普通高等教育"十二五"规划教材

◎ 电子信息科学与工程类专业 规划教材

工程电磁场

◎ 何小祥 丁卫平 刘建霞 编著

电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

电子信息科学与工程类专业规划教材

工程电磁场

何小祥　丁卫平　刘建霞　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

根据电子信息与电气类专业宽口径教学的要求，本书主要介绍了电磁场的基本规律、基本理论和基本分析方法。本书共8章，包括：数学基础、静态电磁场、静态场的求解方法、时变电磁场、平面波、导行电磁波以及电磁波辐射和电磁兼容问题。本书力求物理概念清晰，贴近工程应用背景，相关例题和习题尽量来源于实际工程应用，有助于增加学生的学习兴趣。

本书可作为普通高等院校通信工程、电子信息工程、电子科学与技术、自动化等专业的本科生教材，也可供研究生及从事“电磁场与电磁波”方向的工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

工程电磁场/何小祥，丁卫平，刘建霞编著. —北京：电子工业出版社，2011.7
电子信息科学与工程类专业规划教材
ISBN 978-7-121-14106-5

Ⅰ. ①工… Ⅱ. ①何… ②丁… ③刘… Ⅲ. ①电磁场—高等学校—教材 Ⅳ. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 139225 号

责任编辑：凌 毅　　　特约编辑：张 莉
印　　刷：北京东光印刷厂
装　　订：三河市皇庄路通装订厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：18　字数：460千字
印　　次：2011年7月第1次印刷
册　　数：4 000册　　定价：35.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

电磁场是电子信息与电气学科相关专业本科生一门非常重要的专业基础课程，它涉及的内容是电子信息与电气类专业本科生应该具备的知识结构中的重要组成部分，同时也是后续众多专业课程的基础。

本书共 8 章，第 1 章是数学基础，主要复习本课程所需要的基本数学理论和工具；第 2 章介绍静态电磁场，包括静电场、恒定磁场及恒定电场的相关内容；第 3 章介绍静态场的求解方法，涵盖了分离变量法、镜像法及数值方法；第 4 章主要介绍时变电磁场的基本知识；第 5～8 章主要讲述平面波、导行电磁波及电磁波辐射和电磁兼容问题。

根据电子信息与电气类专业宽口径教学的要求，本书循序渐进地、全面系统地介绍了电磁场的基本理论。在此基础上，还增加了计算电磁学、脉冲电磁场、天线罩及目标特性与雷达隐身等内容的介绍，以拓展学生的知识面，且方便与后续专业课程衔接。书中相关例题和习题尽量来源于实际工程应用，有助于增加学生的学习兴趣。

本书的**参考学时为 72 学时**，如果是 64 学时或 45 学时，则可以根据需要删减目录中加注星号"*"的章节，而 7.5 节和第 8 章则可以根据需要全部略去不讲。删除部分内容后，基本不会影响本书内容的连贯性。

本书第 2、5、6 章由南京航空航天大学的何小祥撰写；第 1、3、4 章由解放军理工大学的丁卫平执笔；第 7、8 章由太原理工大学的刘建霞撰写，何小祥统稿全书。感谢南京航空航天大学的顾长青教授对全书提出的修改意见和审稿工作。

研究生张志春和杨如意等同学参与了部分章节的编辑工作，在此表示感谢。

本书免费提供电子课件，读者可以登录电子工业出版社华信教育资源网（www.hxedu.com.cn）下载。

由于作者学识水平有限和时间仓促，书中难免存在疏漏或错误，衷心欢迎广大读者及同行批评指正。

作　者

2011 年 6 月

主要符号和单位

符　号	名　称	单位符号	单位名称
$\boldsymbol{A}$	矢量磁位	Wb/m	韦伯/米
$\boldsymbol{B}$	磁通密度	T	特斯拉
C	电容	F	法拉
c	光速	m/s	米/秒
$\boldsymbol{D}$	电位移	C/m^2	库仑/米^2
d	距离	m	米
$\boldsymbol{E}$	电场强度	V/m	伏/米
e	电动势	V	伏
$\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{e}_z$	直角坐标系单位矢量		
$\boldsymbol{e}_\rho,\boldsymbol{e}_\phi,\boldsymbol{e}_z$	圆柱坐标系单位矢量		
$\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\phi$	球坐标系单位矢量		
$\boldsymbol{F}$	力	N	牛顿
f	频率	Hz	赫兹
f_c	截止频率	Hz	赫兹
G	电导	S	西门子
	天线增益		
$\boldsymbol{H}$	磁场强度	A/m	安培/米
I,i	电流	A	安培
$\boldsymbol{J}$	电流体密度	A/m^2	安培/米^2
$\boldsymbol{J}_S$	电流面密度	A/m	安培/米
$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}$	线电流元	A·m	安培·米
k	波数	rad/m	弧度/米
$\boldsymbol{k}$	波矢	rad/m	弧度/米
k_c	截止波数	rad/m	弧度/米
L	电感	H	亨利
$\boldsymbol{M}$	磁化强度	A/m	安培/米
M	互感	H	亨利
n	折射率		
$\boldsymbol{P}$	电极化强度	C/m^2	库仑/米^2
P	功率	W	瓦特
$\boldsymbol{p}$	电偶极矩	C·m	库仑·米
Q,q	电荷	C	库仑
R	电阻	Ω	欧姆
	距离	m	米
$\boldsymbol{r}$	矢径	m	米
$\boldsymbol{S}$	坡印廷矢量	W/m^2	瓦/米^2
$\boldsymbol{S}_{av}$	平均坡印廷矢量	W/m^2	瓦/米^2
S	面积	m^2	米^2
T	周期	s	秒
t	时间	s	秒

续表

符　号	名　称	单位符号	单位名称
U,u	电压	V	伏
V	体积	m^3	米^3
v_g	群速度	m/s	米/秒
v_s	信号速度	m/s	米/秒
v_p	相速度	m/s	米/秒
v_e	能流速度	m/s	米/秒
W_e	电场能量	J	焦耳
W_m	磁场能量	J	焦耳
w_e	电场能量密度	J/m^3	焦耳/米^3
w_m	磁场能量密度	J/m^3	焦耳/米^3
X	电抗	Ω	欧姆
Y	导纳	S	西门子
Z	阻抗	Ω	欧姆
α	衰减常数	Np/m	奈培/米
β	相移常数	rad/m	弧度/米
Γ	反射系数		
γ	传播系数		
δ	趋肤深度	m	米
ε	介电常数	F/m	法/米
ε_0	真空介电常数	F/m	法/米
ε_r	相对介电常数		
ε_c	复介电常数	F/m	法/米
η	特征阻抗	Ω	欧姆
η_0	真空特征阻抗	Ω	欧姆
λ	波长	m	米
λ_c	截止波长	m	米
λ_g	波导波长	m	米
μ	磁导率	H/m	亨/米
μ_0	真空磁导率	H/m	亨/米
μ_r	相对磁导率		
ρ_V	电荷体密度	C/m^3	库仑/米^3
ρ_S	电荷面密度	C/m^2	库仑/米^2
ρ_l	电荷线密度	C/m	库仑/米
σ	电导率	S/m	西门子/米
τ	透射系数		
φ	电位	V	伏
ϕ	方位角度	Rad	弧度
Φ	电通量	C	库仑
	磁通量	Wb	韦伯
Ψ	磁链	Wb	韦伯
ω	角频率	Rad/s	弧度/秒

目　录

第1章 数学基础

电磁场理论的基本任务是研究电磁场场量（主要是电场和磁场）在空间的分布规律和随时间改变的变化规律。在分析研究的过程中，经常会遇到对矢量进行分解、合成、微分、积分及其他运算。因此，熟练掌握矢量分析的基本理论和基本运算[1]是非常必要的。

本章介绍研究电磁场理论的重要数学基础。主要内容包括矢量分析和在电磁场理论中将要出现的一些特殊函数，最后引出规范电磁场理论研究主线的亥姆霍兹定理。

1.1 矢量函数

1.1.1 标量与矢量

物理学中所遇到的物理量，一般分为两类。一类只有大小，在取定其单位后可以用一个数来表示，例如长度、质量、时间、能量等，这类物理量称为标量；另一类物理量不仅有大小之分，而且有方向之别，例如位移、力、速度、电场强度、磁场强度等，这类物理量称为矢量。

特别要强调的是矢量的两个要素，即大小和方向。我们说两个矢量相等，包括两层含义：第一是指它们的大小相等；第二是指它们的方向相同。

在正式出版物中，通常用加粗字母表示矢量，一般字体的字母表示标量。在平常书写时，我们很难将加粗和一般字体加以区分。所以，在平常书写时，通常在表示矢量的字母上方加箭头。

1.1.2 矢量的表示方法

在学习矢量代数运算和微积分运算之前，首先介绍如何用解析形式表示一些特定矢量。

在空间任一点沿三条坐标曲线的切线方向所取的单位矢量，为该坐标系的坐标单位矢量。坐标单位矢量的模为1，方向为坐标变量正的增加方向。

对于直角坐标系，它的三个坐标单位矢量可以用$\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_z$表示，并且满足：$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$；对于圆柱坐标系，坐标单位矢量表示为$\boldsymbol{e}_\rho$、$\boldsymbol{e}_\phi$、$\boldsymbol{e}_z$，满足：$\boldsymbol{e}_\rho \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_z$；对于球坐标系，坐标单位矢量表示为$\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{e}_\phi$，满足：$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_\phi$。

直角坐标系中的坐标单位矢量均为常矢量，其大小和方向不随空间位置的变化而改变。圆柱和球坐标系中的坐标单位矢量，除了圆柱坐标系中的$\boldsymbol{e}_z$之外，其他均为变矢量，随着空间位置的变化，虽然这些坐标单位矢量的大小不变，但方向却发生了改变。

如果给定某矢量$\boldsymbol{A}$沿坐标单位矢量方向的三个分量，则该矢量即被确定。

直角坐标系中：
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_x A_x + \boldsymbol{e}_y A_y + \boldsymbol{e}_z A_z \tag{1.1.1}$$

圆柱坐标系中：
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_\rho A_\rho + \boldsymbol{e}_\phi A_\phi + \boldsymbol{e}_z A_z \tag{1.1.2}$$

球坐标系中：
$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r A_r + \boldsymbol{e}_\theta A_\theta + \boldsymbol{e}_\phi A_\phi \tag{1.1.3}$$

在直角坐标系中，$A=|A|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$ 表示矢量 $\boldsymbol{A}$ 的模或大小。由于矢量在各坐标轴的分量即为矢量在该坐标轴的投影，所以，如果已知矢量 $\boldsymbol{A}$ 的大小和与直角坐标系各坐标轴的夹角 α、β、γ，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 被确定。

$$A_x=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_x=A\cos\alpha$$
$$A_y=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_y=A\cos\beta$$
$$A_z=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_z=A\cos\gamma$$
$$\boldsymbol{A}=A(\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma) \tag{1.1.4}$$

其中，α、β、γ 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向角，$\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向余弦，满足关系式：$\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1$。

模等于 1 的矢量称为单位矢量。$\boldsymbol{e}_A$ 表示与 $\boldsymbol{A}$ 同方向的单位矢量。

$$\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{e}_A$$
$$\boldsymbol{e}_A=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma \tag{1.1.5}$$

在直角坐标系中，以坐标原点为起点，引向空间任一点 $M(x,y,z)$ 的矢量，称为矢径 $\boldsymbol{r}$。

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z \tag{1.1.6}$$
$$|\boldsymbol{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

单位矢径

$$\boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma \tag{1.1.7}$$

空间任一点对应于一个矢径 $\boldsymbol{r}$，反之，每一个矢径对应着空间一点，所以矢径 $\boldsymbol{r}$ 又称为位置矢量。点 $M(x,y,z)$ 可以表示为 $M(\boldsymbol{r})$。

图 1.1.1 中，起点为 $P(x',y',z')$、终点为 $Q(x,y,z)$ 的空间任一矢量，称为距离矢量 $\boldsymbol{R}$。

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_x(x-x')+\boldsymbol{e}_y(y-y')+\boldsymbol{e}_z(z-z') \tag{1.1.8}$$

$$\text{模 } R=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

在电磁场理论中经常用带撇的坐标变量表示源区，不带撇的坐标变量表示场区。所以，距离矢量 $\boldsymbol{R}$ 称为从源点到场点的距离矢量。如图 1.1.1 所示。

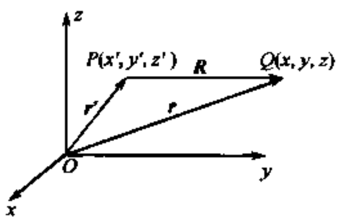

图 1.1.1　距离矢量

空间任一长度元矢量称为线元矢量，在直角坐标系中表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{e}_x\mathrm{d}x+\boldsymbol{e}_y\mathrm{d}y+\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}z \tag{1.1.9}$$

$$\text{模 } \mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}$$

1.1.3　矢量的基本代数运算

1．矢量的加减运算

矢量 $\boldsymbol{A}$ 加矢量 $\boldsymbol{B}$，其和 $\boldsymbol{S}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 仍然为矢量。矢量的加法运算满足平行四边形或三角形法则。

如图 1.1.2 所示，通过平移，使得矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的起点相重合，其和 $\boldsymbol{S}$ 是以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为邻边的平行四边形的对角线矢量。这就是矢量定义中的平行四边形法则。

如图 1.1.3 所示，使得 $\boldsymbol{B}$ 的起点与 $\boldsymbol{A}$ 的终点相重合，其和 $\boldsymbol{S}$ 的起点为 $\boldsymbol{A}$ 的起点，$\boldsymbol{S}$ 的终点为 $\boldsymbol{B}$ 的终点。这就是矢量定义中的三角形法则。

矢量的减法运算可以看成是加法运算的变形，利用关系式 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$，可以将减法运算转化为加法运算。如图 1.1.4 所示，通过平移，使得矢量 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的起点相重合，则由 $\boldsymbol{B}$ 的终点指向 $\boldsymbol{A}$ 的终点的矢量就是 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$。

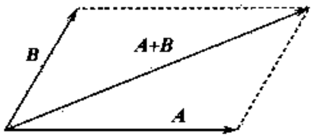

图 1.1.2 平行四边形法则

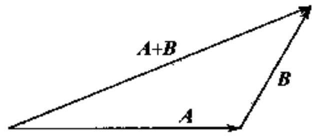

图 1.1.3 三角形法则

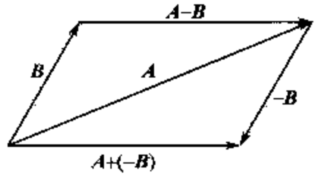

图 1.1.4 矢量求差

2. 矢量的乘法运算

矢量代数中包含三种乘法运算：标乘、点乘和叉乘。

（1）**标乘**：矢量 $\boldsymbol{A}$ 与标量 u 之间的乘积称为矢量的标乘。若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_xA_1+\boldsymbol{e}_yA_2+\boldsymbol{e}_zA_3$，则

$$u\boldsymbol{A}\equiv\boldsymbol{A}u=\boldsymbol{e}_xuA_1+\boldsymbol{e}_yuA_2+\boldsymbol{e}_zuA_3 \tag{1.1.10}$$

（2）**点乘**：两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的模与它们之间夹角余弦的乘积，称为矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点乘，也称标积、点积、数量积或内积。点乘满足交换率。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=AB\cos(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \tag{1.1.11}$$

在直角坐标系中：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_xA_x+\boldsymbol{e}_yA_y+\boldsymbol{e}_zA_z$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_xB_x+\boldsymbol{e}_yB_y+\boldsymbol{e}_zB_z$，则

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \tag{1.1.12}$$

两矢量点乘的结果是标量。若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=90^\circ$，则 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=0$，常用此式判断两矢量是否正交。

（3）**叉乘**：矢量 $\boldsymbol{A}$ 叉乘矢量 $\boldsymbol{B}$ 的结果仍然是矢量，又称为矢量积、叉积或外积。

矢量 $\boldsymbol{A}$ 叉乘 $\boldsymbol{B}$ 的结果是一矢量，模等于 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的模的乘积再乘上它们之间夹角的正弦；方向由右手螺旋法则确定。

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB\sin(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) \tag{1.1.13}$$

在直角坐标系中，用行列式形式可表示为

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix} \tag{1.1.14}$$

由上式可以看出，叉乘不满足交换率。

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$

若 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=0^\circ$，则 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=0$，常用此式判断两矢量是否平行。

3. 混合积与三重矢积

混合积的定义式为

$$[\boldsymbol{ABC}]=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) \tag{1.1.15}$$

混合积运算满足轮换性质，即

$$[\boldsymbol{ABC}]=[\boldsymbol{BCA}]=[\boldsymbol{CAB}]=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix} \tag{1.1.16}$$

若混合积为 0，则三矢量共面。

三重矢积的定义式为 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$，除了按叉乘运算进行展开，还有另外一个有用的关系式

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{1.1.17}$$

1.1.4 矢量函数的微分与积分

1．矢量函数的定义

对于定义域中每一个自变量，都有相应的矢量函数 $\boldsymbol{A}$ 的某个确定量（大小和方向都确定的一个矢量）和它对应，则矢量 $\boldsymbol{A}$ 称为该自变量的矢量函数。

例如静电场中，对于自由空间中位于坐标原点的点电荷，在其周围空间产生的电场可以表示为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{e}_x x+\boldsymbol{e}_y y+\boldsymbol{e}_z z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{1.1.18}$$

其中，矢径 $\boldsymbol{r}$ 或坐标变量 (x,y,z) 是矢量函数 $\boldsymbol{E}$ 的自变量。或者说，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 是空间位置的矢量函数。

2．矢量函数的微分

与标量函数一样，在矢量函数中也常常会遇到求导数和微分的问题。对矢量函数求导数，即是求矢量函数对时间和空间等参数的变化率。矢量函数求导数的运算法则，与标量函数求导相类似。

（1）定义：对于矢量函数 $\boldsymbol{F}(u)$，有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(u)}{\mathrm{d}u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(u+\Delta u)-\boldsymbol{F}(u)}{\Delta u} \tag{1.1.19}$$

由上式可以看出，常矢量的导数为 0，变矢量的一阶导数仍然为矢量。

（2）对于标量函数 $f(u)$ 与矢量函数 $\boldsymbol{F}(u)$ 的乘积 $f\boldsymbol{F}$，有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(f\boldsymbol{F})}{\mathrm{d}u}&=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{(f+\Delta f)(\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F})-f\boldsymbol{F}}{\Delta u}\\&=f\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta u}+\boldsymbol{F}\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta u}+\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{F}}{\Delta u}\Delta f\end{aligned} \tag{1.1.20}$$

当 $\Delta u\to 0$ 时，上式右端第三项趋于 0，所以

$$\frac{\mathrm{d}(f\boldsymbol{F})}{\mathrm{d}u}=f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}u}+\boldsymbol{F}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} \tag{1.1.21}$$

（3）对于多变量函数 $\boldsymbol{F}(u_1,u_2,u_3,\cdots)$ 和 $f(u_1,u_2,u_3,\cdots)$ 求偏导数，有

$$\frac{\partial(f\boldsymbol{F})}{\partial u_i}=f\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial u_i}+\boldsymbol{F}\frac{\partial f}{\partial u_i}\qquad (i=1,2,\cdots) \tag{1.1.22}$$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{F}}{\partial u_i\partial u_j}=\frac{\partial^2\boldsymbol{F}}{\partial u_j\partial u_i}\qquad (i\neq j) \tag{1.1.23}$$

（4）对于矢量函数 $\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{e}_x E_x(x,y,z)+\boldsymbol{e}_y E_y(x,y,z)+\boldsymbol{e}_z E_z(x,y,z)$，有

$$\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial x}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial E_x}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial E_y}{\partial x}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial E_z}{\partial x} \tag{1.1.24}$$

（5）在圆柱坐标系和球坐标系中，由于一些坐标单位矢量不是常矢量，而是坐标变量的函数，在求导数时要特别注意，不能随意将坐标单位矢量提到微分符号之外。

例如，对于矢量函数 $\boldsymbol{E}(\rho,\phi,z)=\boldsymbol{e}_\rho E_\rho+\boldsymbol{e}_\phi E_\phi+\boldsymbol{e}_z E_z$，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \rho}\neq \boldsymbol{e}_\rho\frac{\partial E_\rho}{\partial \rho}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial E_\phi}{\partial \rho}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial E_z}{\partial \rho}$$

由于直角坐标系的坐标单位矢量均为常矢量，与坐标变量无关，所以，一般采用将圆柱坐标系和球坐标系中的坐标单位矢量化成直角坐标系的坐标单位矢量形式，这样，可以将直角坐标系的坐标单位矢量提到微分符号之外。

（6）由于各种坐标系中的坐标单位矢量均不随时间变化，矢量函数对时间 t 求偏导数时，可以将它们作为常矢量提到偏微分符号之外。

例如，在球坐标系中，有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}&=\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{e}_r E_r+\boldsymbol{e}_\theta E_\theta+\boldsymbol{e}_\phi E_\phi\right)\\&=\boldsymbol{e}_r\frac{\partial E_r}{\partial t}+\boldsymbol{e}_\theta\frac{\partial E_\theta}{\partial t}+\boldsymbol{e}_\phi\frac{\partial E_\phi}{\partial t}\end{aligned}\qquad(1.1.25)$$

3. 矢量函数的积分

积分和微分互为逆运算。一般标量函数积分的运算法则对矢量函数同样适用。

$$\int \boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{C}\qquad(1.1.26)$$

但是，在圆柱坐标系和球坐标系中，对矢量函数求积分时，仍需注意：有些坐标单位矢量不是常矢量，不能随意将坐标单位矢量提到积分运算符号之外。在一般情况下，坐标单位矢量可能是积分变量的函数。

例如，在球坐标系中

$$\int_0^{2\pi}\boldsymbol{e}_r\mathrm{d}\phi\neq\boldsymbol{e}_r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi=\boldsymbol{e}_r 2\pi$$

与矢量函数的求导运算一样，由于直角坐标系的坐标单位矢量均为常矢量，与坐标变量无关，所以，一般采用将圆柱坐标系和球坐标系中的坐标单位矢量化成直角坐标系的坐标单位矢量形式，这样，可以将直角坐标系的坐标单位矢量提到积分符号之外。

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\phi&=\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{e}_x\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\phi)\mathrm{d}\phi\\&=\boldsymbol{e}_x\int_0^{2\pi}\cos\phi\mathrm{d}\phi+\boldsymbol{e}_y\int_0^{2\pi}\sin\phi\mathrm{d}\phi=0\end{aligned}$$

例 1-1 求 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{e}_\rho$ 在 $0\to2\pi$ 区间对 ϕ 的定积分，其中 a 为常数。

解： $$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}A\mathrm{d}\phi&=\int_0^{2\pi}a\boldsymbol{e}_\rho\mathrm{d}\phi\\&=\int_0^{2\pi}a(\boldsymbol{e}_x\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\phi)\mathrm{d}\phi\\&=\boldsymbol{e}_x a\sin\phi\Big|_0^{2\pi}-\boldsymbol{e}_y a\cos\phi\Big|_0^{2\pi}=0\end{aligned}$$

例 1-2 求 $\boldsymbol{A}=r_0\boldsymbol{e}_r$ 在 $r=r_0$ 球面上的面积分。

解： $\int_S A\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}r_0\boldsymbol{e}_r r_0^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

将 $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{e}_x\sin\theta\cos\phi+\boldsymbol{e}_y\sin\theta\sin\phi+\boldsymbol{e}_z\cos\theta$ 代入上式，即有

$$
\begin{aligned}
\int_S A\mathrm{d}S = & \boldsymbol{e}_x\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r_0^3\sin^2\theta\cos\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi + \\
& \boldsymbol{e}_y\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r_0^3\sin^2\theta\sin\phi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi + \boldsymbol{e}_z\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r_0^3\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\
= & 0
\end{aligned}
$$

1.2 标量场的梯度

学习矢量分析的主要目的在于研究标量场和矢量场的性质，也就是各个标量或矢量的空间位置函数的特点，表现为梯度、散度和旋度等运算。

假设有一个标量 u，它是空间位置的函数，可以将其写成$u=u(x,y,z)$，这样的场称为标量场，如房间里的温度场等。为了考察标量场在空间的分布和规律，引入等值面（等值线）、方向导数和梯度的概念。

1.2.1 标量场的等值面和等值线

对于一个标量函数$u=u(x,y,z)=u(\boldsymbol{r})$，若令

$$u(x,y,z)=C \quad （C\text{ 为任意常数}） \tag{1.2.1}$$

该方程为曲面方程，称为给定标量函数的等值面方程。取不同的 C 值，就有不同的等值面，在同一等值面上尽管坐标（x，y，z）取值不同，但函数值是相同的。如等温面、等电位面等。

根据标量场的定义，空间每一点上只对应于一个场函数的确定值。因此，充满整个标量场所在空间的许许多多等值面互不相交。或者说，场中的一个点只能在一个等值面上。

对于二维标量函数$V=V(x,y)$，则

$$V(x,y)=C \quad （C\text{ 为任意常数}） \tag{1.2.1}$$

称为等值线方程。同样，同一标量场的等值线也是互不相交的，如等高线、等位线等。

1.2.2 方向导数

标量场的等值面和等值线，给出的是物理量在场中总的分布情况。要想知道标量函数在场中各点附近沿每一方向的变化情况，还需引入方向导数的概念。

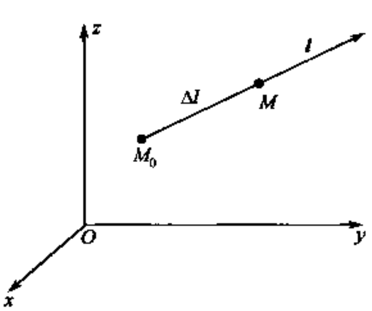

图 1.2.1　方向导数的定义

我们知道，函数$u=u(x,y,z)$的偏导数$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial u}{\partial z}$，表示该函数沿坐标轴方向的变化率，这些变化率是函数沿特殊方向的方向导数。但在实际问题中往往需要知道函数沿任意确定方向的变化率，以及沿什么方向函数的变化率最大。例如要预报某地的风向和风力，必须知道气压在该处沿某些方向的变化率。因此引入标量函数在空间某一点沿某一给定方向方向导数的概念。

函数$u=u(x,y,z)$在给定点M_0（见图 1.2.1）上沿某一方向对距离的变化率为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l} \tag{1.2.3}$$

首先假定函数 $u=u(x,y,z)$ 在 M_0 点可微，如图 1.2.2 所示，根据高等数学中多元函数的全增量和全微分关系

$$\begin{aligned}\Delta u&=u(M)-u(M_0)\\&=u(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-u(x,y,z)\\&=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z+O(\Delta l)\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

因为 $\Delta x=\Delta l\cos\alpha,\Delta y=\Delta l\cos\beta,\Delta z=\Delta l\cos\gamma$ ，所以

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}&=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{u(M)-u(M_0)}{\Delta l}\\&=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cos\gamma\end{aligned} \tag{1.2.5}$$

对空间任意点，有

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.2.6}$$

若 $\frac{\partial u}{\partial l}>0$，则 $u(M)>u(M_0)$，说明沿 $\boldsymbol{l}$ 方向函数 u 是增加的；

若 $\frac{\partial u}{\partial l}<0$，则 $u(M)<u(M_0)$，说明沿 $\boldsymbol{l}$ 方向函数 u 是减小的；

若 $\frac{\partial u}{\partial l}=0$，则 $u(M)=u(M_0)$，说明沿 $\boldsymbol{l}$ 方向函数 u 是不变的。

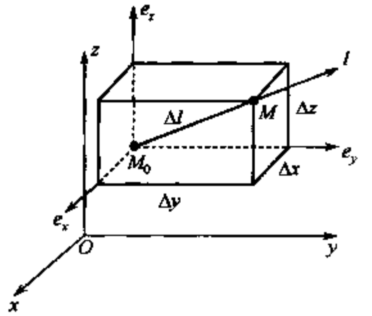

图 1.2.2　直角坐标中方向导数的计算

1.2.3　梯度

方向导数是函数 $u=u(x,y,z)$ 在给定点、沿某一方向对距离的变化率。然而，从空间一点出发有无穷多个方向，函数 u 沿其中哪个方向变化率最大，这个最大变化率又是多少，这就是下面要研究的标量场的梯度问题。

1．梯度（gradient）的定义

下面给出三个表达式。

方向导数：
$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \tag{1.2.7}$$

方向单位矢量：
$$\boldsymbol{e}_l=\boldsymbol{e}_x\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y\cos\beta+\boldsymbol{e}_z\cos\gamma \tag{1.2.8}$$

定义：
$$\boldsymbol{G}=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial u}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial u}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.2.9}$$

比较上面三式，可以看出三个表达式之间存在如下关系

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_l=|\boldsymbol{G}|\cos(\boldsymbol{G},\boldsymbol{e}_l) \tag{1.2.10}$$

如图 1.2.3 所示，e_l 是从给定点引出的沿任一方向的单位矢量，而定义的矢量 G 只与函数 u 有关而与 e_l 无关。当选择 e_l 的方向与 G 一致时，方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 取得最大值，$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{\max}=|G|$。

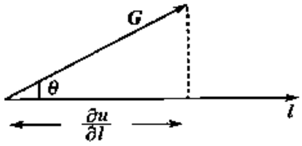

图 1.2.3 梯度的定义

因此 G 具有这样的性质：① G 的方向就是方向导数最大的方向；② G 的模就等于这个最大的方向导数值。

G 称为函数 $u(x,y,z)$ 在给定点的梯度，记作：$\mathrm{grad}u=G$。

在直角坐标系中，有

$$\mathrm{grad}u=e_x\frac{\partial u}{\partial x}+e_y\frac{\partial u}{\partial y}+e_z\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.2.11}$$

为了表示方便，我们引入一个哈密顿（Hamilton）算子

$$\nabla=e_x\frac{\partial}{\partial x}+e_y\frac{\partial}{\partial y}+e_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.2.12}$$

算子 ∇，既是一个微分算子，又可以看成一个矢量，所以称为矢性微分算子。它只有与标量或矢量函数在一起时才有意义。

$$\mathrm{grad}u=\nabla u=e_x\frac{\partial u}{\partial x}+e_y\frac{\partial u}{\partial y}+e_z\frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.2.13}$$

2. 梯度的性质

（1）一个标量函数 u 的梯度为一个矢量函数，其方向为函数 u 变化率最大的方向，模等于函数 u 在该点的最大变化率的数值，梯度总是指向 u 增大的方向。

（2）函数 u 在给定点沿 e_l 方向的方向导数等于 u 的梯度在 e_l 方向上的投影。

$$\frac{\partial u}{\partial l}=(\nabla u)\cdot e_l \tag{1.2.14}$$

（3）标量场中任一点的梯度的方向为过该点等值面的法线方向。

在高等数学中，我们知道一个曲面 $u(x,y,z)=C$ 在面上任一点的法线矢量和 ∇u 方向一致，所以，单位法矢为 $e_n=\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$。

（4）梯度的线积分与积分路径无关。即

$$\int_{aP_1b}(\nabla u)\cdot\mathrm{d}l=\int_{aP_2b}(\nabla u)\cdot\mathrm{d}l=u(b)-u(a)$$

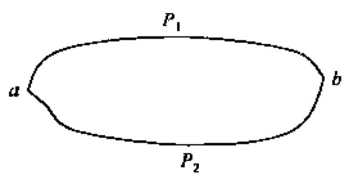

图 1.2.4 任意两条积分路径

证明：如图 1.2.4 所示，任取两条积分路径 aP_1b 和 aP_2b，有

$$\int_{aP_1b}(\nabla u)\cdot\mathrm{d}l=\int_{aP_1b}(\nabla u)\cdot e_n\mathrm{d}l=\int_{aP_1b}\frac{\partial u}{\partial l}\mathrm{d}l=\int_a^b\mathrm{d}u=u(b)-u(a)$$

同样

$$\int_{aP_2b}(\nabla u)\cdot\mathrm{d}l=u(b)-u(a)$$

所以

$$\int_{aP_1b}(\nabla u)\cdot\mathrm{d}l=\int_{aP_2b}(\nabla u)\cdot\mathrm{d}l=u(b)-u(a),$$

问题得证。

推论：标量函数的梯度沿任意闭合路径的线积分恒等于 0，即

$$\oint_l(\nabla u)\cdot\mathrm{d}l=0$$