 下面条件 (a) $\sim$ (e) 成立 ($R = r$):

(a) $A \#_R B$ 是扭曲张量积代数;

(b) $(aa')_1 \otimes (aa')_{2(-1)} \otimes (aa')_{20} = a_1 a'_{1R} \otimes a_{2(-1)R} a'_{2(-1)} \otimes a_{20} a'_{20}$;

(c) $a_{R1} \otimes a_{R2(-1)} b_{R1} \otimes a_{R20} \otimes b_{R2} = a'_{1R} \otimes b_{1R} a'_{2(-1)} \otimes a'_{20r} \otimes b_{2r}$;

(d) ε_A 是代数同态并且 $(\varepsilon_A \otimes \varepsilon_B)R = \varepsilon_B \otimes \varepsilon_A$;

(e) $1_{A(-1)} \otimes 1_{A0} = 1_B \otimes 1_A$, $\Delta_A(1_A) = 1_A \otimes 1_A$.

(2) $(A \# B, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}, \bar{S})$ 是 Hopf 代数, 其乘法、余积 $\bar{\Delta}$ 、余单位 $\bar{\varepsilon}$ 和对极 $\bar{S}$ 由下面形式给出: 对任意的 $a, a' \in A, b, b' \in B$,

$$\begin{cases} (a \# b)(a' \# b') = (a \otimes 1)R(b \otimes a')(1 \otimes b'), \\ \bar{\Delta}(a \# b) = a_1 \times a_{2(-1)} b_1 \otimes a_{20} \times b_2, \\ \bar{S}(a \# b) = R(S_B(a_{(-1)} b) \otimes S_A(a_0)), \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B. \end{cases}$$

证明 在定理 1.2.7 中, 定义余扭曲映射 T 为 $T(a \otimes b) = a_{(-1)} b \otimes a_0$, 即可得本推论. $\square$

推论 1.2.10 设 B 是 Hopf 代数, A 既是代数又是余代数 (但不必是双代数). 假设 A 是左 B 模代数. 那么下述等价 ($\forall a, a' \in A, b, b' \in B, T = t$):

(1) 下面条件 (a) $\sim$ (e) 成立:

(a) $A \times_T B$ 是扭曲张量余积余代数;

(b) $\Delta_A(a(b \cdot a')) = a_1(b_{1T} \cdot a'_1) \otimes a_{2T}(b_2 \cdot a'_2)$;

(c) $(b_2 b')_T \otimes (a(b_1 \cdot a'))_T = b_{1T} b'_t \otimes a_T(b_2 \cdot a'_t)$;

(d) $\varepsilon_A(b \cdot a) = \varepsilon_A(a) \varepsilon_B(b)$, ε_A 是代数映射;

(e) $T(1_A \otimes 1_B) = 1_B \otimes 1_A$, $\Delta_A(1_A) = 1_A \otimes 1_A$.

(2) $(A \times B, \overline{\Delta}, \overline{\varepsilon}, \overline{S})$ 是 Hopf 代数, 其乘法、余积 $\overline{\Delta}$ 、余单位 $\overline{\varepsilon}$ 和对极 $\overline{S}$ 由下面形式给出: 对任意的 $a, a' \in A, b, b' \in B$,

$$\begin{cases} (a \times b)(a' \times b') = a(b_1 \cdot a') \times b_2 b', \\ \overline{\Delta}(a \times b) = (\iota_A \otimes T \otimes \iota_B)(\Delta_A(a) \otimes \Delta_B(b)), \\ \overline{\varepsilon} = \varepsilon_A \otimes \varepsilon_B \quad \text{和} \quad \overline{S} = R(S_B \otimes S_A)T. \end{cases}$$

证明 在定理 1.2.7 中, 定义扭曲映射 R 为 $R(b \otimes a) = b_1 \cdot a \otimes b_2, \forall a \in A, b \in B$. 则由定理 1.2.7 知 $(A \times B, \overline{\Delta}, \overline{\varepsilon}, \overline{S})$ 是 Hopf 代数当且仅当下面条件成立:

- (A1) $A \times_T B$ 是扭曲张量余积余代数;
- (A2) $T(1_A \otimes 1_B) = 1_B \otimes 1_A, \Delta_A(1_A) = 1_A \otimes 1_A$;
- (A3) $(aa')_1 \otimes 1_{BT} \otimes (aa')_{2T} = a_1(1_{BT1} \cdot a'_1) \otimes 1_{BT2} 1_{Bt} \otimes a_{2T} a'_{2t}$;
- (A4) $b_T \otimes a_T = 1_{BT} b_t \otimes a_T 1_{At}$;
- (A5) $(b_1 b'_1)_T \otimes 1_{AT} \otimes b_2 b'_2 = b_{1T} b'_{1t} \otimes 1_{AT}(b_2 \cdot 1_{At}) \otimes b_3 b'_3$;
- (A6) $(b_1 \cdot a)_1 \otimes b_{2T} \otimes (b_1 \cdot a)_{2T} \otimes b_3 = b_{1T1} \cdot a_1 \otimes b_{1T2} 1_{Bt} \otimes 1_{AT}(b_2 \cdot a_{2t}) \otimes b_3$;
- (A7) $\varepsilon_A(b \cdot a) = \varepsilon_A(a) \varepsilon_B(b), \varepsilon_A$ 是代数同态,

其中 $T = t, \forall a, a' \in A, b, b' \in B$.

比较上面条件 (A1) ~ (A7) 和推论 1.2.10(1)(a) ~ (e) 可以得到, 要证结论成立只要证明上面条件 (A3) ~ (A6) 等价于推论 1.2.10(1)(b) 和 (c).

由 (A3), (A5) 和 (A6) 可得下面等式:

$$(aa')_1 \otimes (aa')_2 = a_1(1_{BT} \cdot a'_1) \otimes a_{2T} a'_2, \quad (1.10)$$

$$1_{BT} \otimes (aa')_T = 1_{BT} 1_{Bt} \otimes a_T a'_t, \quad (1.11)$$

$$(bb')_T \otimes 1_{AT} = b_{1T} b'_t \otimes 1_{AT}(b_2 \cdot 1_{At}), \quad (1.12)$$

$$(b \cdot a)_1 \otimes (b \cdot a)_2 = b_{1T} \cdot a_1 \otimes 1_{AT}(b_2 \cdot a_2), \quad (1.13)$$

$$b_{2T} \otimes (b_1 \cdot a)_T = b_{1T} 1_{Bt} \otimes 1_{AT}(b_2 \cdot a_t). \quad (1.14)$$

若条件 (A3) ~ (A6) 成立, 则有

$$\begin{aligned} (a(b \cdot a'))_1 \otimes (a(b \cdot a'))_2 &= a_1(1_{BT} \cdot (b \cdot a')_1) \otimes a_{2T}(b \cdot a')_2 \quad (\text{由 (1.10)}) \\ &= a_1(1_{BT} \cdot (b_{1t} \cdot a'_1)) \otimes a_{2T} 1_{AT}(b_2 \cdot a'_2) \quad (\text{由 (1.13)}) \\ &= a_1(b_{1T} \cdot a'_1) \otimes a_{2T}(b_2 \cdot a'_2) \quad (\text{由 (A4)}), \end{aligned}$$

所以推论 1.2.10(1)(b) 得证.