GAILULUNYUSHULITONGJIJIAOCHENG

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程

主编 戴立辉 副主编 林大华 林苗

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程

主　编　戴立辉
副主编　林大华　林　苗

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书按照教育部工科及经济管理类“本科数学基础课程教学基本要求”，结合当前大多数本专科院校的学生基础和教学特点编写而成. 全书以通俗易懂的语言，全面而系统地讲解概率论与数理统计的基本知识，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验 8 章内容. 每章分若干节，每节配有习题，书末附有习题的参考答案.

本书理论系统，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为普通高等院校工科类、理科类（非数学专业）、经济管理类有关专业的概率论与数理统计课程的教材使用，也可供部分专科院校选用为同类课程教材，还可作为相关专业人员和广大教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程 / 戴立辉主编. -- 上海：同济大学出版社，2015. 12

ISBN 978-7-5608-5712-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①戴… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 286210 号

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程

主编 戴立辉 **副主编** 林大华 林 苗

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 710 mm×960 mm 1/16

印 张 14.25

字 数 285 000

版 次 2015 年 12 月第 1 版 2015 年 12 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5712-1

定 价 29.00 元

前　言

“概率论与数理统计”是普通高等院校各专业普遍开设的一门重要的公共基础课程，是研究随机现象的一门数学课程，具有较强的应用性，在培养具有良好数学素质及应用型人才方面起着特别重要的作用. 为了更好地适应当前我国高等教育跨越式发展的需要，满足我国高校从“精英型教育”向“大众化教育”的重大转变过程，满足大多数高等院校出现的新的教学形势、学生基础和教学特点，我们编写了这本教材，书名定为《概率论与数理统计教程》.

在编写本书的过程中，我们严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”最新修订的工科及经济管理类“本科数学基础课程（概率论与数理统计部分）教学基本要求”，同时参考了近几年来国内出版的有关教材. 编写中，我们适当兼顾全国研究生入学考试数学考试大纲的要求（概率论与数理统计部分），并深入结合编者的一线教学经验.

全书以通俗易懂的语言，深入浅出地讲解概率论与数理统计的基本知识，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验8章内容. 每章分若干节，每节配有习题，书末附有习题的参考答案.

本书各章的主要内容如下：

第1章随机事件及其概率，讲解随机事件及其运算、随机事件的概率及其性质、条件概率与全概率公式及贝叶斯公式、随机事件的独立性与伯努利概型.

第2章随机变量及其分布，包括随机变量及其分布函数、离散型随机变量及其分布律、连续型随机变量及其概率密度、随机变量函数的分布.

第3章多维随机变量及其分布，讲解二维随机变量及其分布、二维离散型随机变量及其分布、二维连续型随机变量及其分布、随机变量的独立性、二维随机变量函数的分布.

第4章随机变量的数字特征，涉及随机变量的数学期望、随机变量的方差、随

机变量的协方差与相关系数及矩.

第 5 章大数定律与中心极限定理,介绍切比雪夫不等式、切比雪夫大数定律、伯努利大数定律和辛钦大数定律,介绍独立同分布中心极限定理和棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理.

第 6 章数理统计的基本概念,包括总体与样本、直方图、统计量与样本矩,以及 χ^2 分布、t 分布和 F 分布三个重要分布与正态总体的抽样分布定理.

第 7 章参数估计,包括参数的点估计、估计量的评选标准和参数的区间估计.

第 8 章假设检验,介绍假设检验的基本思想与步骤、单个正态总体均值与方差的检验、两个正态总体均值与方差的检验、分布的拟和检验.

本书理论系统,举例丰富,讲解透彻,难度适宜,适合作为普通高等院校工科类、理科类(非数学专业)、经济管理类有关专业的概率论与数理统计课程的教材使用,也可供部分专科院校选用为同类课程教材,还可作为相关专业人员和广大教师的参考用书.

本书由戴立辉主编,林大华、林苗副主编.戴立辉编写第 1 章、第 2 章、第 3 章和第 4 章,林大华编写第 5 章和第 6 章,林苗编写第 7 章和第 8 章.全书经过编者的充分讨论,最后由戴立辉修改、统稿并定稿.

在本书的编写过程中,得到了作者单位闽江学院以及同济大学出版社的大力支持和热情帮助,在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平和学识有限,书中不当和疏漏之处在所难免,敬请各位同行和读者不吝赐教,并批评指正.

戴立辉

2015 年 10 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象：一类是**确定性现象**，另一类是**随机现象**. 所谓确定性现象，是指在一定条件下必然发生的现象. 如太阳从东方升起；树上苹果成熟后，在地心引力作用下一定下落；在标准大气压下，水被加热到100℃时一定沸腾等. 随机现象则是在个别试验中事先无法准确预知其结果，但在大量重复试验中其结果呈现出规律性的现象，如掷一枚硬币，可能正面朝上，也可能反面朝上；从一批产品中任取一件产品，可能是次品，也可能不是次品；某网站在某时段的点击量；等等.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，其理论与方法应用非常广泛，几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产、国民经济以及我们的日常生活.

本章主要介绍随机事件及其概率，包括事件概率的概念、基本性质、计算公式和事件的独立性等，它们是概率论中最基本、最重要的内容之一.

§1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验与样本空间

我们遇到过各种试验，包括各种各样的科学实验. 在这里，我们把试验作为一个含义广泛的术语，对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 为了研究随机现象的统计规律性，我们需要进行各种试验.

在概率论与数理统计中，一个试验如果具有以下三个特点：

(1) 可重复性. 在相同条件下可以重复进行.

(2) 可观察性. 每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果.

(3) 不确定性. 进行一次试验之前，不能预知会出现哪一个结果.

则称这样的试验是**随机试验**，也简称为**试验**，用 E 来表示.

我们是通过随机试验来研究随机现象的.

我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间,记作 Ω. 样本空间 Ω 的元素,即 E 的每个结果,称为样本点,记作 ω_1, ω_2, …. 显然 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$.

例 1.1 写出下列六个随机试验的样本空间.

E_1: 抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况;

E_2: 将一枚硬币抛掷两次,观察正面 H、反面 T 出现的情况;

E_3: 将一枚硬币抛掷两次,观察正面 H 出现的次数;

E_4: 抛一颗均匀骰子,观察出现的点数;

E_5: 记录某城市 114 电话号码查询台一昼夜接到的呼叫次数;

E_6: 在一批节能灯泡中任意抽取 1 只,测试它的寿命.

解 这六个试验 E_1, E_2, …, E_6 的样本空间分别是

$\Omega_1 = \{H, T\}$;

$\Omega_2 = \{HH, HT, TH, TT\}$;

$\Omega_3 = \{0, 1, 2\}$;

$\Omega_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

$\Omega_5 = \{0, 1, 2, \cdots\}$;

$\Omega_6 = \{t \mid t \geqslant 0\}$.

需要注意的是,样本空间的元素是由试验的目的所确定的. 例如,在例 1.1 中, E_2 和 E_3 中同是将一枚硬币抛掷 2 次,由于试验的目的不一样,其样本空间也不一样.

1.1.2 随机事件、事件的关系与运算

人们在进行随机试验时,常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如,若规定某种节能灯泡的寿命小于 500 h 为次品,则在例 1.1 中的 E_6 中关心是否有 $t \geqslant 500$, 满足这个条件的样本点组成 Ω_6 的一个子集 $A = \{t \mid t \geqslant 500\}$. 我们称 A 为试验 E_6 的一个随机事件. 显然,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,有 $t \geqslant 500$.

一般地,我们称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**,简称事件. 在每次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

我们常用大写字母 A, B, C 等表示随机事件.

特别,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**. 例如,例 1.1 中的试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$;试验 E_4 有六个基本事件 $\{1\}$, $\{2\}$, …, $\{6\}$.

样本空间 Ω 包含所有的样本点,它是 Ω 自身的子集,在每次试验中它总

是发生的，称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**. 必然事件与不可能事件本质上不具有"不确定性"，但是为了讨论问题方便，将其看作是特殊的随机事件.

既然事件是样本空间的一个集合，所以事件之间的关系与运算可参照集合之间的关系和运算来处理.

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 A, B, $A_k (k = 1, 2, \cdots)$ 是 Ω 的子集.

1. 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含 A，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

例如，例 1.1 中的试验 E_4，$A = \{$出现点数为 6$\}$这一事件发生就导致事件 $B = \{$出现点数为偶数$\}$的发生. 因为出现点数为 6 点意味着偶数点出现了，所以 $A \subset B$.

"A 发生必然导致 B 发生"意味着"属于 A 的样本点 ω 必然属于 B"，即 A 中的样本点全在 B 中，用维恩(Venn)图表示，如图 1-1 所示.

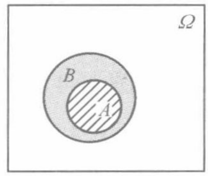

图 1-1　$A \subset B$

显然，对任意事件 A, B, C 有

①$A \subset A$；②$\varnothing \subset A \subset \Omega$；③若 $A \subset B$, $B \subset C$，则 $A \subset C$.

2. 事件的相等

若事件 A 包含事件 B，且事件 B 包含事件 A，即 $A \subset B$ 和 $B \subset A$ 同时成立，则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A = B$.

3. 事件的和

若事件 A 与 B 中至少有一个事件发生，即事件 A 发生或事件 B 发生，则这个事件称为事件 A 与 B 的**和**(或**并**)**事件**，记作 $A \cup B$. 如图 1-2 所示.

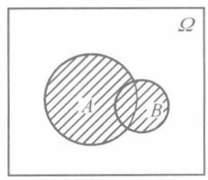

图 1-2　$A \cup B$

用集合表示，$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

显然有：① $A \cup A = A$；② $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$；③ 若 $A \subset B$，则 $A \cup B = B$. 特别地，$A \cup \Omega = \Omega$, $A \cup \varnothing = A$.

类似地，n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生"；可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 表示"$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生".

4. 事件的积

若事件 A 与 B 同时发生，即事件 A 发生且事件 B 发生，则这个事件称为事件

A 与 B 的**积(或交)事件**,记作 AB (或 $A \cap B$),如图 1-3 所示.

用集合表示, $AB = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

显然有,① $AB \subset A$, $AB \subset B$; ②若 $A \subset B$,则 $AB = A$, 特别地, $A\Omega = A$, $\varnothing A = \varnothing$.

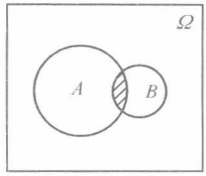

图 1-3　AB

类似地, n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 表示“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”;可列个事件的积 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 表示“$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生”.

5. 互逆事件

若事件 A 与 B 中至少有一个事件要发生,而且 A 与 B 不能同时发生,则称事件 B 为事件 A 的**逆事件**或**对立事件**,记作 $\overline{A}$. 如图 1-4 中的阴影部分.

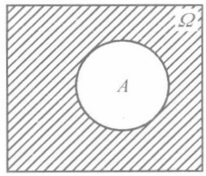

图 1-4　$\overline{A}$

显然有, $A\overline{A} = \varnothing$ 且 $A \cup \overline{A} = \Omega$.

6. 事件的差

若事件 A 发生而事件 B 不发生,则这个事件称为事件 A 与 B 的**差事件**,记作 $A - B$. 如图 1-5 所示.

用集合表示, $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$.

显然有, $A - B = A\overline{B}$, $\overline{A} = \Omega - A$.

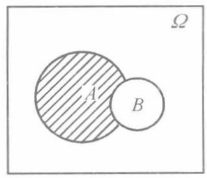

图 1-5　$A-B$

7. 互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不可能同时发生,即 $AB = \varnothing$, 则称事件 A 与 B **互不相容**或**互斥**. 如图 1-6 所示.

显然有:①同一个试验中各个基本事件是两两互不相容的; ② $\varnothing$ 与任意事件互不相容.

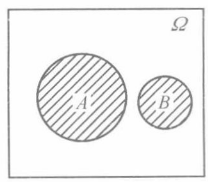

图 1-6　$AB=\varnothing$

与集合的运算一样,事件的运算有如下的运算律.

(1) 交换律. $A \cup B = B \cup A$, $AB = BA$.

(2) 结合律. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,

$A(BC) = (AB)C$.

(3) 分配律. $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$,

$A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$.

(4) 对偶律(德·摩根律).

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B},\ \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B};\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

例 1.2　在例 1.1 中,对 E_2,事件“第一次出现 H”可表示为, $A = \{HH,$

$HT\}$；事件"两次出现同一面"可表示为，$B=\{HH, TT\}$. 试求 $A\cup B$, AB, $A-B$, $\overline{A\cup B}$.

解　由例 1.1，样本空间 $\Omega=\{HH, HT, TH, TT\}$，于是

$$A\cup B=\{HH, HT, TT\},\quad AB=\{HH\},$$
$$A-B=\{HT\},\quad \overline{A\cup B}=\Omega-(A\cup B)=\{TH\}.$$

例 1.3　某人连续三次购买体育彩票，每次一张，令 A, B, C 分别表示其第一、二、三次所买的彩票中奖的事件. 试用 A, B, C 及其运算表示下列事件：(1)第三次未中奖；(2)只有第三次中了奖；(3)恰有一次中奖；(4)至少有一次中奖；(5)不止一次中奖；(6)至多中奖两次.

解　(1) $\overline{C}$；(2) $\overline{A}\,\overline{B}C$；(3) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；(4) $A\cup B\cup C$；(5) $AB\cup AC\cup BC$；(6) $\overline{ABC}$ 或 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

习题 1.1

1. 写出下列试验的样本空间.

(1) 抛一枚硬币 3 次，观察所得结果；

(2) 口袋中有 3 个红球和 2 个白球，现从中任取一个球，观察其颜色；

(3) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(以百分制记分)；

(4) 某十字路口每小时通过的机动车数量；

(5) 生产产品直到得到 10 件正品，记录生产产品的总件数.

2. 用事件 A, B, C 的运算关系式表示下列各事件.

(1) A, B, C 都发生；　(2) A, B, C 都不发生；

(3) A, B, C 不都发生；　(4) A 发生，B, C 不发生；

(5) A, B, C 中至少一个发生；　(6) A, B, C 中恰有一个发生；

(7) A, B, C 中至少两个发生；　(8) A, B, C 中至多只有一个发生.

3. 将一枚骰子连掷两次，令 A 表示"两次掷出的点数相同"，B 表示"点数之和为 10"，C 表示"最小点数是 4"，求下列事件所包含的样本点.

(1) $A\cup B$；(2) ABC；(3) $A-C$；(4) $C-A$；(5) $B\overline{C}$.

4. 设一位工人生产了 4 个零件，用事件 A_i 表示这位工人生产的第 i 个零件是不合格品 $(i=1, 2, 3, 4)$，试用诸 A_i 的运算表示下列各事件.

(1) 没有一个是不合格品；(2) 全部都是不合格品；(3) 至少有一个是不合格品；(4) 恰好有一个是不合格品.

5. 试叙述下列事件的对立事件.

(1) $A=$"投掷两枚硬币，都出现正面"；(2) $B=$"射手射击 3 次，都命中目标"；(3) $C=$"加工 4 个产品，至少有 1 个正品"；(4) $D=$"甲种产品畅销，乙种产品滞销".

6. 举例说明下列说法不正确.

(1) 若事件 A, B 互不相容,则 A, B 互为对立事件;

(2) 若三事件 A, B, C 互不相容,则 A, B, C 两两互不相容.

7. 试问下列命题是否成立?

(1) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$; (2)若 $AB=\varnothing$ 且 $C\subset A$, 则 $BC=\varnothing$;

(3) $(A\cup B)-B=A$; (4) $(A-B)\cup B=A$.

§1.2 随机事件的概率及其性质

随机事件在一次试验中是否发生虽然不能确定,但让人感兴趣的是随机事件在一次试验中发生的可能性有多大? 概率就是用来描述随机事件发生的可能性大小的. 本节首先引入频率的概念,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

在本节,我们首先介绍概率的统计定义,其次探讨两种特殊的概率模型——古典概型和几何概型,然后在此基础上介绍概率的公理化定义,并研究概率的基本性质.

1.2.1 概率的统计定义

定义 1.1 在相同的条件下,进行了 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的频数,比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$. 即有 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

根据定义 1.1,容易得出频率的下列性质.

(1) 非负性:对任意事件 A, 有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 规范性:对必然事件 Ω, 有 $f_n(\Omega)=1$;

(3) 可加性:若 A_1, A_2, $\cdots$, A_k 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} f_n(A_i).$$

由于事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比,其大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率大,事件 A 发生频繁,这意味着 A 在一次试验中发生的可能性就大. 反之亦然. 因而,直观的想法是用事件 A 的频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 但是否可行呢? 我们先看下面的例子.

例 1.4　考虑著名的抛掷硬币的试验，这种试验历史上有人做过，表 1-1 是历史上抛掷硬币试验的记录. 设 n 表示抛硬币的次数，n_H 表示出现正面次数，$f_n(H)$ 表示出现正面的频率.

表 1-1　　　**抛掷硬币试验的记录**

试验者	投掷次数 n	出现正面次数 n_H	频率 $f_n(H)$
德・摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊(Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

从表 1-1 中数据可以看出，抛硬币次数 n 较小时，频率 $f_n(H)$ 在 0 与 1 之间随机波动，其幅度较大，但随着 n 增大，频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性. 即当 n 逐渐增大时，$f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动，而逐渐稳定于 0.5.

例 1.4 说明，虽然随机现象在少数几次试验或观察中其结果没有什么规律性，但通过长期的观察或大量的重复试验可以看出，试验的结果呈现出某种规律性，而频率的稳定性正是这种规律性的表现.

事实上，对一般情形下的事件的频率稳定性已不断地为人类的实践所证实，并且在理论上可以证明，在一定条件下，频率稳定在某常数附近对任意的随机事件都成立. 这样对每一个事件都客观地存在一个数与事件对应，这个数就称为概率，它表征事件在一次试验中发生的可能性大小.

定义 1.2　在大量重复试验中，若事件 A 发生的频率稳定在确定的某一个常数 p 附近摆动，且随着试验次数的增加，这种摆动的幅度是很微小的，则称确定常数 p 为事件 A 发生的**概率**，记作 $P(A)$，即有 $P(A)=p$.

定义 1.2 称为随机事件概率的统计定义，它有相当直观的试验背景，易于接受. 根据这一定义，在实际应用时，往往可用试验次数足够大时的频率来估计概率的大小，且随着试验次数的增加，估计的精度会越来越高.

1.2.2　古典概型

在例 1.1 中的试验 E_1 和 E_4，它们具有两个共同的特点：

(1) 有限性. 试验的样本空间只包含有限个元素.

(2) 等可能性. 试验中每个基本事件发生的可能性相同.

具有以上两个特点的试验是大量存在的. 这种试验称为**古典型试验**.

定义 1.3　设随机试验 E 是古典型试验，其样本空间为 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$，事件 A 包含 m 个基本事件，则事件 A 发生的概率