物理学

〔苏〕尤·符·霍夫曼 著

（下）

定律公式题解

吉林人民出版社

物理学定律、公式、题解

（下　册）

尤·符·霍夫曼　著
郭新凯、王鸥敏、张维训
张智明、朱宝宸、赵展岳　译
郭新凯、赵展岳　校

吉林人民出版社

电　　学

9. 静　电　学

电荷　由经常束缚在某一物体上的单个的基本正电荷或负电荷组成。质子、单电荷正离子和正电子带基本正电荷；电子带基本负电荷。一个基本电荷 e 等于 $1.6\cdot10^{-19}$ 库仑〔C〕。当电流为1安培时，1秒内通过导体横截面的电荷为1库仑。

电荷的相互作用。库仑定律　同性点电荷* 相互排斥，异性点电荷相互吸引，作用力

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,r}。$$

这里q_1和q_2为相互作用的电荷〔C〕；r 为电荷间的距离〔M〕；$\varepsilon_0=8.85\cdot10^{-12}$ 法拉/米，为绝对介电常数；ε_r 为电荷所在物质的相对介电常数（对于真空：$\varepsilon_r=1$）。这时力 F 的单位是牛顿〔N〕，力的方向与连结两个点电荷的直线一致。

电场强度　E在数值上等于作用在电场中单位电荷上的力。因此，点电荷 q_1 在与其距离为 r 的地方产生的电场强度

$$E=\frac{F}{q_2}=\frac{q_1}{4\pi\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,r^2}。$$

---

* 带电体的大小与它们之间的距离相比可以忽略时，带电体即可认为是点电荷。

电场强度是方向沿着$\vec{r}$的矢量。几个电荷产生的电场强度可用几何合成法求出（场的迭加原理）。

电场的度量单位是牛顿/库仑，或者是与其等同的伏特/米。

电荷的体密度（物体单位体积的电荷）

$$\gamma=\frac{q}{V}。$$

电荷的面密度（物体单位表面积的电荷）

$$\sigma=\frac{q}{s}。$$

无限大的均匀带电平板的电场强度

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_r\varepsilon_0}。$$

带异性电荷的两个无限大平板间的电场强度

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0},$$

后两式与距离无关，这表明它们是匀强电场。

带电q的小球在与球心距离为r的球外一点产生的电场强度

$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0r^2},$$

即等于点电荷q在球心时产生的电场强度。

静电场的电势　如果位于同性点电荷q的电场中的单位正电荷，远离电荷，则这时库仑力作功等于$Er=q/4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0r$。当距离$r$增大时，库仑力迅速减少（如$1/r^2$），而且所作的功增长也越来越慢，最后实际上停止下来（在数学上，这种情况发生于$r\to\infty$时）。电场力所作的功表示静电场的势能，或者表示单位电荷在始点的电势。因此，距场源为r的点的电势在数

值上等于把单位正电荷从该点移至无穷远时静电力所作的功：

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r}。$$

如果电场由几个电荷产生，则场的电势等于每个电荷所产生的电势的代数和（场的迭加原理）。

电势差 如果点1和点2的电势相应地为 φ_1和 φ_2，则把单位正电荷由点1移至点2所作的功表示点1和点2的电势差，或者说表示这两点间的电压U_{12}。如果移动的不是单位正电荷而是任意电荷q，那么这时所作的功

$$A_{12}=q(\varphi_1-\varphi_2)=qU_{12}。$$

电势差的度量单位是伏特〔V〕。在1伏特电压作用下，移动1库仑电荷所作的功是1焦耳〔J〕。

如果点 1 和点 2 与点场源的距离为 r_1 和 r_2，则 $\varphi_1-\varphi_2=U_{12}=E_1r_1-E_2r_2$。对于匀强电场 $E_1=E_2=E$；$r_1-r_2=d$，那么

$$E=\frac{U_{12}}{a}。$$

根据此式可知电场的度量单位是伏特/米。

电容 如果给一个导体带上电荷q，这时必须克服库仑排斥力作功（前一部份电荷将要排斥后一部份），导体具有的电势φ与带电量q成正比

$$q=C\varphi=C(\varphi_2-\varphi_1)=CU。$$

系数C叫做导体的电容。电容的单位叫做法拉〔F〕。当导体带上1库仑的电量、它的电势增加1伏特时，这个导体的电容是 1 法拉。

平板电容器的电容

$$C=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 S}{d},$$

式中S为一个极板的面积〔M^2〕；d为极板间的距离〔M〕；ε_r为极板间填充物的介电常数。

球壳电容器的电容

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 Rr}{R-r},$$

式中R和r为球壳的外半径和内半径〔M〕。

半径为r的球的电容

$$C=4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r。$$

电容器并联时（图203，a），电容器的容量相加：

$$C=C_1+C_2+\cdots+C_n。$$

电容器串联时（图203，$б$），容量的倒数相加：

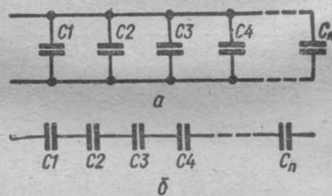

图 203

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\cdots+\frac{1}{C_n}。$$

容量为C的带电导体的能量（充电的电容器）

$$W=\frac{C\varphi^2}{2}=\frac{CU^2}{2}=\frac{qU}{2}=\frac{q^2}{2C}。$$

两个点电荷q_1和q_2的相互作用能

$$W=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r_{12}}。$$

电偶极子 相距为l的两个等量异性点电荷q组成的整体称为电偶极子。偶极子用叫做电距的向量$\vec{P}$来表征

$$\vec{P}=q\vec{l},$$

向量$\vec{P}$的正方向由负电荷指向正电荷。

电子伏特（eV） 为带基本电荷$e=1.6\times10^{-19}$库仑的粒子在真空中被1伏特的电压加速时所得到的能量。

$1eV = 1.6 \cdot 10^{-19}$〔焦耳〕。

9·1 两个同样的导电小球所带的电量各为$+q_1$和$-q_2$，由于相互吸引而接触，然后又离开的距离为r。试求接触后每个小球带的电量及小球间的作用力。

解： 接触后每个小球带的电量等于

$$q = \frac{q_1 + (-q_2)}{2} = \frac{q_1 - q_2}{2}。$$

根据库仑定律小球间的相互作用力

$$F = \frac{1}{16\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{(q_1 - q_2)^2}{r^2}。$$

9·2 半径和重量都相等的两个小球相互接触地悬挂着。给小球带上电量q后，它们相互排斥，并且分开的角度为2α。如果从悬挂点到球心的距离为l（图204），试求小球的重量。假设球的大小与球离开平衡位置的偏移相比忽略不计。

解： 要使小球处于平衡状态，则张力$F_{张}$与小球的重力P的合力F应当和小球间的库仑作用力$F_{库}$平衡

从力的三角形中得到

$$F = P\text{tg}\alpha。$$

根据库仑定律

$$F_{库} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{R^2};$$

$$q_1 = q_2 = \frac{q}{2};\quad R = 2(s + r) = 2(l\sin\alpha + r),$$

式中r为小球半径；

$$P\text{tg}\alpha = \frac{1}{4\pi \varepsilon_r \varepsilon_0} \frac{q^2}{4(2l\sin\alpha + 2r)^2}$$

或者

$$P = \frac{q^2}{64\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 \text{tg}\alpha(l\sin\alpha + r)^2}。$$

因为$r \ll l\sin\alpha$，所以

$$P=\frac{1}{64\pi\ \varepsilon_r\ \varepsilon_0}\ \frac{q^2}{l^2\ \sin^2\alpha\ \operatorname{tg}\alpha}。$$

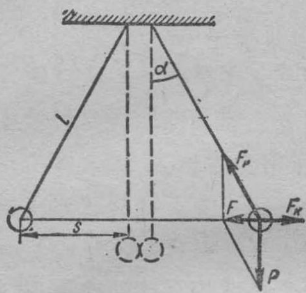

图 204

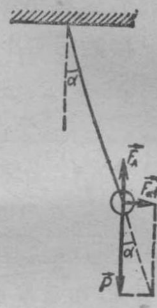

图 205

9·3 两个半径和重量都相同的小球，用等长的线悬挂起来，并把小球放到绝缘液体中，绝缘液体的密度为ρ_1，相对介电常数为ε_1。为使小球在空气中和液体中离开的角度相同，试问小球的密度应为多少？

解： 从上题中得出，小球的重量P和它们在空气中的库仑排斥力$F_库$的关系式为

$$F_{库}=P\operatorname{tg}\alpha。$$

对于浸在液体中的小球，除重力和库仑排斥力之外，阿基米德浮力$F_阿$也作用在小球上（图205），因此

$$F_{库1}=(P-F_{阿})\operatorname{tg}\alpha。$$

由这两个方程式得

$$F_{库1}=\frac{P-F_{阿}}{P}F_{库}=\frac{F_{库}}{\varepsilon_1};$$

所以

$$\frac{1}{\varepsilon_1}=1-\frac{F_{阿}}{P}。$$

根据阿基米德定律 $F_{阿}=\rho_1\cdot gV$，式中 V 为小球体积；$P=\rho gV$，因此

$$\frac{1}{\varepsilon_1}=1-\frac{\rho_1}{\rho}。$$

或者

$$\rho=\frac{\rho_1\varepsilon_1}{\varepsilon_1-1}。$$

9·4 有两个正电荷$q_1=ne$和$q_2=me$，它们之间的距离为l。1)如果q_1和q_2固定，应如何放置第三个电荷q，才能使此电荷处于平衡状态？2)如果q_1和q_2是自由的，又应如何放置第三个电荷？且q等于多少？

解： 1)为了使电荷q处于平衡状态，电荷q_1对q的作用力F_1应等于电荷q_2对q的作用力F_2（图206)。

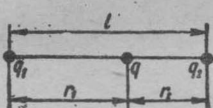

图 206

根据库仑定律

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\ \frac{q_1q}{r_1^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\ \frac{q_2q}{r_2^2}。$$

因为$r_1=l-r_2$，所以

$$\frac{q_1}{(l-r_2)^2}=\frac{q_2}{r_2^2},$$

或者

$$\frac{ne}{(l-r_2)^2}=\frac{me}{r_2^2},$$

由此

$$r_2=\frac{l\sqrt{m}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}。$$

为使平衡保持稳定，电荷q应是正的。假如电荷q离开平衡位置靠近电荷q_2，则q_2对它的排斥力增加，而q_1对它的排斥力减少，因此电荷q回到平衡位置。

2) 这时电荷q应是负的，但平衡是不稳定的。例如，假

设电荷q_1移向电荷q，则q对q_1的吸引力大于q_2对q_1的排斥力，平衡受到破坏，并且q_1和q相互接触，q_2飞向无限远处。

系统的平衡条件是对每个电荷的作用力之和等于零：

$$F_1 = F_2; \quad F_{21} = F_1; \quad F_2 = F_{21},$$

式中F_1为电荷q和q_1间的相互作用力；F_2为电荷q和q_2间的相互作用力；F_{21}为电荷q_1和q_2间的相互作用力。

考虑到$r_1 + r_2 = l$，我们从这些方程式中得到的r_1和r_2的数值与1)中相同。然后我们写出：

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{l^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{q q_2}{r_2^2};$$

$$\frac{q_1}{l^2} = \frac{q}{r_2^2},$$

由此得到

$$q = q_1\frac{m}{(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2}。$$

9·5 电子沿半径为r的圆轨道绕核（带电荷Ze）转动。试求电子的速度和转动周期。

解： 这时库仑作用力起向心力作用

$$F_{库} = F_{向};$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{e\cdot Ze}{r^2} = \frac{mv^2}{r},$$

式中m为电子质量。由此得到

$$v^2 = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 rm}; \qquad v = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{Z}{\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 rm}}.$$

转动周期

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{e}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 rm}{Z}}.$$

9·6 用细绝缘杆把两个半径为 r，密度为 ρ 的相同的金属球穿起来。上球固定在杆上，下球可沿杆自由移动。把两个小球放进介电常数为ε_1，密度为ρ_1的液体中。从上球的每十亿个原子中取出一个电子，移到下球上。如果绝缘杆竖直放着，试问平衡时上下两球间的距离是多少（图207）？

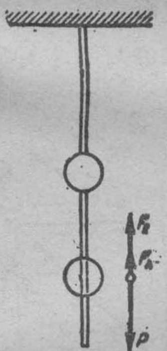

图 207

解：　如果把电子从一个小球移至另一小球上，则这两个小球带异性等量电荷。两小球间作用着库仑吸引力。作用在下面球上的力有：重力 $P=\rho gV=\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$，式中 ρ 小球的密度；阿基米德浮力 $F_{阿}=\rho_1 gV=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g$，式中 ρ_1 为液体的密度；库仑力 $F_{库}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{R^2}$，并且 $|q_1|=|q_2|=ne$，式中 n 为移走的电子数。

为使小球处于平衡状态，必须使

$$F_{库}+F_{阿}=P,$$

或者

$$\frac{n^2e^2}{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_0R^2}+\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g=\frac{4}{3}\pi r^3\rho g;$$

$$n=\frac{N}{Z}=\frac{mN_A}{\mu Z}=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho N_A}{\mu Z}.$$

这里N表示分子量为 μ、质量为m的小球中的原子数；Z为原子总数与失去一个电子的原子数之比；N_A为阿佛加德罗常数。

$$\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2\rho^2N_A^2e^2}{\mu^2Z^24\pi\varepsilon_1\varepsilon_0R^2}+\frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g=\frac{4}{3}\pi r^3\rho g,$$

由此

$$R=\sqrt{\frac{r^3\rho^2N_A^2e^2}{3\varepsilon_1\varepsilon_0\mu^2Z^2g(\rho-\rho_1)}}$$

$$=\frac{\rho N_Aer}{\mu Z}\sqrt{\frac{r}{3\varepsilon_1\varepsilon_0g(\rho-\rho_1)}}。$$

9·7 在边长为a的正六边形的顶点上有点电荷q，$2q$，$3q$，$4q$，$5q$，$6q$，对角线交点有点电荷q（图208）。试求对中心点电荷的作用力。

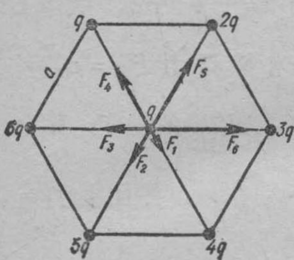

图 208

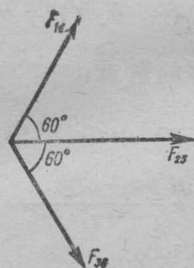

图 209

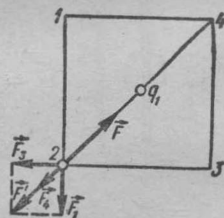

图 210

解： 如果所有电荷都是同性的，那么在中心的点电荷q与其他电荷间作用着排斥力F_1，F_2，F_3，F_4，F_5，F_6：

$$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{q^2}{a^2};$$

$$F_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\frac{2q^2}{a^2}=2F_1;$$

$$F_3=3F_1;\qquad F_4=4F_1;$$

$$F_5=5F_1;\qquad F_6=6F_1。$$

F_1和F_4的合力$F_{14}=3F_1$，与F_4同方向；F_2和F_5的合力$F_{25}=3F_1$，与F_5同方向，F_3和F_6的合力$F_{36}=3F_1$，与F_6同方向。因此（图209），

$$F = F_{25} + F_{14}\cdot\cos 60^\circ + F_{36}\cdot\cos 60^\circ = 6F_1$$

$$= \frac{3q^2}{2\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 a^2}。$$

9·8 在正方形的四个顶点上有相同的正电荷q。为了使系统平衡，需要在正方形的中心放置多少负电荷（图210）？

解： 为使位于正方形顶点上的每个电荷都处于平衡状态，必须使作用在每个电荷上的合力等于零。用F_3表示电荷2和3之间的相互作用力；F_1表示电荷2和1之间的相互作用力；F_4表示电荷2和4之间的相互作用力；F表示电荷2和中心点的电荷q_1之间的作用力。电荷2的平衡条件是

$$\vec{F} + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_1 = 0。$$

设

$$\vec{F}^1 = \vec{F}_3 + \vec{F}_1,$$

则

$$F^1 = \sqrt{F_3^2 + F_1^2} = \sqrt{2}F_1。$$

因为电荷1和3的电量相等，且与电荷2的距离相同，所以F_1和F_3的数值相等。电荷2的平衡条件可以写成

$$F - F_4 - F_1\sqrt{2} = 0,$$

或者

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\left[\frac{qq_1}{r^2} - \frac{q^2}{(2r)^2} - \frac{q^2\sqrt{2}}{a^2}\right] = 0。$$

因为

$$2r = \sqrt{2}a,$$

所以

$$\frac{2q_1}{a^2} - \frac{q}{2a^2} - \frac{q\sqrt{2}}{a^2} = 0;$$

$$q_1=\frac{q(2\sqrt{2}+1)}{4}。$$

这个平衡是不稳定的（参看9·4题）。

9·9 在两个相同的水滴上都有一个多余的电子。如果静电排斥力和万有引力平衡，试问水滴的半径是多大？

解： 由题的条件看出，水滴电荷 $q_1=q_2=e$。根据题的条件

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\ \frac{e^2}{R^2}=\gamma\frac{m^2}{R^2};$$

式中m为水滴质量；R为水滴间的距离。

显然

$$m=\rho V=\frac{4}{3}\pi r^3\rho,$$

式中r为水滴半径；ρ为水的密度。

因此

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\ \frac{e^2}{R^2}=\gamma\frac{16\pi^2r^6\rho^2}{9R^2},$$

$$r=\sqrt[6]{\frac{9e^2}{64\pi^3\varepsilon_r\varepsilon_0\rho^2\gamma}}。$$

9·10 两电荷$q_1=q$和$q_2=-2q$相互间距离为l。在两电荷连线的中垂线上且与连线中点相距l处有电荷$q_3=3q$。试求这两个电荷对第三个电荷ε_3的作用力（图211）。

解： 作用在电荷q_3上的力等于电荷q_1和q_2对q_3作用力的几何和：

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2。$$

根据库仑定律

$$F_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0}\ \frac{q_1q_3}{r^2}=\frac{3q^2}{5\pi\varepsilon_r\varepsilon_0l^2},$$

$$F_2=\frac{6q^2}{5\pi\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,l^2}$$

(因为$r^2=\dfrac{5l^2}{4}$)。显然

$$\cos\alpha=\cos2\gamma=\cos^2\gamma-\sin^2\gamma$$

$$=\frac{\left(\frac{l}{2}\right)^2}{l^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{l^2}{l^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2}=-0.6;$$

$$F^2=F_1^2+F_2^2-2F_1F_2\cos(180°-\alpha)$$

$$=\frac{9q^4+36q^4-36q^4 0.6}{25\pi^2(\varepsilon_r\,\varepsilon_0)^2\,l^4};$$

$$F=\frac{3\sqrt{2.6}\,q^2}{5\pi\,\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,l^2}。$$

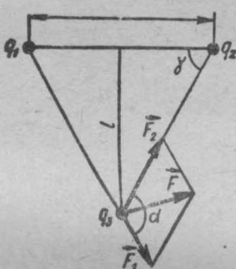

图 211

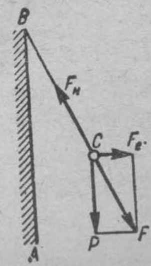

图 212

9·11 AB为均匀带电的无限大的平板，C为重量为P的带有同性电荷q的小球。线的张力等于$F_{张}$。试求平板AB上的电荷面密度（图212）。

解： 作用在小球C上的力有重力P和带电平板产生的电场E对电荷q的作用力$F_e=qE$。线的张力的大小等于这些力的合力，即$|F_{张}|=|F|$。无限平板的电场强度$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_r\,\varepsilon_0}$，式中$\sigma$为电荷的面密度。由图看出

$$F^2{}_{张} = F_e^2 + F^2 = \frac{\sigma^2 q^2}{4(\varepsilon_r \varepsilon_0)^2} + P^2。$$

由此

$$\sigma = \sqrt{\frac{(F^2{}_{张} - P^2)4\varepsilon_r{}^2\varepsilon_0^2}{q_2}} = \frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0}{q}\sqrt{F^2{}_{张} - P^2}。$$

9·12 半径为 r 的金属球放在相对介电常数为 ε_r，密度为 ρ_2 的液态电介质中。小球的密度等于 ρ_1。如果匀强电场竖直向上，小球在液体中悬浮，小球的电荷是多少？液体中的电场是由距离为 d，电势差 U 的两个平行板产生的匀强电场。

解： 作用在小球上的力有竖直向上的电场力 $F_{电}$，竖直向下的重力 P 和竖直向上的阿基米德浮力 $F_{阿}$。

平衡时

$$F_{阿} + F_{电} = P,$$

式中 $F_{阿} = \rho_2 gV = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g$（$V$ 为小球体积）；

$$P = mg = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g;$$

$$F_e = qE = q\frac{U}{d};$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho_2 g + q\frac{U}{d} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_1 g,$$

由此得出

$$q = \frac{4\pi r^3 g(\rho_1 - \rho_2)d}{3U}。$$

9·13 在正四边锥体的底的四个顶点上有电荷 $q_1 = q$；$q_2 = -q$；$q_3 = q$；$q_4 = -q$。试求正四边锥体顶点处的电场强度（图213）。

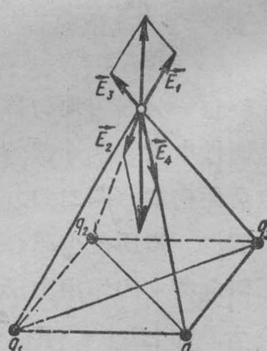

图 213

解：电荷 q_1 和 q_3 在顶点产生的电场强度等于 $\vec{E}' = \vec{E}_1 + \vec{E}_3$；

电荷q_2和q_4在顶点产生的电场强度$\vec{E}'' = \vec{E}_2 + \vec{E}_4$，且与$\vec{E}'$方向相反。因为$|E_1| = |E_2| = |E_3| = |E_4|$，所以在顶点的合成电场强度为0。

9·14 在很大的平板电容器的两个水平放置的极板中间，用线悬挂着一个质量为m的金属小球。小球不带电荷时的振动周期为T_1。当给电容器充电和小球带电后，振动周期为T_2，且$T_2 > T_1$。试问电场对小球的作用力是多少？线长是多少？如果小球带电的符号改变，它的振动周期又是多少？

解： 如果小球的电荷等于$+e$，而电场强度等于E（电容器上极板为负，下极板为正），那么除了重力外，还有向上的电场力$F_e = eE$作用在小球上。由于这个附加力的作用，小球在电容器中的重力加速度将要改变。根据牛顿第二定律

$$mg' = mg - eE = mg - F_e,$$

或者

$$g' = g - \frac{F_e}{m}。$$

振动周期

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - \frac{F_e}{m}}},$$

可是

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}。$$

显然

$$l = \frac{gT_1^2}{4\pi^2},$$

和

$$T_2^2 = \frac{T_1^2 g}{\left(g - \frac{F_e}{m}\right)},$$