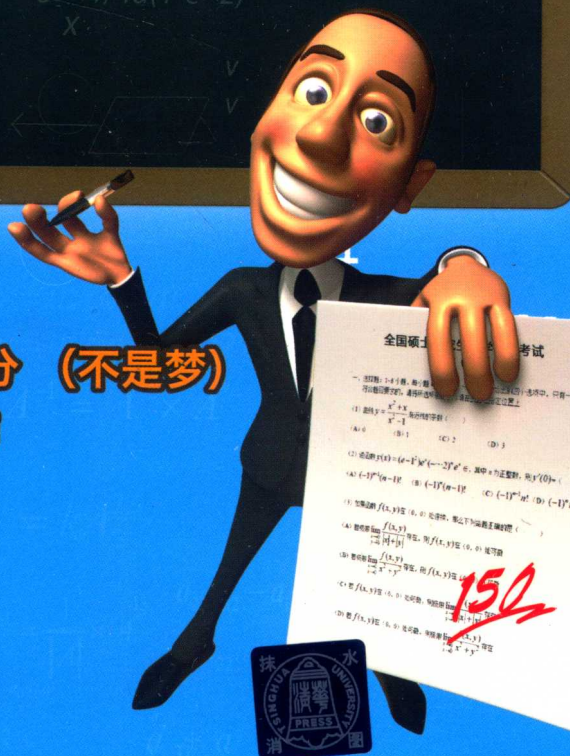


考研数学 三部曲

之

大话高等数学

潘鑫 著



初中数学基础 + 认真阅读本书 = 满分 (不是梦)
新锐考研数学传奇教练巅峰之作

清华大学出版社



逻辑特别清晰

语言特别通俗

举例特别丰富

分析特别深入

- 考研**为自己**，没人逼你，所以你需要足够的**自制力**。
- 考研不是及格就可以，分数越高越好，所以你需要有决心**拿满分**（尤其是数学）。
- 考研不需要了解一切，只要精通考点和套路。
- 考研复习没必要**按部就班**地啃教材，重要的是学得**开心**。
- 考研都能**满分**，当然**挂科**也就断无此可能了。
- ◎ **考研数学满分**没啥了不起，跟着老潘**痛快地**开始数学之旅吧！



ISBN 978-7-302-38675-9



9 787302 386759 >

定价：89.00元

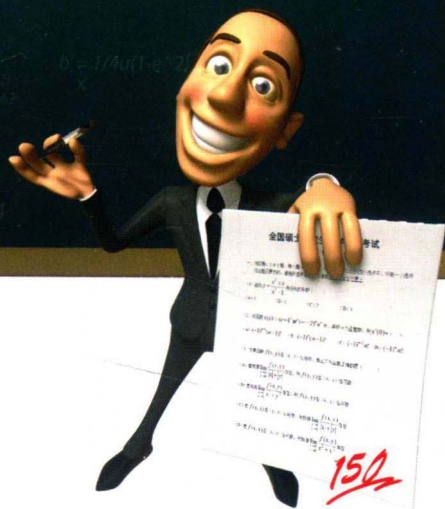
清华大学出版社数字出版网站

WQBook  书网

www.wqbook.com



潘鑫 著



清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书以“盖楼”为大的背景。读者每阅读完一章，就是盖完了大楼的一层。而每层中又分为“砖”和“房间”两部分，先运来“砖”再搭建“房间”。这种安排内容的方式使得全书充满了趣味性。本书的特色除了趣味性之外，还有三个“非常”。语言非常通俗易懂，逻辑非常清晰，例题非常丰富。本书的这四个特色使得本书区别于市场上的同类图书。

本书的主要内容包括：数列的极限的定义，函数的极限的定义，数列的极限的基本计算方法，函数的极限的基本计算方法，函数的连续性，等价无穷小，保号性及其推论，可导的定义，可导的等价定义，常用的导数公式，求曲线的渐近线，分段函数求导，求函数的高阶导数，求函数在某区间的最值，求两条曲线的交点个数，求一个方程的实根个数，证明恒等式，证明不等式，证明零点问题，不定积分的定义，不定积分的计算，定积分的计算，反常积分的计算，定积分的几何应用，微分方程的定义，求一阶微分方程的通解的方法，求二阶常系数齐次线性微分方程通解的方法，求二阶常系数非齐次线性微分方程通解的方法，二元函数的定义，求二元函数的极限的方法，二元函数的连续性，求二元函数的极值、条件极值、最值，二重积分的定义，二重积分的直角坐标系算法，二重积分的极坐标系算法，利用二重积分求形心，二重积分的对称性，二重积分的轮换对称性，常数项级数的定义，常数项级数的分类，求幂级数的收敛域的方法，求幂级数的和函数的方法等。

以下三类读者最适合阅读本书：正在准备研究生入学考试的读者（无论读者是什么样的基础）；正在准备学校期末考试的在校大学生（无论读者是什么样的基础）；工作后需要补学或温习高等数学的读者（无论读者是什么样的基础）。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。侵权举报电话：010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

考研数学三部曲之大话高等数学 / 潘鑫著. —北京：清华大学出版社，2015

ISBN 978-7-302-38675-9

I. ①考… II. ①潘… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 283771 号

责任编辑：栾大成

封面设计：杨玉芳

责任校对：胡伟民

责任印制：宋 林

出版发行：清华大学出版社

网 址：<http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编：100084

社总机：010-62770175 邮 购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者：清华大学印刷厂

装 订 者：三河市新茂装订有限公司

经 销：全国新华书店

开 本：188mm×260mm 印 张：49.25 插 页：1 字 数：1260千字

版 次：2015年3月第1版 印 次：2015年3月第1次印刷

印 数：1~4000

定 价：89.00元

产品编号：060583-01

目 录

第 0 章 超级导读 (必看)	1
0.1 考研数学高等数学部分其实就是一座大楼	2
0.2 我帮你盖楼	4
0.3 第 1 章到第 8 章的内容	4
0.4 你最后要这样才行	5
0.5 送给大家的话	6
第 1 章 第一层——极限与连续	7
1.1 第一车砖——极限长什么样	8
1.2 第二车砖——极限的计算方法	8
1.2.1 函数的极限的计算方法	8
1.2.2 数列的极限的计算方法	89
1.3 第三车砖——三个小技巧	119
1.3.1 第一个小技巧	119
1.3.2 第二个小技巧	121
1.3.3 第三个小技巧	125
1.4 第四车砖——极限的定义	127
1.4.1 数列的极限的定义	127
1.4.2 趋于无穷大时函数的极限的定义	131
1.4.3 趋于定点时函数的极限的定义	135
1.5 第五车砖——函数的连续性与间断点	138
1.5.1 函数的连续性	138
1.5.2 函数的间断点	148
1.6 第六车砖——无穷小、同阶无穷小、等阶无穷小、高阶无穷小、低阶无穷小、 k 阶无穷小	154
1.6.1 无穷小	154
1.6.2 同阶无穷小	155

1.6.3 等价无穷小	156	1.6.5 低阶无穷小	159
1.6.4 高阶无穷小	157	1.6.6 k 阶无穷小	159
1.7 房间 101——两个常用的结论	160		
1.8 房间 102——函数的极限存在性	162		
1.8.1 函数和差的极限存在性	163	1.8.2 函数乘积的极限存在性	164
1.9 房间 103——已知一极限求另外一极限	166		
1.10 房间 104——求以数列极限的形式给出来的函数 $f(x)$ 的表达式	176		
1.11 房间 105——函数极限的保号性	187		
1.11.1 趋于无穷型的函数极限的 保号性	187	1.11.3 趋于定点型的函数极限的 保号性	189
1.11.2 趋于无穷型的函数极限的 保号性的推论	188	1.11.4 趋于定点型的函数极限的 保号性的推论	191
1.12 房间 106——函数极限与数列极限的相互转化	193		
1.12.1 函数极限转化为数列极限	193	1.12.2 数列极限转化为函数极限	200
1.13 本章小结	203		
第 2 章 第二层——导数与微分	205		
2.1 第一车砖——可导的定义	206		
2.1.1 函数在某一点处可导的定义	206	2.1.3 函数在某区间可导的定义	232
2.1.2 函数在某一点处左/右可导的 定义	215		
2.2 第二车砖——常用的导数公式	235		
2.2.1 基本初等函数的导数公式	236	2.2.3 复合函数的导数公式	238
2.2.2 导数的四则运算法则	237	2.2.4 幂指数函数求导	240
2.3 第三车砖——可微的定义	241		

2.4	第四车砖——可微、可导、连续三者的关系	243
2.5	房间 201——很重要的四个知识点	247
2.5.1	第一个知识点	247
2.5.2	第二个知识点	247
2.5.3	第三个知识点	259
2.5.4	第四个知识点	264
2.6	房间 202——高阶导推低阶导	265
2.7	房间 203——求某函数的高阶导数的方法	266
2.8	房间 204——求曲线的渐近线	272
2.9	房间 205——分段函数求导	279
2.10	本章小结	287
第 3 章	第三层——微分中值定理及其应用	289
3.1	第一车砖——求函数在给定区间的单调性	290
3.2	第二车砖——求函数的单调区间	291
3.3	第三车砖——求函数的极值点与极值	293
3.4	第四车砖——求函数在给定区间的凹凸性	297
3.5	第五车砖——求函数的凹凸区间	299
3.6	第六车砖——求函数的拐点	301
3.7	第七车砖——与极值点和拐点有关的一个重要结论	307
3.8	房间 301——求函数在给定区间的最值	310
3.9	房间 302——求两个函数的交点个数或求一个方程的实根个数	319
3.10	房间 303——证明恒等式	324
3.11	房间 304——证明不等式	334
3.12	房间 305——证明零点问题	347

3.13 本章小结.....	369
第4章 第四层——一元函数积分学	371
4.1 第一车砖——原函数与不定积分.....	372
4.1.1 原函数.....	372
4.1.2 不定积分.....	372
4.2 第二车砖——不定积分长什么样.....	373
4.3 第三车砖——定积分和反常积分长什么样.....	374
4.4 房间 401——不定积分和定积分的计算方法.....	376
4.4.1 不定积分的计算方法.....	376
4.4.2 定积分的计算方法.....	432
4.5 房间 402——反常积分的计算方法.....	439
4.6 房间 403——定积分的应用.....	453
4.6.1 利用定积分求面积.....	453
4.6.2 利用定积分求旋转体的体积.....	463
4.7 房间 404——求被积函数中含绝对值的定积分与反常积分.....	486
4.8 房间 405——两个重要知识点.....	488
4.8.1 原函数的存在性.....	488
4.8.2 对称区间上奇偶函数的定积分 与反常积分.....	495
4.9 本章小结.....	501
第5章 第五层——微分方程	503
5.1 第一车砖——微分方程长什么样.....	504
5.2 第二车砖——微分方程的阶.....	505
5.3 第三车砖——微分方程的解.....	506
5.4 第四车砖——微分方程的通解.....	508
5.5 第五车砖——微分方程的初始条件与微分方程的特解.....	509

5.6	房间 501——求一阶微分方程的通解的方法	510
5.6.1	可分离变量法	510
5.6.2	换元法	513
5.6.3	公式法	518
5.6.4	伯努利法	523
5.6.5	变量代换法	527
5.7	房间 502——求二阶常系数线性微分方程的通解的方法	528
5.7.1	求二阶常系数齐次线性微分方程的通解的方法	529
5.7.2	求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解的方法	531
5.8	房间 503——求二阶变系数微分方程的通解的方法	536
5.8.1	求不含 y 的二阶变系数微分方程的通解的方法	536
5.8.2	求不含 x 的二阶变系数微分方程的通解的方法	537
5.9	房间 504——线性微分方程解的性质与结构	538
5.10	本章小结	541
第 6 章	第六层——多元函数微分学	543
6.1	第一车砖——什么叫多元函数	544
6.2	第二车砖——二元函数的极限计算方法	544
6.3	第三车砖——二元函数的连续性	554
6.4	第四车砖——可偏导的定义	558
6.4.1	函数在某一点处可偏导的定义	558
6.4.2	函数在某区间可偏导的定义	565
6.5	房间 601——利用公式求 $\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$	567
6.5.1	当“ Δ ”是单一的字母时 $\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$ 的求法	567
6.5.2	当“ Δ ”不是单一的字母时 $\frac{\partial \Delta}{\partial \square}$ 的求法	590
6.6	房间 602——分段函数求偏导	599

6.7 房间 603——抽象函数求偏导	610
6.8 房间 604——二元函数的极值、最值、条件极值	621
6.8.1 二元函数的极值	621
6.8.2 二元函数的最值	625
6.8.3 条件极值	627
6.9 房间 605——求空间曲线的切线与法平面以及求曲面的法线与切平面	631
6.9.1 求空间曲线的切线与法平面	631
6.9.2 求曲面的法线与切平面	635
6.10 本章小结	639
第 7 章 第七层——二重积分	641
7.1 第一车砖——二重积分长什么样	642
7.2 第二车砖——当被积函数为 1 时二重积分的意义	643
7.3 第三车砖——二重积分的计算方法	646
7.4 第四车砖——二重积分三条性质	682
7.5 房间 701——二重积分是一个数	689
7.6 房间 702——求解被积函数中含绝对值的二重积分	690
7.7 房间 703——二重积分的对称性	704
7.8 房间 704——二重积分的轮换对称性	711
7.9 房间 705——“先 x 后 y 型”二重积分与“先 y 后 x 型”二重积分的相互转化	713
7.10 房间 706——计算二重积分时的小技巧	717
7.11 房间 707——均匀薄片的形心	719
7.12 本章小结	721

第 8 章 第八层——无穷级数.....	723
8.1 第一车砖——什么叫常数项级数.....	724
8.2 第二车砖——常数项级数的分类.....	725
8.3 第三车砖——常数项级数的收敛与发散.....	731
8.4 第四车砖——常数项级数的六个重要性质.....	731
8.5 第五车砖——什么叫幂级数.....	736
8.6 第六车砖——幂级数的收敛域与和函数.....	736
8.6.1 幂级数的收敛域.....	736
8.6.2 幂级数的和函数.....	737
8.7 房间 801——正项级数的敛散性判别.....	739
8.8 房间 802——交错级数的敛散性判别.....	751
8.9 房间 803——一般级数的敛散性判别.....	756
8.10 房间 804——求幂级数的收敛域.....	758
8.11 房间 805——求幂级数的和函数.....	768
8.12 本章小结.....	773

第0章 超级导读（必看）

本书共8章，此章虽不讲具体的知识点，但其地位是相当重要的。因此，强烈建议大家阅读本章的内容。

0.1 考研数学高等数学部分其实就是一座大楼



图中是一座大楼，这座大楼共八层。第1层有六个房间，第2层有五个房间，第3层有五个房间，第4层有五个房间，第5层有四个房间，第6层有五个房间，第7层有七个房间，第8层有五个房间。你是一名工人，房地产开发商要求你在一片空地上盖这么一座大楼，并且你和开发商签了合同，合同中规定了停工日期。只要到了停工日期，无论你盖完没盖完，你都不能再盖了，必须接受开发商的检查。开发商比较懒，他并不真正来工地一个一个门牌号的依次检查，而是把你叫到办公室，然后问你关于其中几个房间的构造是什么样的。比如，你到了他办公室后，他可能会问三个问题（当然有可能问更多的问题）。

- 你介绍一下房间 202 和房间 103 的构造；
- 你介绍一下房间 304 的构造；
- 你介绍一下房间 501 和房间 602 的构造。

这三个问题如果你都答得让他满意，他会认为你已经把大楼完全盖好了，于是他会给你三十万元作为奖励；如果你其中一个问题没有答出来，只答出了两个问题，他会给你二十万元；如果你只答出了一个问題，他就只给你十万元；如果你一个问题都没答出，他会非常生气，认为你根本没盖，一分钱也不给你。

以上这段话我想说什么呢，请继续往后看。

大楼：考研数学高等数学这个学科；

大楼的每层：指考研数学高等数学这个学科的每一章；

每层的房间数量：每一章的考点数量；

房地产开发商：考研数学高等数学部分的命题人；

工人：你自己；

停工日期：考试的日期；

开发商的办公室：考研考场；

开发商问你的问题：考研数学高等数学部分的题目；

开发商给你的钱：考研数学高等数学部分的得分。

有了这些对应关系后，我把前面的一大段话换一种方式叙述一遍。

考研数学高等数学部分的知识可以分为 8 章。第 1 章有六个考点，第 2 章有五个考点，第 3 章有五个考点，第 4 章有五个考点，第 5 章有四个考点，第 6 章有五个考点，第 7 章有七个考点，第 8 章有五个考点。考研命题人规定了考研的日期。日期一到，不管你有没有复习完，都要去考场参加考试。在考试中，你也许会在卷子上遇到三道（当然，有可能更多）高等数学的题，比如：

第一题：考到的是第 2 章的考点 2 和第一章的考点 3；

第二题：考到的是第 3 章的考点 4；

第三章：考到是第 5 章的考点 1 和第六章的考点 2。

这三个问题你如果都答对了，你就得满分。否则你将会被扣掉相应的分。

0.2 我帮你盖楼

亲爱的同学，相信你看完上一小节后，已经对你即将要盖的这座考研数学高等数学大楼有了最初步的认识。而我，是一个小有名气的建筑师，我将和你一起盖好这座八层的大楼。无论如何，请相信我一句话：不管你的建筑功底如何，哪怕你是学音乐美术的，对建筑一窍不通。只要你愿意接受我的帮助，我可以保证你把这座八层的大楼盖得金碧辉煌，我更可以保证你在面对开发商的询问时，对答如流。

也许我上面的话太啰唆。好，那我说直白点：任何人，记住是任何人，只要具有高中的数学基础，只要你认真看此书，那么，考研数学高等数学部分得满分是十分容易的。

0.3 第 1 章到第 8 章的内容

下面我说一下本书第 1 章到第 8 章的内容：

- 第 1 章：第一层——极限与连续（其中有六个房间）；
- 第 2 章：第二层——导数与微分（其中有五个房间）；
- 第 3 章：第三层——微分中值定理及其应用（其中有五个房间）；
- 第 4 章：第四层——一元函数积分学（其中有五个房间）；
- 第 5 章：第五层——微分方程（其中有四个房间）；
- 第 6 章：第六层——多元函数微分学（其中有五个房间）；
- 第 7 章：第七层——二重积分（其中有七个房间）；
- 第 8 章：第八层——无穷级数（其中有五个房间）。

以上只是第 1 章到第 8 章的标题，下面我要告诉大家的是每一章展开后的样子。

我就以第 1 章为例，说一下展开后的第 1 章是什么样子的，其他各章的表达形式是一样的。

第 1 章 第一层——极限与连续

第一车砖：.....

第二车砖：.....

房间 101：.....

房间 102：.....

房间 103：.....

房间 104：.....

房间 105：.....

房间 106：.....

看到这里，相信大家一定会觉得很奇怪，因为根据我之前说的，你们觉得第1章的样子应该如下图所示。

第1章 第一层——极限与连续	
房间 101:
房间 102:
房间 103:
房间 104:
房间 105:
房间 106:

可实际上，为什么除了房间以外，又多了“砖”呢？听我解释：没有砖能盖楼吗？不能吧，因为巧妇难为无米之炊，砖是盖楼的基础。那么这个“砖”类比到高等数学大楼中又相当于什么呢？我以高考数学举例。

高考数学考试大纲中一定会写：要考排列组合、要考等差数列、要考立体几何等，却绝对不会写：要考加减乘除四则运算、要考正负数、要考绝对值，等等。为什么不写考这些？因为这是基础，是“砖”，会这些东西是必需的，是最基本的要求，所以高考考试大纲里就不必提了。尽管没提，但是你能不会吗？显然不能不会。在高等数学中也是一样，虽然考研卷子上只考“房间”，但是如果没有“砖”，你怎么可能搭建一个个的房间呢？明白了吧。

所以接下来每一章的内容都是由“砖”和“房间”两部分组成的。

0.4 你最后要这样才行

想要考研数学高等数学部分全对，这是每位考生的心愿。要想达成这个心愿，你需要做到以下两点。

- (1) 书中的每一个知识点都要看。我想强调的是：本书不存在任何看不懂的可能性，因为我采用的表达方式非常通俗。因此，书中的每个知识点你要都看一遍，别落下任何一个知识点。
- (2) 在你看完每一章后，你需要把每一章的“房间”背下来（“砖”不用刻意去背，只要会了就行了，因为“砖”是最基本的。正如同参加高考的考生要背高考考试大纲中的考点，而不用去背最基本的加减乘除四则运算法则）。不是看懂就行，一定要背下来，这一点至关重要。我举个例子，比如当你看完第一章之后你需要对自己说：这章共有六个房间，每个房间的内容是什么什么。如果忘了，就查书，直到背下来为止。相信我，这一招可以收到奇效。当然，如果能够默写