

# 飞行动力学

—飞机飞行性能计算—

金长江 范立钦 周士林 编



国防工业出版社

# 第一章 飞机的质心运动方程

## § 1-1 引言

飞机的运动方程是分析、计算和模拟飞机运动的基本数学模型，它描述了作用在飞机上的外力和力矩与飞机运动参数之间的关系。

若把飞机视为刚体，根据理论力学可知，飞机的一般运动是由质心运动和绕质心的转动组成的，共有六个运动自由度，可用六个动力学微分方程来描述。其中三个是描述质心运动的（力方程），另三个是描述绕质心转动运动的（力矩方程）。为了改变飞机的运动状态，须改变作用于飞机上的合外力（主矢）和合外力矩（主矩）的大小和方向。

我们先看一下飞机飞行方向改变的过程。为了改变飞机的运动方向和运动特性，须在飞机上施加附加的外力。对于在大气中飞行的飞机来讲，为了获得这样的附加外力，通常要改变飞机相对气流的方向，即迎角和侧滑角，这就要偏转舵面使飞机绕质心转动。飞机绕质心转动要经历一个时间过程：舵面偏转后，在舵面上产生了一个附加力，该力引起绕飞机质心的力矩。经过某一短暂时间后，该力矩产生绕飞机质心的转动角速度。又经过一短暂时间，飞机转动到某个角位置，如转至迎角 $\alpha$ 。转动的最后结果是改变了作用在飞机上合外力的方向和大小，从而改变了飞机的运动方向。我们看到，作用在飞机上的力的平衡被破坏，是由两个原因造成的：其一是由于舵面偏转在舵面上产生了附加力；其二是由于舵面偏转引起迎角或侧滑角改变而使合外力发生变化，其中以后者起较大的作用。

由此可见，为了描述飞行器的运动，应该同时考虑作用在飞

机上的外力和力矩以及运动的变化过程。但在研究飞机飞行性能时，可把飞机视为一个可操纵的质点，只要建立描述质心运动的力方程，就可以确定飞机的基本飞行性能及飞行轨迹。这种表征飞机质心运动的飞行性能，实质上是属于质点动力学范畴。

建立飞机的运动方程时，为了描述飞机的空间位置、速度、加速度和力等各向量，须采用各种坐标系。如果作用在飞机上的外力在某一坐标系中具有非常简单的描述形式，就可把这些外力分解在该坐标系中。因此，根据所研究问题的性质，选择适当的坐标系，使运动方程具有最简单的形式，是有重要意义的。

当按所选定的坐标系建立运动方程时，须把各有关向量转换到所选定的坐标系上，这就必须知道这些坐标系各轴的相对位置。原始坐标系和新坐标系之间的相对位置，可以用一个确定的正交矩阵（称为变换矩阵）给出。变换矩阵的元素是两个坐标系单位向量之间的方向余弦。为了求得向量在新坐标系中的坐标，只要用原始列向量乘变换矩阵即可。这样求得的列向量即属于新的坐标系。

如果新坐标系可以通过原始坐标系的平移和相对于原始坐标系的几次顺序旋转而达到，那么，变换矩阵可以写成若干个初等旋转矩阵的乘积形式。应用变换矩阵建立飞机的运动方程，是飞行动力学经常应用的方法。

在本章中我们将一般地讨论坐标变换矩阵及其基本性质，再介绍大气飞行动力学中常用坐标系的定义及其变换矩阵，然后利用向量分析方法建立飞机在活动坐标系中的质心运动方程，并给出在各种特定条件下运动方程的简化形式。

为书写方便，矩阵用正黑体大写字母表示，例如变换矩阵  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ；除特殊情况外，向量一般用黑体小写字母表示，例如  $\mathbf{v} = [v_j]$ 。

## § 1-2 应用基元变换矩阵来构成坐标变换矩阵

### 1.2.1 坐标变换矩阵的构成

空间单位向量相对方向相同且坐标原点重合的两个直角坐标系（即两个坐标系都是右手坐标系，或都是左手坐标系），可通过旋转而重合在一起。我们规定采用右手坐标系，即从旋转角速度向量的矢端观察，逆时针方向作为正的旋转方向。

首先研究最简单的平面坐标系的变换。若平面上有两个坐标系  $Ox_p y_p$  和  $Ox_q y_q$ ，当原始坐标系  $Ox_p y_p$  逆时针转过  $\alpha$  角后，与新坐标系  $Ox_q y_q$  重合（图 1-1），则某向量  $r$  在原始坐标系  $Ox_p y_p$  和新坐标系  $Ox_q y_q$  中的投影分量之间的关系为：

$$\begin{cases} x_q = x_p \cos \alpha + y_p \sin \alpha \\ y_q = -x_p \sin \alpha + y_p \cos \alpha \end{cases} \quad (1-1)$$

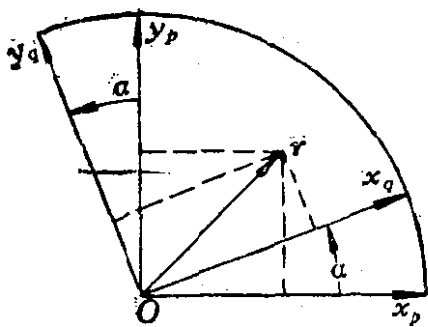


图1-1 平面坐标系的变换

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

若令

$$\mathbf{B}_p^q = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

则

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = \mathbf{B}_p^q \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \quad (1-4)$$

$\mathbf{B}_p^q$  称为 (从坐标  $p$  到坐标  $q$  的) 坐标变换矩阵。它表示新坐标系  $Ox_qy_q$  的单位向量  $i_q, j_q$ , 可以在原坐标系  $Ox_p y_p$  中表示为

$$\begin{cases} i_q = [\cos \alpha, \sin \alpha] \\ j_q = [-\sin \alpha, \cos \alpha] \end{cases} \quad (1-5)$$

。原点重合的两个空间三维坐标系也可以通过旋转而重合在一起。例如, 原始坐标系  $Ox_p y_p z_p$  绕  $Oz_p$  轴旋转  $\alpha$  角而到达新坐标

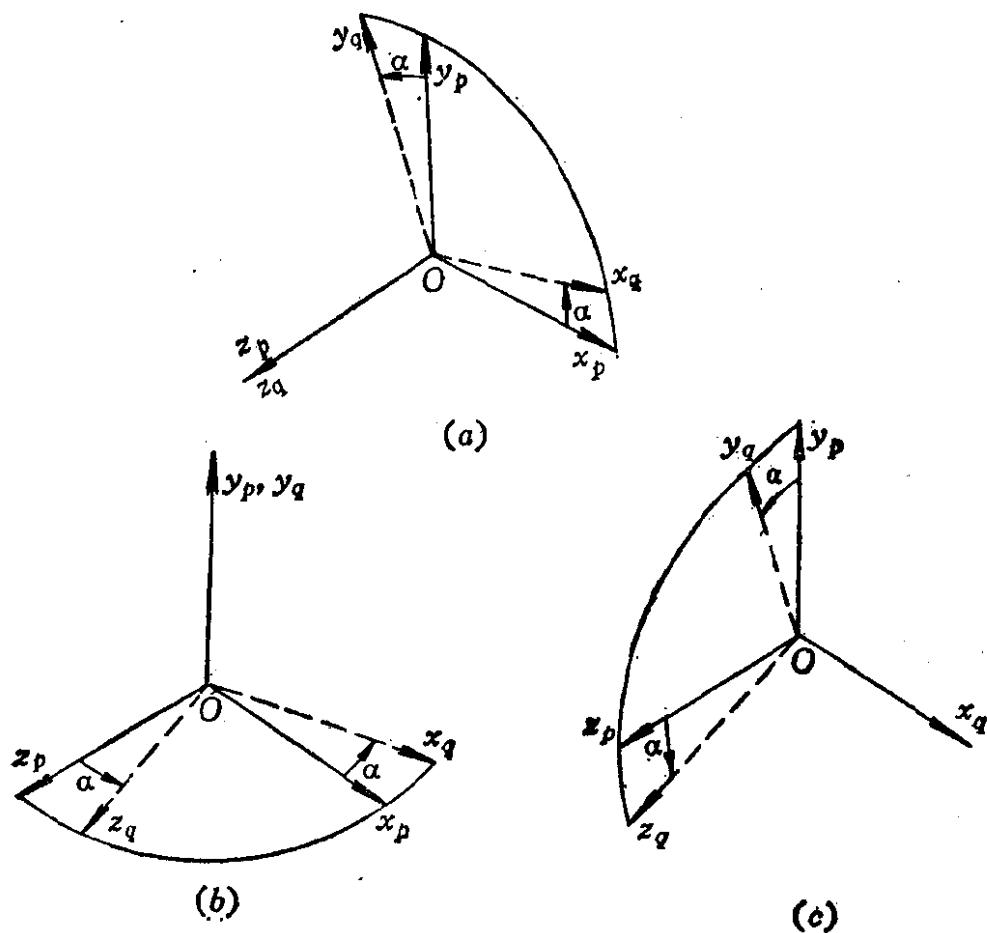


图1-2 空间坐标系的基元变换

系  $Ox_q y_q z_q$  (图 1-2(a)), 则应有

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

或

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \mathbf{B}_z(\alpha) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

式中

$$\mathbf{B}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

矩阵  $\mathbf{B}_z(\alpha)$  表示坐标系  $Ox_p y_p z_p$  绕  $z_p$  (用下标  $z$  表示) 旋转  $\alpha$  角 (用括号  $\alpha$  表示) 而与  $Ox_q y_q z_q$  重合时的变换矩阵。

同理, 当  $Ox_p y_p z_p$  绕  $y_p$  或  $x_p$  轴旋转  $\alpha$  角而到达  $Ox_q y_q z_q$  时 (图 1-2(b)、(c)), 坐标变换矩阵分别为

$$\mathbf{B}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

$$\mathbf{B}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

矩阵  $\mathbf{B}_z(\alpha)$ 、 $\mathbf{B}_y(\alpha)$ 、 $\mathbf{B}_x(\alpha)$  称为基元变换矩阵。

在一般情况下, 若坐标系  $Ox_q y_q z_q$  相对于坐标系  $Ox_p y_p z_p$  的位置由三个欧拉角  $\zeta$ 、 $\eta$  和  $\xi$  给定, 则坐标系  $Ox_q y_q z_q$  可由  $Ox_p y_p z_p$  按下列顺序连续转动三次而得到 (图 1-3):

① 原始坐标系  $Ox_p y_p z_p$  绕  $Oz_p$  轴转过一个进动角  $\zeta$ , 而到达中间变换坐标  $Ox' y' z_p$ ;

② 坐标系  $Ox' y' z_p$  绕  $Oy'$  轴转过一个章动角  $\eta$  而到达另一个中

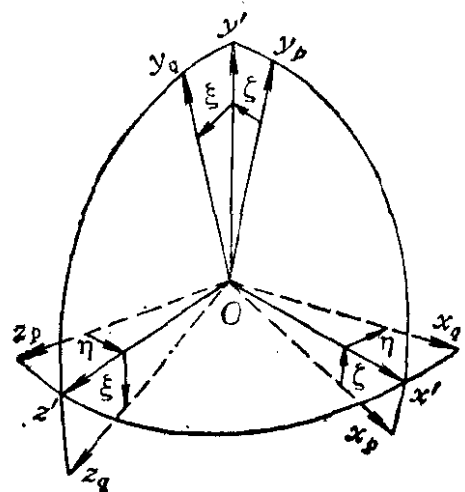


图1-3 空间坐标系的变换

间变换坐标  $Ox_qy'z'$ ;

③ 坐标系  $Ox_qy'z'$  绕  $Ox_q$  轴转过一个滚转角  $\xi$ , 最后到达新坐标系  $Ox_qy_qz_q$ 。

利用三维坐标系的基元变换, 则有

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \mathbf{B}_x(\xi) \begin{bmatrix} x_q \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{B}_y(\eta) \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z_p \end{bmatrix} = \mathbf{B}_z(\zeta) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

根据转动过程, 则应有

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \mathbf{B}_x(\xi) \mathbf{B}_y(\eta) \mathbf{B}_z(\zeta) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

或简写成

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \mathbf{B}_p^q \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

式中  $\mathbf{B}_p^q$  是 (从坐标  $p$  到  $q$  的) 坐标变换矩阵:

$$\mathbf{B}_p^q = \mathbf{B}_x(\xi) \mathbf{B}_y(\eta) \mathbf{B}_z(\zeta) \quad (1-13)$$

其中  $\mathbf{B}_x(\zeta)$ 、 $\mathbf{B}_y(\eta)$ 、 $\mathbf{B}_z(\xi)$  按基元变换矩阵式 (1-8)、(1-9)、(1-10) 列出时, 应把  $\alpha$  分别换成  $\zeta$ 、 $\eta$  和  $\xi$ 。

由式 (1-13) 可以看出, 坐标变换矩阵的构成法则是: 由坐标系  $Ox_p y_p z_p$  到坐标系  $Ox_q y_q z_q$  的变换矩阵  $\mathbf{B}_p^q$  等于基元变换矩阵的乘积; 基元变换矩阵的乘积顺序与从坐标系  $p$  到新坐标系  $q$  的转动顺序相反。

任何两个右手坐标系都可以通过连续几次旋转而重合在一起，且可以通过多种旋转方式来实现。只要知道从一坐标系到另一坐标系绕一定坐标轴连续进行旋转的顺序，就可以很简单地求得用基元变换矩阵乘积表示的变换矩阵。在飞行动力学中，这种方法是要经常用到的。

### 1.2.2 坐标变换矩阵的基本性质

若某一向量  $r$  在两个坐标系中的分量为  $(x_p, y_p, z_p)$  和  $(x_q, y_q, z_q)$ ，它们之间的关系为

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

或简写成

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \mathbf{B}_p^q \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

其中

$$\mathbf{B}_p^q = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

$\mathbf{B}_p^q$  中各元素是两个坐标系相应轴之间的方向余弦，即

$$b_{11} = \cos(x_p, x_q), \quad b_{12} = \cos(y_p, x_q), \quad b_{13} = \cos(z_p, x_q)$$

$$b_{21} = \cos(x_p, y_q), \quad b_{22} = \cos(y_p, y_q), \quad b_{23} = \cos(z_p, y_q)$$

$$b_{31} = \cos(x_p, z_q), \quad b_{32} = \cos(y_p, z_q), \quad b_{33} = \cos(z_p, z_q)$$

若仍利用上述方向余弦符号，则又有

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

若简写成



$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \mathbf{B}_q^p \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

其中

$$\mathbf{B}_q^p = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} \end{bmatrix} \quad (1-19)$$

比较式 (1-16) 及 (1-19), 显然有

$$\begin{cases} \mathbf{B}_p^q = (\mathbf{B}_q^p)^T \\ \mathbf{B}_q^p = (\mathbf{B}_p^q)^T \end{cases} \quad (1-20)$$

即  $\mathbf{B}_p^q$  和  $\mathbf{B}_q^p$  互为转置矩阵。

利用坐标变换矩阵的这个性质, 可以列出坐标变换表, 又称方向余弦表, 其形式如表 1-1 所示。

表1-1 方向余弦表

		坐标系 $p$		
		$x_p$	$y_p$	$z_p$
坐标系 $q$	$x_q$	$b_{11}$	$b_{12}$	$b_{13}$
	$y_q$	$b_{21}$	$b_{22}$	$b_{23}$
	$z_q$	$b_{31}$	$b_{32}$	$b_{33}$

另外, 由方程 (1-15) 可知,

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = (\mathbf{B}_p^q)^{-1} \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

与式 (1-18) 比较, 则有

$$\begin{cases} \mathbf{B}_q^p = (\mathbf{B}_p^q)^{-1} \\ \mathbf{B}_p^q = (\mathbf{B}_q^p)^{-1} \end{cases} \quad (1-22)$$

这表明,  $\mathbf{B}_q^p$  和  $\mathbf{B}_p^q$  互为逆矩阵。

比较式 (1-20) 和 (1-22), 可知

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{B}_p^q)^T = (\mathbf{B}_p^q)^{-1} \\ (\mathbf{B}_q^p)^T = (\mathbf{B}_q^p)^{-1} \end{array} \right. \quad (1-23)$$

因此,  $\mathbf{B}_p^q$  (或  $\mathbf{B}_q^p$ ) 是正交矩阵。根据正交矩阵的性质, 坐标变换矩阵的元素应满足下列关系式

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^3 b_{ki} b_{kj} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \\ \sum_{k=1}^3 b_{ik} b_{jk} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \end{array} \right. \quad (1-24)$$

上式说明, 坐标变换矩阵中的每一行 (列) 三元素的平方和等于 1 (即每一行或每一列的向量模为 1); 任何相异两行 (列) 的元素乘积和为零; 同时任一行 (列) 向量是单位向量。

坐标变换矩阵的性质 (式 (1-24)), 可以用来检查所列写的变换矩阵是否正确。另外, 在运算和推导过程中也常常要利用变换矩阵的正交性质 (式 (1-23))。

## § 1-3 大气飞行动力学中常用坐标系 及其变换矩阵

### 1.3.1 常用坐标系的种类和定义

大气飞行动力学中常用的坐标系有: 地面坐标系 ( $d$ ), 机体坐标系 ( $t$ ), 气流坐标系 ( $q$ ), 航迹坐标系 ( $h$ ), 半机体坐标系 ( $b$ ), 稳定坐标系 ( $w$ )。这些坐标系都是右手坐标系, 其定义如下。

#### (1) 地面坐标系 ( $O_a x_a y_a z_a$ )

原点  $O_a$  固定于地面上某一点;  $y_a$  轴铅垂向上;  $x_a$  轴和  $z_a$  轴在水平面内, 其方向可任意指定。在“平面平行”重力场模型假设下, 重力沿  $y_a$  的负向。

(2) 机体坐标系 ( $Ox_r y_r z_r$ )

原点 $O$ 在飞机质心上；纵轴 $x_r$ 平行于机身轴线（或平行于平均气动弦方向）指向前方；竖轴 $y_r$ 在飞机对称面内，指向机体上方；横轴 $z_r$ 垂直于对称面，指向右方。发动机推力一般按机体坐标系给出。

(3) 气流坐标系 ( $Ox_q y_q z_q$ )

原点 $O$ 在飞机质心上； $x_q$ 轴沿飞行速度矢 $v$ 方向； $y_q$ 轴在飞机对称面，并垂直于 $x_q$ 轴，正常飞行时指向上方； $z_q$ 轴垂直于 $Ox_q y_q$ 平面，指向右方。作用在飞机上的空气动力一般按气流坐标系给出。

(4) 航迹坐标系 ( $Ox_h y_h z_h$ )

原点 $O$ 在飞机质心上； $x_h$ 轴沿飞行速度矢 $v$ 方向（与气流轴 $x_q$ 一致）； $y_h$ 轴在包含飞行速度矢 $v$ 的铅垂平面内，垂直于 $x_h$ 轴指向上方； $z_h$ 轴垂直于铅垂平面 $Ox_h y_h$ ，指向右方（因而是水平的）。研究飞行器的飞行轨迹时，采用航迹坐标系可使运动方程形式较为简单。

(5) 半机体坐标系 ( $Ox_b y_b z_b$ )

原点 $O$ 在飞机质心上； $x_b$ 轴沿飞行速度矢 $v$ 在飞机对称面内的投影方向； $y_b$ 轴垂直于 $x_b$ 轴在飞机对称面内，指向上方（因而与 $y_q$ 轴重合）； $z_b$ 轴垂直于飞机对称面，指向右方（因而与 $z_r$ 轴重合）。风洞实验中测量空气动力时，常用半机体坐标系。

(6) 稳定坐标系 ( $Ox_w y_w z_w$ )

原点 $O$ 在飞机质心上； $x_w$ 轴沿飞行速度矢 $v$ 在飞机对称平面上的投影； $y_w$ 轴在对称平面内垂直于 $x_w$ ，指向上方； $z_w$ 垂直于飞机对称平面。因此，稳定坐标系与机体坐标系具有相同的性质，实际上也是一种机体坐标系。两者的 $z$ 轴是一致的，两者的 $x$ 轴之间和 $y$ 轴之间仅相差一个未扰动迎角 $\alpha_0$ 。有些国家在研究飞机的稳定性问题时常采用稳定性坐标系。

除上述列举的常用坐标系外，有的著作中还会采用其它种类

的坐标系。另外，各国对坐标系各轴的规定也不尽相同，使用中应予注意。

### 1.3.2 常用坐标系之间的角度关系及变换矩阵

各坐标系之间的角度关系，可利用欧拉角加以确定。为使用方便，飞行动力学中对各欧拉角冠以不同的名称。每种坐标系都可以通过平移和绕不同的轴转动若干次，而与另一个坐标系完全重合。

#### (1) 地面坐标系与机体坐标系之间的关系

平移地面坐标系  $O_a x_a y_a z_a$ ，使其原点与机体坐标系  $O x_t y_t z_t$  的原点重合，它们之间的角度关系可以用下列三个欧拉角加以确定（图 1-4）。

偏航角  $\psi$ ：机体轴  $x_t$  在水平面  $O x_a z_a$  上的投影线  $x'$  与  $x_a$  轴之间的夹角。当按右手法则绕  $y_a$  轴从  $x_a$  轴转到该投影线， $\psi$  角规定为正。

俯仰角  $\vartheta$ ：机体轴  $x_t$  与水平面  $O x_a z_a$  之间的夹角。当按右手法则绕  $z'$  轴从  $x'$  轴转到  $x_t$  轴时（ $x_t$  轴向上倾斜）， $\vartheta$  规定为正。

滚转角（又称倾侧角） $\gamma$ ：飞机对称面  $O x_t y_t$  与包含  $x_t$  轴的铅垂面之间的夹角。按右手法则，绕  $x_t$  轴从铅垂面转到飞机对称平面（即右机翼下沉、左机翼上抬），规定  $\gamma$  为正。

这三个角度  $\psi$ 、 $\vartheta$ 、 $\gamma$  决定了飞机在空间的姿态。

当平移地面坐标系  $O_a x_a y_a z_a$ ，使其原点与机体坐标系  $O x_t y_t z_t$  的原点重合后，再按上述顺序（即转动  $\psi$ 、 $\vartheta$ 、 $\gamma$  角）转动三次，可使地面坐标系  $O_a x_a y_a z_a$  与机体坐标系  $O x_t y_t z_t$  完全重合。

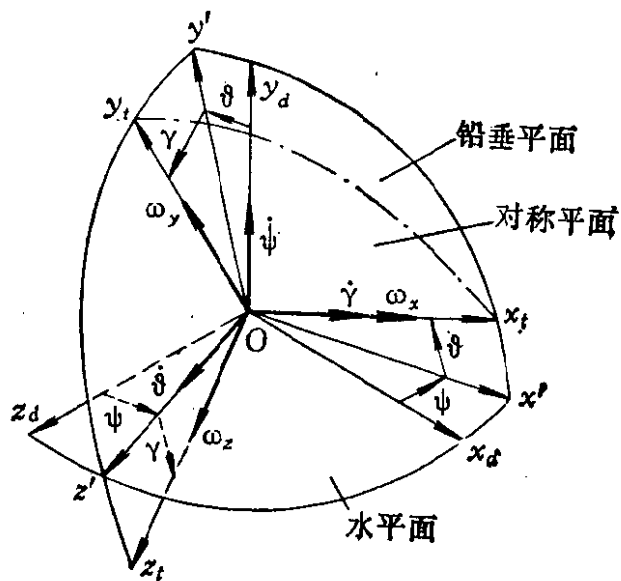


图1-4 地面坐标系与机体坐标系的关系

按照坐标变换矩阵构成的一般法则，上述二坐标系之间的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{B}_d^t = \mathbf{B}_x(\gamma) \mathbf{B}_z(\vartheta) \mathbf{B}_y(\psi) \quad (1-25)$$

其中各基元变换矩阵为

$$\mathbf{B}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_z(\vartheta) = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_y(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}$$

把上述三个基元矩阵代入式 (1-25)，经整理最后得到地面坐标系 ( $d$ ) 到机体坐标系 ( $t$ ) 的变换矩阵为

$$\mathbf{B}_d^t = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \sin \psi \\ -\cos \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi & \cos \gamma \cos \vartheta & \cos \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \sin \gamma \cos \psi \\ \sin \gamma \sin \vartheta \cos \psi + \cos \gamma \sin \psi & -\sin \gamma \cos \vartheta & -\sin \gamma \sin \vartheta \sin \psi + \cos \gamma \cos \psi \end{pmatrix} \quad (1-26)$$

设飞机绕质心的转动角速度矢量为  $\omega_t$  (即机体坐标系相对地面坐标系的转动角速度)，由图 1-4 可见， $\omega_t$  可分解成：沿  $y_d$  轴的  $\dot{\psi}$ ；沿  $z_d$  轴的  $\dot{\vartheta} \cos \psi$  和沿  $x_d$  轴的  $\dot{\vartheta} \sin \psi$  (将沿  $z'$  轴的  $\dot{\vartheta}$  向  $z_d$  轴和  $x_d$  轴分解)；沿  $x_t$  轴的  $\dot{\gamma}$ 。若  $\omega_t$  在机体坐标系上的投影分量为  $\omega_{x_t}$ 、 $\omega_{y_t}$ 、 $\omega_{z_t}$ ，应用坐标变换矩阵，则得

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_t} \\ \omega_{y_t} \\ \omega_{z_t} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_d^t \begin{bmatrix} \dot{\vartheta} \sin \psi \\ \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \cos \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\gamma} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-27)$$

## (2) 地面坐标系与航迹坐标系之间的关系

平移地面坐标系使其原点与航迹坐标系的原点重合，它们之间的角度关系可以用下面两个欧拉角来确定（图 1-5）。

航迹偏转角（又称航向角） $\psi_s$ ：航迹坐标系的  $x_h$  轴（即速度矢  $\boldsymbol{v}$ ）在水平面  $O_d x_d z_d$  上的投影线  $x'$  与地面轴  $x_d$  之间的夹角。按右手法则地面坐标系  $O_d x_d y_d z_d$  绕  $y_d$  轴转过  $\psi_s$  角而到达中间变换坐标  $O x' y_d z_h$  时，此时的  $\psi_s$  规定为正。

航迹倾斜角（又称航迹倾角） $\theta$ ：航迹轴  $x_h$ （即速度矢  $\boldsymbol{v}$ ）与水平面  $O_d x_d z_d$  之间的夹角。按右手法则， $O x' y_d z_h$  绕  $z_h$  轴转过  $\theta$  角而最后到达  $O x_h y_h z_h$  时（即速度矢  $\boldsymbol{v}$  向上方倾斜），此时的  $\theta$  规定为正。

角度  $\psi_s$  和  $\theta$  确定了飞行速度矢量  $\boldsymbol{v}$  在空间的方向。

当地面坐标系经过平移而与航迹坐标系的原点重合后，可再按上述顺序转动两次（即转动  $\psi_s$  和  $\theta$  角），即可使地面坐标系与航迹坐标系完全重合。其变换矩阵为

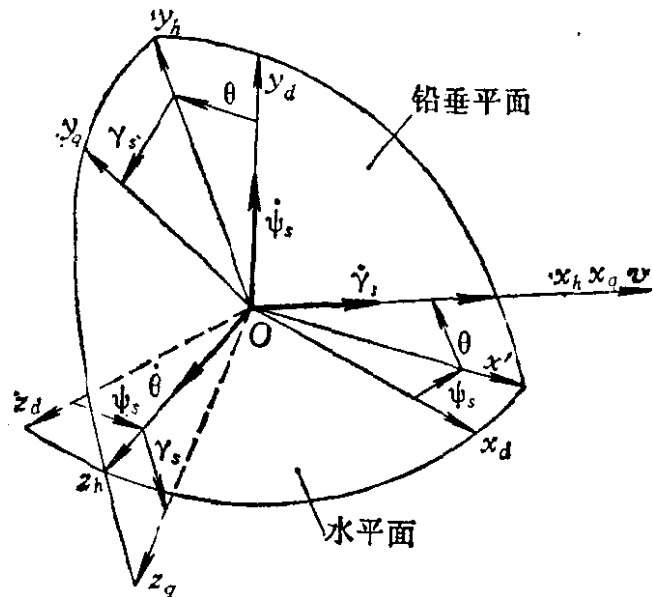


图1-5 地面坐标系、航迹坐标系及气流坐标系之间的关系

$$\mathbf{B}_d^h = \mathbf{B}_z(\theta) \mathbf{B}_y(\psi_s) \quad (1-28)$$

利用基元变换矩阵  $\mathbf{B}_z(\theta)$  及  $\mathbf{B}_y(\psi_s)$  可得地面坐标系 ( $d$ ) 到航迹坐标系 ( $h$ ) 的变换矩阵为

$$\mathbf{B}_d^h = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi_s & \sin \theta & -\cos \theta \sin \psi_s \\ -\sin \theta \cos \psi_s & \cos \theta & \sin \theta \sin \psi_s \\ \sin \psi_s & 0 & \cos \psi_s \end{bmatrix} \quad (1-29)$$

利用变换矩阵，又可把航迹坐标系的转动角速度  $\omega_h$  表成

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_h} \\ \omega_{y_h} \\ \omega_{z_h} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_d^h \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi}_s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_s \sin \theta \\ \dot{\psi}_s \cos \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (1-30)$$

### (3) 航迹坐标系与气流坐标系之间的关系

航迹坐标系与气流坐标系之间的关系只用一个角度即可确定，这个角度称为绕速度矢  $\mathbf{v}$  的滚转角（简称速度滚转角） $\gamma_s$ 。角  $\gamma_s$  是飞机对称平面  $Ox_r y_r$  与包含速度矢量  $\mathbf{v}$ （即包含  $x_q$  轴）的铅垂平面之间的夹角，亦即  $y_q$  轴与  $y_h$  轴之间的夹角（图 1-5）。按右手法则，绕  $x_q$  轴从铅垂平面转到飞机对称平面（右翼下沉）时，此时的  $\gamma_s$  规定为正。因此，变换矩阵为

$$\mathbf{B}_h^q = \mathbf{B}_x(\gamma_s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_s & \sin \gamma_s \\ 0 & -\sin \gamma_s & \cos \gamma_s \end{bmatrix} \quad (1-31)$$

### (4) 气流坐标系与机体坐标系之间的关系

这两个坐标系之间的关系由迎角  $\alpha$  和侧滑角  $\beta$  来确定（图 1-6）。

迎角  $\alpha$ ：气流轴  $x_q$ （沿速度矢  $\mathbf{v}$ ）在飞机对称平面  $Ox_r y_r$  上的投影线  $x_b$  与机体轴  $x_r$  之间的夹角。若速度矢  $\mathbf{v}$  偏向飞机的  $Ox_r z_r$  平面的下方，规定  $\alpha$  为正。

侧滑角  $\beta$ ：气流轴  $x_q$ （沿速度矢  $\mathbf{v}$ ）与飞机对称平面  $Ox_r y_r$  之间的夹角。若速度矢  $\mathbf{v}$  偏向飞机右方，规定  $\beta$  为正。

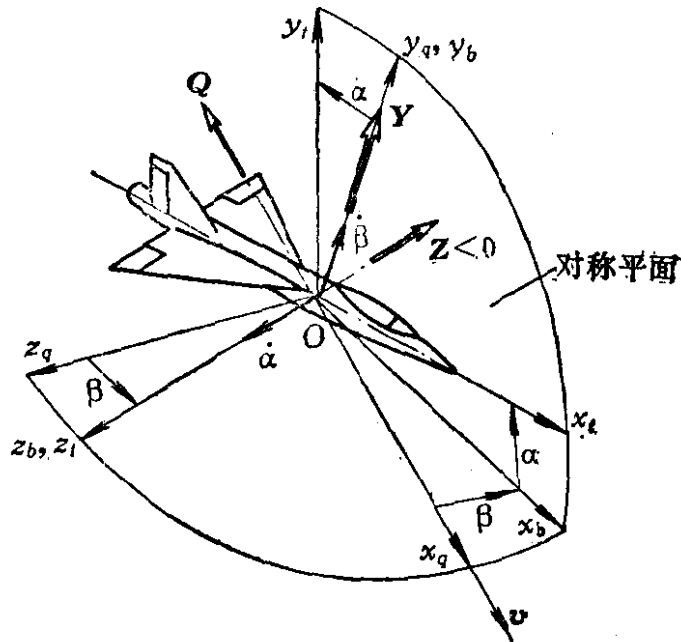


图 1-6 气流坐标系与机体坐标系、半机体坐标系的关系

气流坐标系经过两次转动, 首先  $O_{x_q y_q z_q}$  绕  $y_q$  轴转过  $\beta$  角而到达中间变换坐标  $O_{x_b y_b z_b}$  (即半机体坐标系  $O_{x_b y_b z_b}$ ); 然后  $O_{x_b y_b z_b}$  绕  $z_b$  轴转过  $\alpha$  角, 最后到达机体坐标系  $O_{x, y, z}$  (图 1-6)。

它们之间的变换矩阵为

$$\mathbf{B}_q^t = \mathbf{B}_z(\alpha) \mathbf{B}_y(\beta) \quad (1-32)$$

经整理最后得

$$\mathbf{B}_q^t = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1-33)$$

(5) 航迹坐标系与机体坐标系之间的关系

由变换矩阵的性质, 可知

$$\mathbf{B}_h^t = \mathbf{B}_q^t \mathbf{B}_h^q$$

把式 (1-33) 和 (1-31) 代入, 经整理得

$$\mathbf{B}_h^t = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha \cos \gamma_s + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma_s & \sin \alpha \sin \gamma_s - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma_s \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \gamma_s - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma_s & \cos \alpha \sin \gamma_s + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma_s \\ \sin \beta & -\cos \beta \sin \gamma_s & \cos \beta \cos \gamma_s \end{bmatrix} \quad (1-34)$$

与此类似, 不难找到地面坐标系 ( $d$ ) 与气流坐标系 ( $q$ ) 之间的变换矩阵

$$\mathbf{B}_d^q = \mathbf{B}_h^q \mathbf{B}_d^h$$

把式 (1-31) 和 (1-29) 代入, 经整理得

$$\mathbf{B}_d^q = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi_s & \sin \theta & -\cos \theta \sin \psi_s \\ \sin \gamma_s \sin \psi_s - \cos \gamma_s \sin \theta \cos \psi_s & \cos \gamma_s \cos \theta & \sin \gamma_s \cos \psi_s + \cos \gamma_s \sin \theta \sin \psi_s \\ \cos \gamma_s \sin \psi_s + \sin \gamma_s \sin \theta \cos \psi_s & -\sin \gamma_s \cos \theta & \cos \gamma_s \cos \psi_s - \sin \gamma_s \sin \theta \sin \psi_s \end{bmatrix} \quad (1-35)$$



### § 1-4 外力在航迹坐标系上的表达式

前一节已指出，作用在飞机上的外力是按一定的坐标系给出的，由于研究飞机的质心运动时常常采用航迹坐标系，因而应把外力转换到航迹坐标系上。

发动机推力  $P$  由安装在飞机上的发动机提供。在飞机设计中一般要求发动机推力矢量  $P$  处在飞机对称平面内，有时会与机体轴  $x_t$  构成某一夹角  $\varphi_p$ ，称为发动机安装角。推力线也不一定恰好通过飞机质心，此时会有推力偏心距  $e_p$  (图 1-7)。因此，把发动机推力分量写在机体坐标系上是方便的。

$$\begin{bmatrix} P_{x_t} \\ P_{y_t} \\ P_{z_t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \cos \varphi_p \\ P \sin \varphi_p \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-36)$$

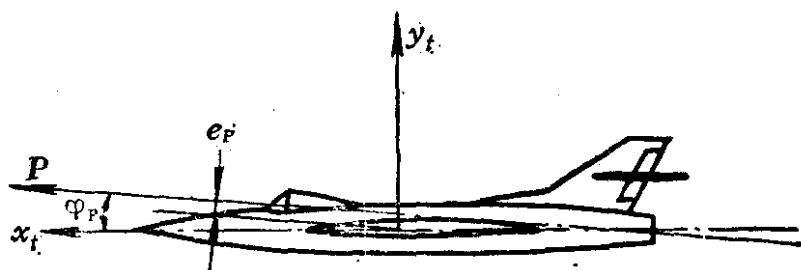


图1-7 发动机推力矢量

空气动力  $R$  一般按气流坐标系定义，沿气流坐标系三个轴的分量，分别定义为阻力  $Q$  (沿  $x_q$  轴负向)、升力  $Y$  (沿  $y_q$  轴正向)、侧力  $Z$  (沿  $z_q$  轴正向)，即

$$\begin{bmatrix} R_{x_q} \\ R_{y_q} \\ R_{z_q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (1-37)$$

重力  $G$  在平面平行引力场中沿着地面坐标系的  $y_a$  轴的负向，故重力  $G$  按地面坐标系列写