

# 航空发动机 强度设计试验手册

(试用本)

第一篇 第二章

叶片强度与振动计算

第三机械工业部第六研究院

# 航空发动机强度设计、试验手册

## 第一篇 第二章

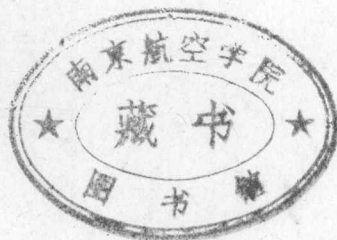
### 叶片强度与振动计算



\*30178233\*

工 编 蔡肇云 金六周

主 审 黄文虎 宋家骥



第三机械工业部第六研究院

448370

# 航空发动机叶片强度计算手册

## 内 容 提 要

本章叙述了燃气涡轮和轴流式压气机叶片的强度和振动计算。主要介绍了叶片计算状态的选取，强度储备系数，基于杆件理论的叶片强度和振动计算，枞树型、燕尾型和销钉榫头的应力计算，叶片强度和振动的有限元素计算方法，以及榫头榫槽的有限元素计算方法，并附有相应的计算实例和程序。为便于读者使用，还编入了与本章有关的求解代数方程组和特征方程的计算方法。内容力求广泛、实用，结合实际，可供从事航空发动机生产、设计和航空院校有关人员参考使用。

(本手册)

编 者 金 云 著  
主 审 宋 文 黄



航空工业出版社

078844



## 出版说明

为加强航空发动机强度专业的设计和基础科研工作，总结建国以来航空发动机强度专业的工作成果，我们组织编写了“航空发动机强度设计、试验手册”（试用本），并望在今后的试用过程中，不断地加以修正、充实和提高，进而为编制我国航空发动机强度规范打下基础。

本手册分设计和试验两篇。设计篇有六章，主要介绍发动机总体结构强度和叶片、盘、轴、机匣等主要零、部件的常规强度计算方法和有限元素法，并给出了相应的计算程序。试验篇六章介绍了主要零、部件的强度试验方法、试验设备、测试技术及误差分析等内容。书中也收集了国外航空发动机强度设计计算与试验等方面的有关资料。由于手册涉及专业内容较多，故采取分章出版。每章为一分册。

本手册主要供从事航空发动机结构设计、强度计算和强度试验的人员使用；也可供教学及有关专业人员参考。

直接参加本手册编写工作的有六〇六、六〇八、六二一、六二四、六三〇所，一二〇、三三一、四一〇、四二〇、四三〇厂，〇一一基地二所，南航、北航、西工大，三院三十一所，七院七〇三所、七〇一所和上海长征机械厂。三〇一所和六二八所为本手册提供了有关资料。

本手册由于是初次编写，时间仓促，水平有限，错误和不妥之处在所难免，诚恳地希望同志们提出批评和指正。



## 主要符号表

A	截面积
C	离心力、气流速度
E	材料弹性模量
e	偏心距、力臂
F	力
G	截面重心、材料剪切模量
$I_T$	截面抗扭常数
$J_{Gx}$ 、 $J_{Gy}$ 、 $J_{Gxy}$	对重心坐标系的惯性矩、惯积
$J_{Gp}$	对重心的极惯矩
$J_r$	四次方极惯矩
$J_x$ 、 $J_y$ 、 $J_{xy}$	对 x、y 轴的惯性矩、惯积
$J_{T\bar{x}}$ 、 $J_{T\bar{y}}$ 、 $J_{\bar{x}}$ 、 $J_{\bar{y}}$ 、 $J$ 、 $J_T$	对弯心坐标系的高次矩
$J_{Tp}$	对弯心的极惯矩
$J_{\eta}$ 、 $J_{\xi}$	最小、最大惯性矩
$J_{\rho\eta}$ 、 $J_{\rho\xi}$	主极轴惯性矩
K	修正系数
l	叶片长度
M	力矩
N	正压力、形函数
P	压力
Q	载荷
q	分布载荷、叶片自然扭转度
R、r	半径
$S_x$ 、 $S_y$	对 x、y 轴的静矩
T	截面弯心、系统动能
V	系统的势能、体积
W	功、抗弯断面系数
u、v、w	在 x、y、z 方向的位移
X、Y、Z	直角坐标
x、y、z	直角坐标
$\alpha_T$	材料线膨胀系数
$\alpha$ 、 $\beta$	角度

$\gamma$	角度、伸长量
$\varepsilon$	应变
$\xi, \eta$	最大、最小主惯性轴
$\theta$	角度
$\mu$	材料泊桑比
$\nu$	柔性系数
$\rho$	材料密度
$\sigma$	正应力
$\tau$	剪应力
$\phi$	角度
$\Omega$	旋转角速度
$\omega$	圆频率
[B]	变换矩阵
[D]	弹性矩阵
{F}	载荷向量
[J]	雅可比矩阵
[K]	刚度矩阵
[M]	质量矩阵
[N]	形状函数矩阵
{P}、{Q}、{R}	载荷向量
{ $\delta$ }	位移向量
{ $\varepsilon$ }	应变向量
{ $\theta$ }、{ $\lambda$ }	坐标转换矩阵
{ $\sigma$ }	应力向量

### 上标和下标

a	轴向
e	元素
G	重心
i	任意点
k	扭转
max	最大
min	最小
T	弯心、凸肩(或叶冠)
u	周向
x、y、z	相对于 x、y、z 坐标轴
$\eta$ 、 $\xi$	相对于 $\eta$ 、 $\xi$ 坐标轴
dl	当量

fj

g

jy

la

lx

pj

q

wq

yj

附加  
叶根  
挤压  
拉伸  
离心  
平均  
气体  
弯曲  
叶尖



## 序 言

叶片是航空发动机的主要零件，其形状和承载情况十分复杂，它的强度设计质量，直接关系到发动机的性能、可靠性和寿命。为此，制定合理的强度设计规范和选取适当的计算方法，尽可能精确地计算叶片的应力、频率和振型是极其重要的。

本章的主要内容包括应力储备系数、叶片强度、叶片振动和榫头应力的常规计算方法及有限元素法，并附有程序。为便于读者使用，也编入了与本章有关的求解代数方程组和特征方程的计算方法。内容力求广泛、实用，反映当前的生产、设计水平。

本章的叶片应力校核准则，主要根据国内的经验，并参照国外发动机设计资料给出。对不同用途的发动机和不同的计算方法，其应力标准应该有所不同。文中给出的数据，仅适用于按常规计算方法设计的某些类型的发动机转子叶片。由于我们的水平和工作局限性，给出的数据仅供参考。这方面的工作，有待于今后在实践中不断地加以发展。

叶片的常规计算方法是目前使用最普遍的一种方法，多年来积累了一定的使用经验，至今仍是设计阶段常用的计算方法。对于大展弦比、中、小自然扭转的涡轮叶片和压气机叶片，一般可得到较好的计算结果。对于小展弦比、大自然扭转的叶片，因基于杆件理论的计算模型偏离真实叶片较远，故计算误差较大。

有限元素法是一种计算精度较高的数值计算方法，近年来，已越来越广泛地应用于工程设计。在航空发动机叶片强度和振动计算方面，国内不少单位也做了很多工作。虽然在方法程序上还不够成熟配套，但实际计算已取得了令人满意的结果。为了在航空发动机领域推广使用有限元素法，故在本章内也汇集了目前国内已发表的有关叶片强度、振动和榫头应力计算的有限元素法，以期在实践中不断改进和完善。本章汇集的叶片有限元素法只适用于已知量条件下的叶片强度和振动计算，仅采用了两种元素：三节点九个自由度的三角板元素和八节点四十个自由度的超参数壳体元素。采用这种三角板元素所建立的有限元素法，比较简单，尤其在采用节点平均坐标系后，节省了大量内存，减少了计算工作量，对于叶型较薄、弯度较小的实心叶片，可得到较好的结果。八节点超参数壳体元素是相容性元素，它考虑了横向剪切效应，因此，既能用于薄叶片又能用于厚叶片。由于此元素的形状函数是双二次函数，能比较真实地模拟叶片的复杂几何形状和位移模式，因而计算精度也较高。

榫头有限元计算方法，采用三角形元素。文中给出了榫头与榫槽接触表面的两种不同处理方法。一为接触表面间沿法线方向采用大刚度的杆元素联结，该方法简单，需要的计算机内存较小。另一为按一般的平面弹性接触问题处理，可以考虑摩擦力及加载过程中接触状况的变化，比较真实地模拟了榫头的边界条件，因而计算精度较高，但需要的计算机容量较大。该方法可推广到轴对称问题和三维问题。

本章由一二〇、三三一厂，〇一一基地二所，上海长征机械厂，六〇八、六〇六所合编。由黄文虎、宋家骥同志主审，蔡肇云、金六周主编。

第一节由蔡肇云、金六周编写。

第二节由窄明德、沈长全、张国振、王正涛、陈向均、姚善莲、章爱宝、蔡肇云、金六周编写。

第三节由许棠、李明达、任培正、金六周、蔡肇云编写。

第四节由章爱宝、尹泽勇编写。

第五节和第六节均有以上相应人员编写。

本章编写时，仅以部内少数单位的工作为基础。由于水平有限，经验不足，时间仓促，文中一定存在不少缺点和错误，恳请读者提出批评指正，以便进一步修改，逐步完善。

### 《航空发动机强度设计、试验手册》

（试用本）第一篇第二章编写小组

一九八一年十月

# 目 录

序 言	( 1 )
第一节 计算状态和强度储备系数	( 1 )
一 计算状态的选取	( 1 )
二 强度储备系数	( 4 )
第二节 基于杆件理论的叶片强度和振动计算以及榫头强度近似计算	( 4 )
一 叶型几何特性	( 4 )
二 叶片强度计算	( 11 )
三 叶片弯曲-扭转复合振动计算	( 20 )
四 榫头强度近似计算	( 29 )
第三节 有限元素法在叶片强度和振动计算中的应用	( 35 )
一 基本理论	( 35 )
二 用三角板元素计算叶片的强度和振动	( 42 )
三 八节点超参数壳体元素在叶片振动计算中的应用	( 59 )
四 八节点超参数壳体元素在凸肩叶片强度和振动计算中的应用	( 71 )
第四节 有限元素法在榫头-榫槽强度计算中的应用	( 84 )
一 计算模型和总体坐标系的选取	( 84 )
二 三角形元素的应用	( 84 )
三 边界处理——刚性杆元素的应用	( 87 )
四 榫头-榫槽接触面按弹性接触问题处理	( 87 )
第五节 计算方法	( 95 )
一 高斯消去法	( 95 )
二 块追赶法	( 96 )
三 LDL <sup>T</sup> 分解解法	( 98 )
四 平方根法	( 99 )
五 反迭代法	( 101 )
六 子空间迭代法	( 103 )
第六节 计算实例和程序说明	( 108 )
一 叶片强度计算实例和程序说明	( 108 )
二 叶片弯曲-扭转复合振动计算实例和程序说明	( 117 )
三 用三角板元素计算叶片强度的实例和程序说明	( 122 )
四 用三角板元素计算叶片振动的实例和程序说明	( 130 )
五 用八节点超参数壳体元素计算叶片振动的实例和程序说明	( 139 )



六	用八节点超参数壳体元素计算凸肩叶片强度和振动的实例和程序说明	( 147 )
七	用三角形元素计算榫头 - 榫槽强度之计算实例和程序说明	( 158 )
八	榫头 - 榫槽接触面按弹性接触问题处理之强度计算实例和程序说明	( 161 )
附录 I	计算机程序	( 168 )
一	叶片强度计算程序	( 168 )
( 二 )	叶片弯曲 - 扭转复合振动计算程序	( 186 )
( 三 )	用三角板元素计算叶片强度之计算程序	( 200 )
( 四 )	用三角板元素计算叶片振动之计算程序	( 217 )
( 五 )	用八节点超参数壳体元素计算叶片振动之计算程序	( 240 )
( 六 )	用八节点超参数壳体元素计算凸肩叶片强度之计算程序	( 266 )
( 七 )	用八节点超参数壳体元素计算凸肩叶片振动之计算程序	( 281 )
( 八 )	1 用八节点超参数壳体元素计算凸肩叶片振动时形成 $[K]$ 和 $[M]$ 矩阵之计算程序	( 281 )
( 九 )	2 分块子空间迭代法之计算程序	( 283 )
( 十 )	八 用三角形元素计算榫头 - 榫槽强度之计算程序	( 292 )
( 十一 )	九 榫头 - 榫槽接触面按弹性接触问题处理之强度计算程序	( 296 )
附录 II	坐标转换	( 331 )
附录 III	凸肩的约束扭矩	( 331 )
附录 IV	离心力计算	( 332 )
附录 V	振动微分方程组的推导	( 333 )
附录 VI	振动微分方程组的降阶处理	( 334 )
附录 VII	作用在叶片上的气体力	( 336 )
附录 VIII	弹性接触条件的引入	( 337 )
参考文献		( 338 )

( 35 )	.....	一
( 36 )	.....	二
( 37 )	.....	三
( 38 )	.....	四
( 39 )	.....	五
( 40 )	.....	六
( 41 )	.....	七
( 42 )	.....	八
( 43 )	.....	九
( 44 )	.....	十
( 45 )	.....	十一
( 46 )	.....	十二
( 47 )	.....	十三
( 48 )	.....	十四
( 49 )	.....	十五

## 第一节 计算状态和强度储备系数

叶片是轴流式航空发动机的重要零件之一，它的强度设计质量直接影响发动机的性能、寿命和工作的安全可靠，为此，做到精心设计极为重要。叶片强度设计首先遇到的问题是选取计算状态，选用何种计算方法以及相应的零件应力标准等。下面对如何选取计算状态和储备系数问题作一简单介绍。

### 一、计算状态的选取

航空发动机的工作状态多，载荷变化大。叶片强度设计的目的，是保证发动机在整个飞行包线内，叶片都具有足够的强度，而且重量轻。在进行强度设计时，如果对每一状态逐一进行计算，则工作量过大。目前常根据飞行包线，选定几个危险应力状态或典型的状态作强度计算点。一般选取最大气动、最小气动、最高温度、设计和台架五个状态作为强度计算点。

最大气动状态，指飞机在海平面（ $H=0$ ）以最大马赫数飞行，此时，叶片承受的气动力最大。

最小气动状态，指飞机在最高升限飞行，此时，叶片承受的气动力最小。

强度设计时，为降低由气动力引起的弯曲应力，常用离心弯矩作部分抵偿。这种抵偿兼顾了最大、最小气动状态，因而在设计阶段，此两状态是必算的。而且，此两状态应力也较高，是必作强度校核的状态。

最高温度状态，叶片承受的载荷不是最大，但工作温度最高。随着温度的升高，材料的机械性能，特别是蠕变性能明显下降，因而也必须作强度校核。

台架状态，计算此状态对台架调试、排故是必需的。

设计状态，这是发动机的设计点，提供的气动参数最全最准，必须进行应力计算。

总之，计算状态的选取是一个比较复杂的问题。随认识的不断深化，应在实践中不断加以完善。

### 二、强度储备系数

燃气涡轮发动机转子叶片，在一定的温度、压力和转速下工作，零件的受力情况较为复杂。合理的选定零件的强度储备系数，使之既能安全可靠工作，又具有较轻的结构重量，尤为重要。但强度储备系数的取值和选用何种计算方法以及机种的类型有关。本文推荐的应力数据是对应第二节的计算方法，且仅供某些类型发动机转子叶片强度设计参考。

参照国内外的设计经验，叶片强度校核包括屈服和破坏校核、蠕变校核、疲劳校核。

## 1. 屈服和破坏校核

表 1-1

内 容	$\sigma/\sigma_b$	$n_b$	$\sigma/\sigma_{0.2}$	$n_s$
压气机叶片型面最大合成应力(弯曲应力和拉伸应力之和)			$\leq 0.67$	$\geq 1.5$
涡轮叶片型面、叶冠、伸根处弯曲应力与拉伸应力之和			$\leq 0.675$	$\geq 1.48$
涡轮叶片型面、叶冠、伸根处离心拉伸应力			$\leq 0.54$	$\geq 1.85$
枞树型榫头喉部平均拉伸应力			$\leq 0.36$	$\geq 2.78$
枞树型榫头一榫齿挤压应力			$\leq 0.36$	$\geq 2.78$
燕尾型榫头喉部截面最大合成应力			$< 0.33$	$> 3$
燕尾型榫头侧面挤压应力	$< 0.33$	$> 3$		
销钉榫头销孔中心线处横截面的平均拉伸应力	$< 0.25$	$> 4$		
销钉榫头销孔最大应力	$< 0.80$	$> 1.25$		
轮缘破裂应力			$< 0.5$	$> 2$
轮缘销孔B点(6点位置)应力	$< 1.3$			
销钉最大弯曲应力	$< 0.30$	$> 3.3$		
销钉剪切面处的斜率 $< 0.003$				

表中  $n_b = \sigma_b / \sigma$  (1-1)

$n_s = \sigma_{0.2} / \sigma$  (1-2)

式中  $\sigma$ ——计算应力

## 2. 蠕变校核

在所有必须考虑蠕变的条件下, 下述应力必须小于规定的蠕变要求。蠕变要求随机种的不同而异。

- 1) 叶片型面的弯曲应力与离心拉伸应力之和。
- 2) 涡轮叶片叶冠、伸根处的合成应力。
- 3) 枞树型榫齿的挤压应力和燕尾型榫头侧面的挤压应力。
- 4) 枞树型榫头或榫槽喉部截面平均拉伸应力和燕尾型榫头或榫槽喉部截面的平均拉伸应力。
- 5) 销钉榫头销钉孔中心线处横截面平均拉伸应力。

## 3. 疲劳校核

### 1) 频率设计

通常对航空发动机转子叶片在各工作转速下的频率设计有如下要求:

- (1) 所计算的频率应偏离已知激振频率的 10%。
- (2) 销钉叶片的一阶滚动振型的振频, 应避免射线图上低阶射线。

### 2) 低频疲劳校核

根据低频疲劳载荷谱, 用线性累积损伤理论估算构件的疲劳损伤, 损伤度为



$$K = \sum \frac{n_i}{N_i} + \sum \frac{t_i}{T_i} \leq [K] \quad (1-3)$$

式中  $K$  ——每  $T$  小时构件的损伤度；

$n_i$  ——每  $T$  小时内，构件在第  $i$  种交变应力下设计循环次数；

$N_i$  ——根据修正的古德曼图所确定的材料在第  $i$  种交变应力下的疲劳寿命（循环至破坏的次数）；

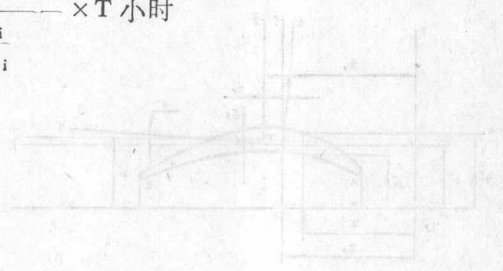
$t_i$  ——载荷谱中应力幅为  $\sigma_{a_i}$  和工作温度为  $t'_i$  的各个峰值持续时间的累积；

$T_i$  ——应力幅为  $2\sigma_{a_i}$ ，工作温度为  $t'_i$  时的材料持久时间；

$[K]$  ——许用的损伤度，考虑疲劳破坏的分散性，取  $0.3 \sim 0.5$ 。

疲劳寿命的计算，也将根据累积损伤理论计算，即

$$L = \frac{[K]}{\sum \frac{n_i}{T_i} + \sum \frac{t_i}{T_i}} \times T \text{ 小时} \quad (1-4)$$



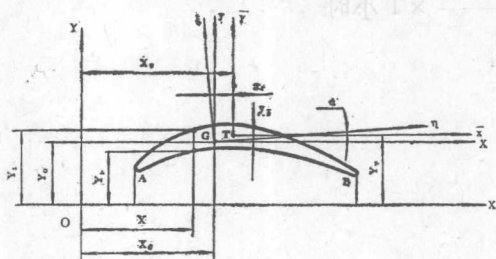
## 第二节 基于杆件理论的叶片强度和振动

### 计算以及榫头强度近似计算

#### 一、叶型几何特性

叶型几何特性，是影响叶片强度和刚度的重要因素之一。这里着重介绍叶型几何特性的计算方法，作为以后计算的基础。

##### 1. 面积、重心、惯性矩、极惯性矩、主惯性轴的计算



- G—重心
- T—弯心
- XOY——任意直角坐标系
- XGY——重心直角坐标系
- $\bar{X}\bar{Y}$ ——弯心直角坐标系
- $\eta, \xi$ ——最小、最大主惯轴

图 2-1 叶型坐标系

##### 1) 积分式

在 XOY 坐标系:

$$\checkmark \quad A = \int \int_A dX dY = \int_A^B (Y_2 - Y_1) dX$$

$$\checkmark \quad S_x = \int \int_A Y dX dY = \frac{1}{2} \int_A^B (Y_2^2 - Y_1^2) dX$$

$$\checkmark \quad S_y = \int \int_A X dX dY = \int_A^B X (Y_2 - Y_1) dX$$

$$\checkmark \quad J_x = \int \int_A Y^2 dX dY = \frac{1}{3} \int_A^B (Y_2^3 - Y_1^3) dX$$

$$\checkmark \quad J_y = \int \int_A X^2 dX dY = \int_A^B X^2 (Y_2 - Y_1) dX$$

$$\checkmark \quad J_{xy} = \int \int_A XY dX dY = \frac{1}{2} \int_A^B X (Y_2^2 - Y_1^2) dX$$

$$\checkmark \quad J_x^{(1)} = \int \int_A Y^3 dX dY = \frac{1}{4} \int_A^B (Y_2^4 - Y_1^4) dX$$

$$\checkmark \quad J_y^{(1)} = \int \int_A X^3 dX dY = \int_A^B X^3 (Y_2 - Y_1) dX$$

$$\checkmark \quad J_x^{(2)} = \int \int_A XY^2 dX dY = \frac{1}{3} \int_A^B X (Y_2^3 - Y_1^3) dX$$

$$J_Y^{(2)} = \int \int_A X^2 Y dX dY = \frac{1}{2} \int_A X^2 (Y_2^2 - Y_1^2) dX$$

$$J_X^{(3)} = \int \int_A Y^4 dX dY = \frac{1}{5} \int_A (Y_2^5 - Y_1^5) dX$$

$$J_Y^{(3)} = \int \int_A X^4 dX dY = \int_A X^4 (Y_2 - Y_1) dX$$

$$J_{XY}^{(3)} = \int \int_A X^2 Y^2 dX dY = \frac{1}{3} \int_A X^2 (Y_2^3 - Y_1^3) dX$$

$$J_X^{(4)} = \int \int_A X Y^3 dX dY = \frac{1}{4} \int_A X (Y_2^4 - Y_1^4) dX$$

$$J_Y^{(4)} = \int \int_A X^3 Y dX dY = \frac{1}{2} \int_A X^3 (Y_2^2 - Y_1^2) dX$$

$$X_G = S_Y / A$$

$$Y_G = S_X / A$$

在  $xGy$  坐标系:

$$J_{Gx} = J_x - Y_G^2 \cdot A$$

$$J_{Gy} = J_y - X_G^2 \cdot A$$

$$J_{Gxy} = J_{xy} - X_G \cdot Y_G \cdot A$$

$$J_{G\rho} = J_{Gx} + J_{Gy}$$

在  $\xi G \eta$  坐标系:

$$J_\xi = J_{max} = \frac{1}{2} [ J_{Gx} + J_{Gy} + \sqrt{(J_{Gy} - J_{Gx})^2 + 4J_{Gxy}^2} ]$$

$$J_\eta = J_{min} = \frac{1}{2} [ J_{Gx} + J_{Gy} - \sqrt{(J_{Gy} - J_{Gx})^2 + 4J_{Gxy}^2} ]$$

$$\alpha = \arctg \frac{J_{Gx} - J_{Gy} + \sqrt{(J_{Gy} - J_{Gx})^2 + 4J_{Gxy}^2}}{2J_{Gxy}}$$

$$J_{\rho\eta} = \int \int_A \xi r^2 dA = \int_A^B [ \frac{1}{4} (\xi_2^4 - \xi_1^4) + \frac{1}{2} \eta^2 (\xi_2^3 - \xi_1^3) ] d\eta$$

$$J_{\rho\xi} = \int \int_A \eta r^2 dA = \int_A^B [ \frac{1}{3} \eta (\xi_2^3 - \xi_1^3) + \eta^3 (\xi_2 - \xi_1) ] d\eta$$

$$J_r = \int \int_A r^4 dA = \int_A^B [ \frac{1}{5} (\xi_2^5 - \xi_1^5) + \frac{2}{3} \eta^2 (\xi_2^3 - \xi_1^3) + \eta^4 (\xi_2 - \xi_1) ] d\eta$$

$$J_{G\rho} = \int \int_A r^2 dA = J_\xi + J_\eta$$

$\bar{x} T \bar{y}$  坐标系中的几何特性可用  $XOY$  坐标系和  $xGy$  坐标系中已算得的几何特性来计算

$$J_{T\bar{x}} = \int \int_A \bar{y} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) d\bar{x} d\bar{y}$$

$$= J_X^{(1)} + J_Y^{(2)} - Y_T \cdot J_Y - 2X_T \cdot J_{XY} - 3Y_T \cdot J_X + S_X (X_T^2 + 3Y_T^2) + 2S_Y X_T Y_T - A Y_T (X_T^2 - Y_T^2)$$



$$J_{T\bar{y}} = \int \int_A \bar{x} (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) d\bar{x} d\bar{y}$$

$$= J_{\bar{x}}^{(3)} + J_{\bar{y}}^{(1)} - X_T J_{\bar{x}} - 3X_T J_{\bar{y}} - 2Y_T J_{\bar{x}\bar{y}} + 2S_{\bar{x}} X_T Y_T$$

$$+ S_{\bar{y}} (3X_T^2 + Y_T^2) - A X_T (X_T^2 + Y_T^2)$$

$$J_T = \int \int_A (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)^2 d\bar{x} d\bar{y}$$

$$= J_{\bar{x}}^{(3)} + 2J_{\bar{x}\bar{y}}^{(3)} + J_{\bar{y}}^{(3)} - 4X_T (J_{\bar{y}}^{(1)} + J_{\bar{x}}^{(2)}) - 4Y_T (J_{\bar{x}}^{(1)} + J_{\bar{y}}^{(2)})$$

$$+ 2J_{\bar{x}} (X_T^2 + 3Y_T^2) + 2J_{\bar{y}} (3X_T^2 + Y_T^2) + 8X_T Y_T J_{\bar{x}\bar{y}} - 4(S_{\bar{x}} Y_T$$

$$+ S_{\bar{y}} X_T) (X_T^2 + Y_T^2) + A (X_T^2 + Y_T^2)^2$$

$$\sqrt{J_{T\rho}} = \int \int_A (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) d\bar{x} d\bar{y}$$

$$= J_{G_x} + J_{G_y} + A (x_T^2 + y_T^2)$$

$$J_{\bar{x}} = -y_T \cdot J_{T\rho} - J_{T\bar{x}}$$

$$J_{\bar{y}} = -x_T \cdot J_{T\rho} - J_{T\bar{y}}$$

$$J = J_T - J_{T\rho}^2 / A$$

2) 用高斯法近似求解积分式

(1) 计算式

$$F = b \sum A_i (Y_{2i} - Y_{1i})$$

$$S_x = \frac{b}{2} \sum A_i (Y_{2i}^2 - Y_{1i}^2)$$

$$S_y = b \sum A_i X_i (Y_{2i} - Y_{1i})$$

$$X_G = S_y / A$$

$$Y_G = S_x / A$$

$$J_x = \frac{b}{3} \sum A_i (Y_{2i}^3 - Y_{1i}^3)$$

$$J_y = b \sum X_i^2 A_i (Y_{2i} - Y_{1i})$$

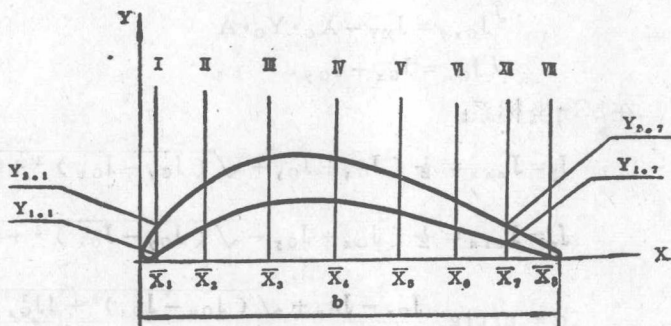


图2-2 高斯点坐标 (n=8)

$$J_{xy} = \frac{b}{2} \sum A_i \cdot X_i (Y_{2i}^2 - Y_{1i}^2)$$

$$J_{G_x} = J_x - Y_G^2 \cdot A$$

$$J_{G_y} = J_y - X_G^2 \cdot A$$

$$J_{G_{xy}} = J_{xy} - X_G \cdot Y_G \cdot A$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2J_{G_{xy}} / (J_{G_y} - J_{G_x})$$

$$J_{\xi} = J_{\max} \approx J_{G_y} + \alpha^{\circ} J_{G_{xy}}$$

$$J_{\eta} = J_{\min} \approx J_{G_x} - \alpha^{\circ} J_{G_{xy}}$$

式中  $\alpha^{\circ} = \operatorname{tg} 2\alpha / 2$

(2) 系数  $\bar{X}_i$  ( $\bar{X}_i = X_i / b$ )、 $A_i$  值  
 $n = 6$ ;