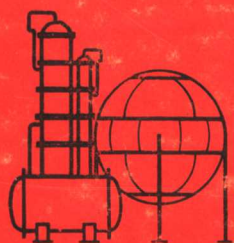


化工设备设计全书

# 高压容器设计

化工设备设计全书编辑委员会



上海科学技术出版社

化工设备设计全书

# 高压容器设计

主 编

化学工业部第一设计院 朱秋尔

编 写

华东化工学院	丁伯民
化学工业部化工设计公司	徐正志
吉林化学工业公司设计院	周国民
广东省石油化工设计院	刘贻民
化学工业部第四设计院	张永维 徐荣皋
化学工业部第一设计院	王慎行

上海科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书系统地论述了高压容器的基础理论、应力分析、强度计算、密封设计和结构分析。此外还收集了一些工程设计的实例、典型结构形式、常用材料性能和设计参考数据。本书还对高压容器设计中的真温蠕变和断裂力学作了介绍。

本书可供从事高压容器设计工作的专业人员使用，也可供有关科研、工厂、学校等从事化工设备工作的科技人员参考。

化工设备设计全书

### 高 压 容 器 设 计

化学工业部第一设计院 朱秋尔 主编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

本书由上海发行所发行 常熟文化印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 28.5 插页 4 字数 683,000

1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷

印数 1—5,700

统一书号: 15119·2507 定价: 6.80元

# 化工设备设计全书

分册名称	主要内容
化工设备用钢	钢的冶炼;常温机械性能和断裂韧性;热处理和可焊性;中、高温机械性能和组织稳定性;腐蚀及耐蚀性;碳钢和低合金高强度钢;低温用钢;低合金耐热钢;不锈钢及耐热高合金钢。
化工容器设计	旋转薄壳与平板的基本理论及应用;筒体和封头;特殊形状容器局部应力;穿孔补强;法兰、支座、防爆膜设计;容器附件;容器焊接、制造及检验;容器保温结构。
高压容器设计	力学基础;断裂力学在压力容器上的应用;厚壁容器;蠕变;密封设计;高压容器零部件设计;高压容器的开孔与衬里;高压容器的用材、破坏与检验。
超高压容器设计	超高压容器的筒体结构型式;应力分析及强度计算;自增强技术及其应用;疲劳及其设计计算;零部件设计;超高压容器的用材、检验和安全技术。
真空设备设计	真空技术的理论基础;真空获得设备;真空测量与检漏;真空容器及化工设备设计;真空密封;真空系统设计及附件。
换热器设计	流体流动及传热;管壳式换热器的结构设计;管壳式换热器元件强度和刚度计算;螺旋板式、板片式及其它换热器;管壳式换热器的制造、检验、安装及维修。
塔设备设计	塔设备的化工设计;塔盘形式及其化工计算;塔盘结构设计;填料塔、萃取塔设计;受压元件的强度设计和稳定校核;辅助装置及附件;制造、安装及运输。
搅拌设备设计	搅拌过程与搅拌器;搅拌设备的传热;搅拌罐结构设计;传动装置及搅拌轴;轴封;制造及检验。
球形容器设计	材料选用;结构设计;强度计算;组装;焊接;检验。
大型贮罐设计	贮罐尺寸的选择;化工贮罐的设计;罐壁、罐底、罐顶设计;低压贮罐设计;贮罐附件及其选择;消防及安全措施;制造、焊接与检验;贮罐对基础的要求;贮罐搅拌器。
废热锅炉设计	结构设计;热力计算;阻力计算;元件强度计算;材料;制造、安装与检验;水处理;运行。
干燥设备设计	干燥过程基础;厢式、带式、流化床、气流、喷雾、滚筒、回转圆筒干燥器设计;新型干燥器、组合式干燥器及其设计;主要辅助设备设计。
除尘设备设计	粉尘的特性与除尘器的性能;重力沉降室和惯性除尘器;旋风、过滤式除尘器;电除尘器;湿式除尘器;除尘系统设计;含尘气流的测定。
铝制化工设备设计	材料;设计计算;结构;制造与检验。
钛制化工设备设计	钛材的机械性能、物理性能和耐蚀性;钛制设备的设计计算;设备结构设计;制造和检验。
硬聚氯乙烯塑料化工设备设计	硬聚氯乙烯原材料及其性能;设备设计与结构;接管设计;施工、安装与验收。
石墨制化工设备设计	不透性石墨材料及制造工艺;不透性石墨制品设备及设计计算;设备制造;原材料分析及物性测定。
钢架设计	钢架材料及荷载;设计原理;梁、柱的设计;构件连接构造及计算;设备支架;操作平台;塔平台;动载荷作用下的钢架设计;抗震设计;防腐和防火。

## 《化工设备设计全书》编辑委员会

### 主任委员

**洪国宝** 燕山石油化学总公司设计院

### 副主任委员

黄力行 南京化学工业公司  
李肇璧 化学工业部第六设计院  
姚北权 化学工业部第四设计院  
琺定一 华东化工学院  
寿振纲 上海医药设计院  
金国焱 化学工业部设备设计技术中心站

### 委员:

张冠亚 兰州化学工业公司设计院  
杨慧莹 化学工业部第八设计院  
汪子云 化学工业部化工设计公司  
卓克涛 化学工业部第一设计院  
苏树明 广东省石油化工设计院

# 前 言

为了满足广大化工设备设计人员的要求,在化学工业部的领导下,由化工部设备设计技术中心站组织全国近百所高校、工厂、科研和设计单位,共同编写了这套《化工设备设计全书》,供从事化工设备专业的设计人员使用。

《化工设备设计全书》以结构、强度的设计计算为主,从基础理论、设计方法、结构分析、标准规定、计算实例等方面进行系统的阐述,并对化工原理的设计计算作了简介。在实用的前提下,尽量反映国内及国外引进的先进技术,并努力吸取当前国外新技术动向。总之,本书旨在继续搞好设备结构、强度设计的同时,结合化工过程的要求去研究改进设备的设计,提高设备的生产效率,降低设备的制造成本,与化工工艺专业人员一起实现化工单元操作的最佳化。

为了使设计人员更好地设计出一个操作安全、技术先进、经济合理的高压容器,有必要对容器应力分析的基本理论和强度计算的基本方法有所了解。从事高压容器设计的工程技术人员往往需要透彻地理解制订规范的依据和前提,以及某些公式的来源和应用范围,以期能更正确地应用规范和公式,并为进一步研究有关高压容器的力学问题打好必要的理论基础。为此,本书对高压容器设计中所需的有关弹性及塑性理论作了介绍。并在有关章节中对如何运用弹性理论解决力学计算问题有所示例。

各种高压容器壳体结构和强度的设计,密封的设计、选材、接管开孔补强、焊接结构的设计等均直接影响容器的可靠性、经济性与先进性。为了解决高压容器设计中的各类问题,本书从工程技术人员的实际使用出发,对这方面的有关问题作了叙述,同时对高压容器设计中蠕变和断裂力学也作了一定的介绍。

高压容器内存有高压介质,也就存在着容器破裂的危险性。当容器产生破裂,则高压介质进行绝热膨胀而对周围作功,单位重量介质的压力愈高,具有能量就愈大,对外作功的本领也就愈大。因此,设计人员对压力容器的破坏形式及检验方法应具备足够的知识,本书也对高压容器的各种破坏形式及原因和缺陷的无损检验作了介绍。

本书主编是化学工业部第一设计院朱秋尔。燕山石油化学总公司设计院洪国宝和化学工业部第一设计院卓克涛校审。编写者:第一章和第八章是朱秋尔;第二章是丁伯民;第三章是徐正志;第四章是周国民;第五章是刘貽民;第六章是张永维;第七章是徐荣泉;第九章是王慎行。

由于化工生产发展迅速,我们掌握情况有限,本书的内容还会有不足和错误之处,热忱希望广大读者提出宝贵意见,以便再版时补充改正。

在本书编写和审校的过程中,得到了很多单位和同志的大力协助和指导,在此致以深切的谢意。

《化工设备设计全书》编辑委员会

1984年

# 目 录

第一章 绪论 .....	1
第二章 力学基础 .....	4
第一节 弹性理论基础 .....	4
第二节 压力容器的不连续应力简述 .....	56
第三节 塑性分析简述 .....	71
第三章 筒体设计 .....	78
第一节 单层厚壁筒体应力分析 .....	78
第二节 多层厚壁圆筒应力分析 .....	112
第三节 温差应力计算 .....	128
第四节 筒体结构 .....	137
第四章 密封设计 .....	155
第一节 密封原理及密封力 .....	155
第二节 高压密封中螺栓受力分析 .....	164
第三节 平垫密封 .....	167
第四节 卡扎里密封 .....	170
第五节 双锥密封 .....	172
第六节 C形环密封 .....	177
第七节 O形环密封 .....	183
第八节 三角垫密封 .....	189
第九节 八角垫密封 .....	190
第十节 N.E.C.式密封 .....	193
第十一节 伍德式密封 .....	195
第十二节 透镜式密封 .....	197
第十三节 自紧密封中的无主螺栓联接 .....	198
第十四节 高压螺栓拧紧与拆卸工具 .....	205
第五章 高压容器零部件设计 .....	209
第一节 平盖的设计计算 .....	209
第二节 筒体端部法兰的设计计算 .....	217
第三节 顶底封头 .....	237
第四节 紧固元件及压紧元件的设计计算 .....	248
第五节 高压容器的吊耳与支座 .....	259
第六节 焊缝系数和焊缝坡口形式 .....	265
第六章 高压容器的开孔与衬里 .....	273

第一节	开孔后应力集中的原因及补强范围的分析 .....	273
第二节	开孔应力集中系数的计算方法 .....	276
第三节	开孔补强的设计计算 .....	286
第四节	开孔补强的结构设计 .....	298
第五节	高压容器的衬里设计 .....	305
<b>第七章</b>	<b>高压容器用材 .....</b>	<b>317</b>
第一节	高压容器用材的选择 .....	317
第二节	高压容器用强度钢 .....	321
第三节	氢、氮、氧混合气体对钢材的腐蚀 .....	335
<b>第八章</b>	<b>蠕变设计 .....</b>	<b>357</b>
第一节	蠕变 .....	357
第二节	应力松弛 .....	366
<b>第九章</b>	<b>断裂力学在压力容器上的应用 .....</b>	<b>369</b>
第一节	线弹性断裂力学 .....	369
第二节	弹塑性断裂力学 .....	385
第三节	疲劳裂纹的扩展 .....	390
第四节	应力腐蚀裂纹的扩展 .....	397
第五节	断裂力学在压力容器上的应用 .....	399
<b>第十章</b>	<b>高压容器的破坏形式与无损检验 .....</b>	<b>416</b>
第一节	压力容器的破坏形式及脆性破坏实例 .....	416
第二节	压力容器焊接的若干问题 .....	420
第三节	高压容器的无损探伤 .....	438



# 第一章

## 绪论

### 一、高压容器在工业生产中的应用

1833年法国巴黎大学教授 Lamé 和 Clapeyron 得出了厚壁圆筒平衡公式和应力分布公式,提出了在圆筒内施加压力时,其内部的应力分布,从而为高压容器的发展奠定了理论基础。

1888年法国学者 Lechatlier 首先提出利用压力这个因素来促进氢氮的反应及提高氨产量的著名原理及设想。继而德国化学家 Haber 等继续进行了这方面的研究,并从设备上解决了问题。并于1910年建立了一个中间工厂,第一次在  $200 \text{ kgf/cm}^2$  操作压力下得到氨的工业产品。几乎在同一时代,煤炭的液化亦采用了高压设备。

随着近代化工工业的迅速发展,高压容器获得愈来愈广泛的应用。如合成氨工业中的高压设备压力为  $150 \sim 600 \text{ kgf/cm}^2$ ; 合成甲醇工业中的高压设备压力为  $150 \sim 300 \text{ kgf/cm}^2$ ; 合成尿素工业中的高压设备压力为  $200 \text{ kgf/cm}^2$ ; 石油加氢工业中的高压设备压力为  $80 \sim 700 \text{ kgf/cm}^2$  等。从各方面的技术应用中表明,高压容器在现代工业中的应用是必不可少,而且是得到迅速发展的一个领域。

### 二、高压容器范围的划分

高压容器的范围既可按压力  $P$  划分,亦可按内外径之比  $K$  来划分。容器的设计压力  $P$  与  $K$  值是有直接联系的,但亦有本质区别。压力  $P$  仅说明容器所承受的载荷,而  $K$  值则反映了容器器壁内的应力分布。 $K$  值越大,应力分布的不均匀程度就越大。反之, $K$  值越小,则应力分布越趋于均匀。对一定的容器来说,压力  $P$  越大, $K$  值亦随之增加。

本书所述的高压容器的范围为  $100 \text{ kgf/cm}^2 < P < 1000 \text{ kgf/cm}^2$  或  $K = D_o/D_i > 1.1$  [1.2.3.4]。

### 三、有关高压容器设计准则的几种观点

近代大量的厚壁容器破坏试验结果表明,由塑性较好的材料制成的厚壁容器,从开始承受压力到发生爆破,大致经历了三个阶段,其变形与试验压力之间的关系曲线如图 1-1 所示。

图中曲线  $OA$  部分为弹性阶段,即容器的应力和变形随着试验压力的增加而成正比地增加。

自  $A$  至  $B$  这一阶段中,首先由内壁开始屈服,然后随着试验压力的增加,屈服区域由内壁逐渐向外壁扩展,直至整个截面全部屈服为止。这时试验压力虽然不再增加,而容器的塑性变形则很快增加。这时的压力称为屈服压力,用  $P_s$  表示。这一阶段称为屈服阶段。对不同材料,屈服阶段长短不一,低碳钢制压力容器其屈服阶段比较显著;而对于某些高强度钢,由于塑性较差,其屈服阶段则不明显。

图中  $BC$  部分为强化与爆破阶段。当压力增加到屈服压力后,容器发生了大量的塑性

变形,但不立即发生爆破,这是由于塑性材料屈服后会发生应变硬化,使容器仍然承受一定的压力。所以在屈服后,压力还可以继续增加,直至最后发生爆破<sup>[5]</sup>。

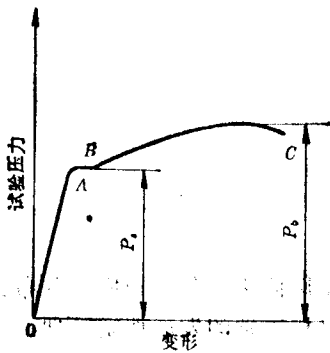


图 1-1 厚壁容器破坏过程中压力与变形关系

根据上述三个阶段,高压容器的筒体强度设计准则主要有以下三种观点:

(一)以弹性失效为破坏准则的设计观点

这种观点认为,器壁上最大点的应力强度达到材料的屈服极限后,容器便失去正常工作能力,亦即失效。这种失效称之为弹性失效。

(二)以塑性失效为破坏准则的设计观点

这种观点认为,器壁上应力最大点的材料进入屈服阶段,并不导致整个容器破坏,因为其他部分金属仍然处在弹性状态。这样,已经进入屈服阶段的材料,要进一步发生塑性变形便受到仍处在弹性阶段金属的限制。只有当塑性区不断扩展,直至整个截面发生屈服,容器才失去正常工作能力。这种失效称之为塑性失效。

(三)以爆破失效作为破坏准则的设计观点

这种观点认为,厚壁容器的器壁很厚,而且都是用塑性较好的材料制成的,由于应变硬化,材料屈服后再进一步变形需要更大的力,而不是立即发生破坏。只有发生爆破,容器才是真正破坏。

目前大多数国家有关高压容器的设计规范,都是从弹性失效的观点出发制定的。

#### 四、对高压容器设计的基本要求

在化学工业中使用的高压容器,其操作随工艺过程而异,情况比较复杂。它不仅承受高压,而且具有高温(如加氢反应器的设计温度高达 $500^{\circ}\text{C}$ )和低温(如液氮洗工艺的温度低至 $-196^{\circ}\text{C}$ ),同时还往往伴有介质(如氢、氮、一氧化碳与尿素等)的强烈腐蚀。所以对高压容器的设计、制造与检验应十分重视。另外,由于压力容器大型化的发展趋势,容器的直径、壁厚、重量越来越大。容器的使用条件日益苛刻。因此在设计高压容器时,必须从操作条件出发,对安全、选材、制造、检验等各方面进行全面综合的比较和分析,以期作出一个操作安全、技术先进、经济合理的设计。

在高压容器的设计过程中,一般应考虑下列问题:

(一)高压容器的结构必须保证强度的可靠性和密封的严密性

为了保证强度的可靠性,使容器在确定压力(或其他外部载荷)作用下,不导致破坏或过量的塑性变形,就必须对容器的受力元件作详细的应力分析,并结合选材、制造、检验等作综合的考虑,然后定出合理的壳体结构和尺寸。

为了保证密封的严密性,使容器在操作时不产生泄漏,避免因而引起的着火或爆炸事故,就必须从结构简单、密封可靠、便于加工、装卸、检验等出发,慎重确定密封结构。

由于在一定压力下容器的壁厚随直径的增加而增加,直径和壁厚的增加又对选材、密封、制造、检验、运输等各方面带来许多困难;因此,一般高压容器的结构在满足操作条件的前提下,当容积一定时,希望采用较大的长径比,并要求有效地利用高压空间。

## (二) 高压容器的选材

高压容器所选用的材料应具有良好的综合机械性能和耐腐蚀性能,同时应遵守经济、节约和符合国情的原则。

所谓良好的综合机械性能是指强度高,塑性和韧性好,以及良好的制造和加工工艺性。良好的耐腐蚀性是指材料耐操作介质腐蚀的程度,除了不应直接影响设备使用寿命外,同时还不应影响产品质量。经济节约和符合国情可以降低设备成本,保证材料的来源和供应。

## (三) 高压容器的制造和检验必须严格遵守各种技术条件和有关规程

不论在制造过程中还是在现场使用过程中都要执行严格的检查和试验。这样,一方面可以及早发现缺陷,保证制造质量;另一方面可对容器的承载能力作验证,以确保容器的安全操作。因此,在设计过程中必须正确选定制造检验技术条件作为制造检验的准绳。同时必须使设计符合技术条件的各种要求。

对高压容器,常用的制造和检验规程有:

JB741-80	“钢制焊接压力容器技术条件”
JB754-80	“多层压力容器技术条件”
JB1149-80	“扁平钢带压力容器技术条件”
JB532-80	“热套压力容器技术条件”
JB1150-73	“压力容器用钢板超声波探伤”
JB1151-73	“高压无缝钢管超声波探伤”
JB1152-73	“钢制压力容器对接焊缝超声波探伤”
JB928-67	“焊缝射线探伤标准”
JB755-73	“压力容器锻件技术条件”
JB/Z105-73	“钢制压力容器焊接规程”

# 第二章

## 力学基础

### 第一节 弹性理论基础<sup>[6,7,8]</sup>

#### 一、弹性理论的内容和基本假设

弹性理论是研究弹性物体在外载荷(包括机械载荷和温度变化)作用下所产生的应力和应变、以及和应变有关的位移的一门科学。

弹性理论的基本假设如下:

##### (一) 物体是连续的

物体内部由连续介质组成,因此物体中的应力、应变、位移等量都是连续的,都可以用位置坐标的连续函数来表示。

##### (二) 物体是匀质的和各向同性的

物体内部各点与各方向上的组分相同,因此物体各部分的物理性质是相同的。钢材虽然由各向异性的晶粒组成,但由于晶粒非常微小,而且杂乱排列,所以钢材的宏观性质,可认为是各向同性的,而木材则看成是各向异性的。

##### (三) 物体是完全弹性的

物体在外载荷的作用下引起变形,在外载除去后,物体完全恢复其原来形状而没有任何残余变形。同时还假定材料服从 Hooke 定律,即应力与应变成正比。

##### (四) 物体的变形是微小的

在外载作用下物体变形而产生的位移,与物体的尺寸相比是很微小的。在微小变形情况下,弹性理论中的微分方程将是线性的。

#### 二、应力分析

物体在外力作用下处于平衡,物体内的每一点将产生应力和应变。为了研究物体内某一点的应力,从中取出一平行六面微分体,它的各面分别与各坐标面相平行,并设其边长分别为  $PA=dx$ ,  $PB=dy$ ,  $PC=dz$ , 其体积为  $dV=dx dy dz$ , 见图 2-1。

六面微分体受到其周围物体的作用,分别在每个微分面上产生应力,把每一个微分面上的应力分解为一个正应力和两个剪应力。正应力分别用  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  表示,  $\sigma_x$  表示作用在垂直于  $x$  轴的面上且沿  $x$  轴方向,  $\sigma_y, \sigma_z$  分别表示作用在垂直于  $y$  轴、 $z$  轴的面上且沿  $y, z$  轴方向。剪应力分别用  $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  表示,  $\tau_{xy}$  表示作用在垂直于  $y$  轴的面上且沿  $x$  方向,  $\tau_{yz}, \tau_{zx}$  分别表示作用在垂直于  $z, x$  轴的面上且沿  $y, z$  方向。

如果某一个微分面上的外法线是朝着坐标轴的正方向,则这个面上的正应力就以沿着坐标轴正方向为正,沿着坐标轴负方向为负;反之,如果某一个微分面上的外法线是朝着坐标轴的负方向,则这个面上的正应力就以沿着坐标轴的负方向为正,沿着坐标轴的正方向为负。图 2-1 中所示的应力全部都是正的。

(一) 直角坐标系中的平衡微分方程

在图 2-1 中六面微分体后面的微分面上作用的正应力为

$$\sigma_x = f(x, y, z)$$

在前面的微分面上, 坐标  $x$  存在增量  $dx$ , 因此这个面上的正应力相应为

$$\sigma'_x = f(x + dx, y, z)$$

根据物体的连续性假设, 上式可以展开为 Taylor 级数并略去二阶以上的各项微量而得

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$$

其余各应力可按同法列出类似的表达式。

整个物体在外力作用下处于平衡状态, 则从其中取出的六面微分体在各应力和体积力作用下也应当处于平衡状态, 应满足下述六个平衡条件:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \\ \sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \end{aligned}$$

设体积力在  $x, y, z$  轴三个方向的分量分别用  $K_x, K_y, K_z$  表示, 运用  $\sum F_x = 0$ , 归纳平行于  $x$  轴的正应力、剪应力和体积力, 则

$$\begin{aligned} \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz \\ + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + K_x dx dy dz = 0 \end{aligned}$$

同理, 按  $\sum F_y = 0, \sum F_z = 0$  也可列出类似的平衡式, 并经简化后可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + K_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + K_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + K_z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-1a)$$

这就是以直角坐标表示的一般空间问题的平衡微分方程。

运用  $\sum M_x = 0$ , 以六面微分体前后两面中心联线  $ee'$  作为取力矩的轴,  $ee'$  与  $x$  轴是平行的, 于是  $\sum M_x = \sum M_x = 0$

$$\begin{aligned} \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz \frac{dy}{2} + \tau_{xy} dx dz \frac{dy}{2} - \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) \\ dx dy \frac{dz}{2} - \tau_{yx} dx dy \frac{dz}{2} = 0 \end{aligned}$$

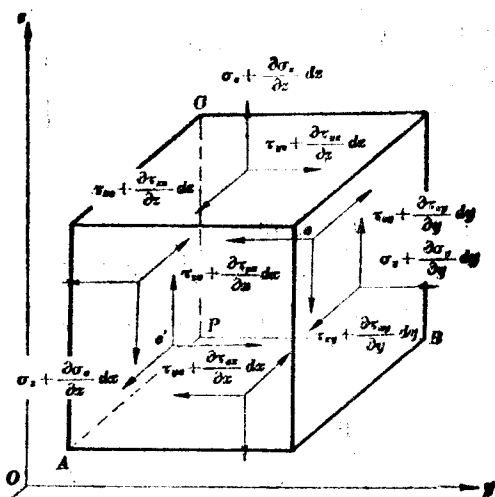


图 2-1 平行六面微分体的应力分析

或 
$$\tau_{xy} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy - \tau_{yx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial z} dz = 0$$

略去微量后得式(2-2)的第一等式。同理,利用  $\sum M_y = 0, \sum M_z = 0$  可得式(2-2)的其余两个等式:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

这是剪应力互等定律。

(二) 物体任一点的应力状态

在图 2-2 中,取物体中任一点  $P$  为坐标原点,通过此点可以作任意个斜微分面。

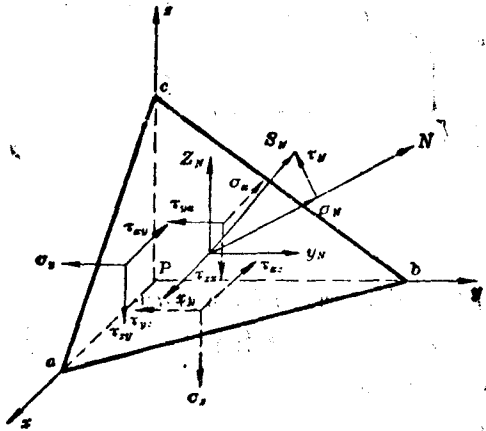


图 2-2 物体任一点的应力状态

设通过  $P$  点而平行于坐标面的三个微分面上的应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yx} = \tau_{xy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{zy} = \tau_{yz}$  为已知,求取通过该点的某一斜微分面上的应力。为此,在  $P$  点附近取一平面  $abc$ ,它平行于所分析的斜微分面,平面  $abc$  的外法线  $N$  与各坐标轴的方向余弦为

$$\begin{aligned} \cos(N, x) &= l \\ \cos(N, y) &= m \\ \cos(N, z) &= n \end{aligned}$$

斜微分面  $abc$  与通过  $P$  点的三个坐标面组成一个四面微分体  $Pabc$ ,自  $P$  点至斜微分面  $abc$  的垂直距离  $dh$  是一微量,即四面微分体的高度。

斜微分面  $abc$  的面积为  $dS$ ,则其他三个微分面的面积分别为

$$\begin{aligned} \text{面积 } Pcb &= dS \cdot l \\ \text{面积 } Pac &= dS \cdot m \\ \text{面积 } Pab &= dS \cdot n \end{aligned}$$

四面微分体的体积为

$$dV = \frac{1}{3} dh \cdot dS$$

由于这些微分面很小,其上所作用的应力可以看作为均匀分布的。设斜微分面  $abc$  上的应力  $S_N$  在坐标轴上的投影为  $x_N, y_N, z_N$ ,根据四面体的平衡条件,按  $\sum F_x = 0$  得

$$x_N dS - \sigma_x dS \cdot l - \tau_{xy} dS \cdot m - \tau_{xz} dS \cdot n + K_x dV = 0$$

将上式除以  $dS$ ,并注意到  $\frac{dV}{dS} = \frac{1}{3} dh$ ,当  $dh \rightarrow 0$  时,斜微分面  $abc$  即为通过  $P$  点所考察的斜微分面,此时由于  $dV$  是比  $dS$  属更高一阶的微量,所以  $\frac{dV}{dS} \rightarrow 0$ ,据此而得式(2-3)的第一式。其余两式可分别由平衡条件  $\sum F_y = 0$  和  $\sum F_z = 0$  同样地得出:

$$\left. \begin{aligned} x_N &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ y_N &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ z_N &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n \end{aligned} \right\} \quad (2-3)$$

设斜微分面  $abc$  上的正应力为  $\sigma_N$ ,则由投影可得

$$\sigma_N = x_N l + y_N m + z_N n$$

将式(2-3)代入并运用剪应力互等定律, 可得

$$\sigma_N = \sigma_x l^3 + \sigma_y m^3 + \sigma_z n^3 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl \quad (2-4)$$

设斜微分面上的剪应力为  $\tau_N$ , 则由于

$$S_N^2 = \sigma_N^2 + \tau_N^2 = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2$$

故

$$\tau_N^2 = x_N^2 + y_N^2 + z_N^2 - \sigma_N^2 \quad (2-5)$$

由式(2-4)和(2-5)可见, 在物体内的任一点, 如果已知六个应力分量  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ , 就可以求得通过此点任一斜面上的正应力和剪应力。

(三) 圆柱坐标系中的平衡微分方程

在圆柱坐标系中, 物体上某一点 A 的位置决定于此点的 z 轴高度、在高度为 z 的截面上此点与坐标原点的距离 r 以及 r 方向与某一轴 O<sub>x</sub> 间的夹角  $\theta$ , 如图 2-3 所示。

圆柱坐标和直角坐标的转换关系为

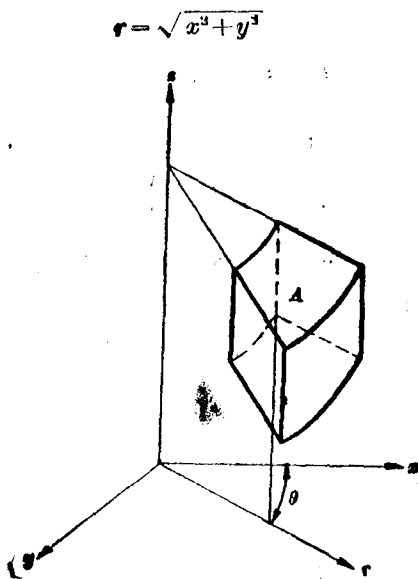


图 2-3 圆柱坐标系

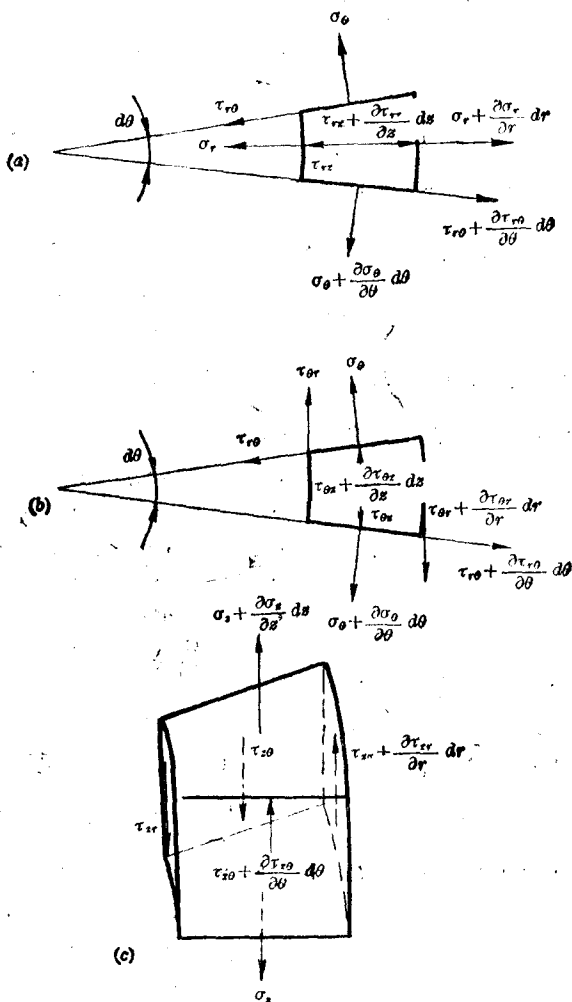


图 2-4 圆柱坐标系中微分体的应力分析

$$\theta = \arctg \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

在以圆柱坐标表示的物体上切出一高度为  $dz$ ,  $r$  方向为  $dr$ , 夹角为  $d\theta$  的六面微分体, 在  $r, \theta, z$  方向的体积力分量分别以  $K_r, K_\theta, K_z$  表示, 分别在  $r, \theta, z$  方向列出平衡微分方程式, 见图 2-4。

在  $r$  方向, 见图 2-4(a)

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_r + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \sin \frac{d\theta}{2} \\ & - \sigma_\theta dr dz \sin \frac{d\theta}{2} + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \cos \frac{d\theta}{2} - \tau_{r\theta} dr dz \cos \frac{d\theta}{2} \\ & + \left( \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - \tau_{rz} r d\theta dr + K_r r d\theta dr dz = 0 \end{aligned}$$

在  $\theta$  方向, 见图 2-4(b)。

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_\theta + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \cos \frac{d\theta}{2} - \sigma_\theta dr dz \cos \frac{d\theta}{2} + \left( \tau_{r\theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \sin \frac{d\theta}{2} \\ & - \tau_{r\theta} dr dz \sin \frac{d\theta}{2} + \left( \tau_{\theta r} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \tau_{\theta r} r d\theta dz \\ & + \left( \tau_{\theta z} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} dz \right) (r + dr) d\theta dr - \tau_{\theta z} r d\theta dr + K_\theta r d\theta dr dz = 0 \end{aligned}$$

在  $z$  方向, 见图 2-4(c)。

$$\begin{aligned} & \left( \tau_{rz} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta dz - \tau_{rz} r d\theta dz + \left( \tau_{z\theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr dz \\ & - \tau_{z\theta} dr dz + \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) r d\theta dr - \sigma_z r d\theta dr + K_z r d\theta dr dz = 0 \end{aligned}$$

将上述三式加以简化, 考虑到  $\frac{d\theta}{2}$  很小, 可以取  $\sin \frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ ,  $\cos \frac{d\theta}{2} = 1$ , 根据剪应力互等定律, 并略去高阶微量, 可以得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + K_r &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + K_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + K_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-6)$$

这就是以圆柱坐标表示的一般空间问题的平衡微分方程。对于轴对称问题, 各个位移、应变和应力都只是  $r$  和  $z$  的函数而与  $\theta$  无关。物体变形时在周向和径向之间、周向和轴向之间不存在相对移动, 于是, 式(2-6)在轴对称情况下可得

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = 0 \quad \tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = 0$$

不计及体积分量  $K_r$ 、 $K_\theta$ 、 $K_z$  时, 可将式(2-6)加以简化:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-7)$$

这是以圆柱坐标表示的轴对称问题的平衡微分方程。

### 三、应变分析

(一) 直角坐标系中的几何方程

物体在受外载后各点的位移是不同的, 因此各点的位移是该点位置的坐标函数, 见图 2-5。设物体中某任意点  $M$ , 在沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向取三个微元长度各为  $MN = dx$ ,  $MP = dy$ ,



$ML = dz$  (为清晰起见, 图中只标出  $xOy$  平面), 在外载作用下产生变形, 分别移到  $M_1$ 、 $N_1$ 、 $P_1$ 、 $L_1$  点, 矢量  $MM_1$  为物体变形时  $M$  点的位移, 此位移在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴上的投影分别用  $u$ 、 $v$ 、 $w$  表示, 按照物体连续性的假设, 位移分量  $u$ 、 $v$ 、 $w$  依物体受载情况而分别是  $M$  点坐标的连续函数, 即

$$u = f_1(x, y, z)$$

$$v = f_2(x, y, z)$$

$$w = f_3(x, y, z)$$

$N$  点移到  $N_1$  点时, 在  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向的位移为  $u_1$ 、 $v_1$ 、 $w_1$ , 由于  $MN$  平行于  $x$  轴, 且其长度为  $dx$ , 故可表示为

$$u_1 = f_1(x + dx, y, z)$$

$$v_1 = f_2(x + dx, y, z)$$

$$w_1 = f_3(x + dx, y, z)$$

$P$  点移到  $P_1$  点时, 位移为  $u_2$ 、 $v_2$ 、 $w_2$ , 由于  $MP$  平行于  $y$  轴, 且其长度为  $dy$ , 故可表示为

$$u_2 = f_1(x, y + dy, z) \quad v_2 = f_2(x, y + dy, z) \quad w_2 = f_3(x, y + dy, z)$$

$L$  点移到  $L_1$  点时, 位移为  $u_3$ 、 $v_3$ 、 $w_3$ , 由于  $ML$  平行于  $z$  轴, 且其长度为  $dz$ , 故可表示为

$$u_3 = f_1(x, y, z + dz) \quad v_3 = f_2(x, y, z + dz) \quad w_3 = f_3(x, y, z + dz)$$

将  $N$ 、 $P$ 、 $L$  点沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向的位移  $u_1$ 、 $v_1$ 、 $w_1$  等表达式分别展开为 Taylor 级数, 并略去二阶以上的各项微量可得 (此处只论述沿  $x$  轴的  $MN$  线段,  $MP$ 、 $ML$  线段可按完全相同的方法讨论)

$$u_1 = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v_1 = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad w_1 = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

线段  $MN$  在变形后的伸长量沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴方向的分量分别为

$$u_1 - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v_1 - v = \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad w_1 - w = \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

所以, 线段  $M_1N_1$  在各坐标轴上的投影为

$$dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

线段  $M_1N_1$  的长度为

$$\begin{aligned} M_1N_1 &= \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx\right)^2} \\ &= dx \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} \end{aligned}$$

根据物体的变形是微小的这一假设, 线段  $MN$  于变形后在横向, 即  $y$  与  $z$  方向的位移很小, 不影响其长度, 可以略去上述平方根号内的第二和第三项, 得

$$M_1N_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

因  $MN$  平行于  $x$  轴, 故  $MN = dx$ , 于是线段  $MN$  在  $x$  轴方向的正应变, 即平行于  $x$  轴的线应变分量为

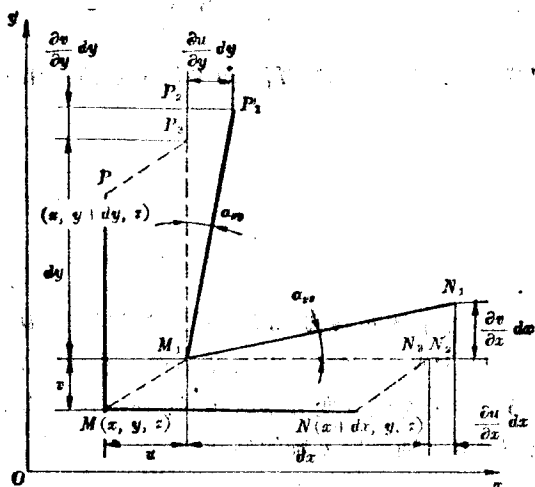


图 2-5 直角坐标系中的应变分析