实变函数与泛函分析概要

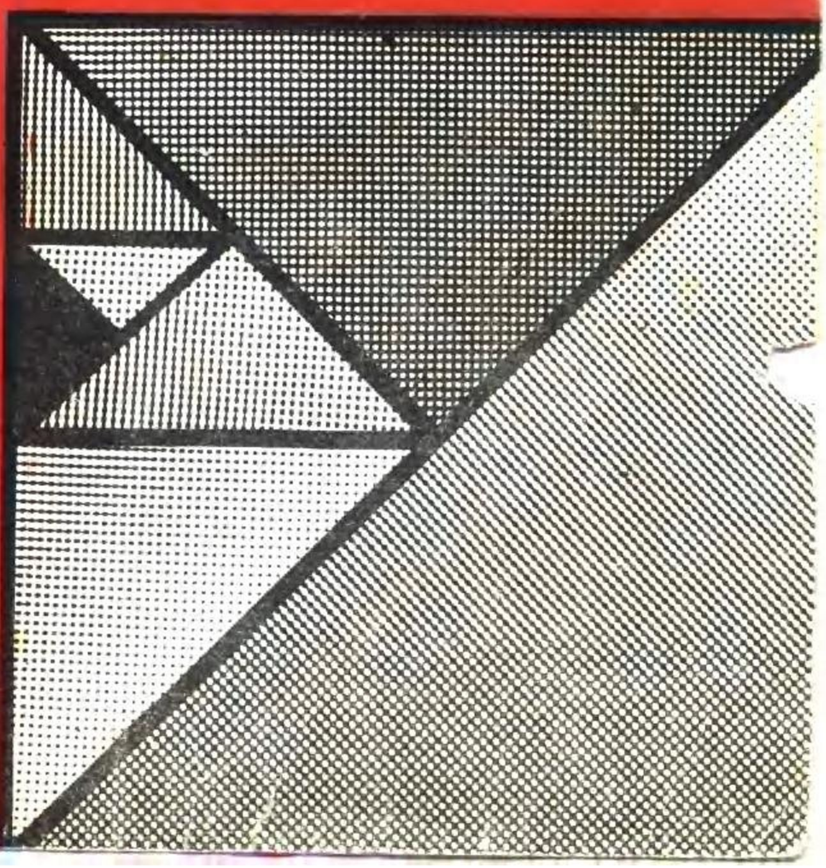
高等学校教材

(第二版)

第一册

郑维行 王声望 编

高等教育出版社



高等学校教材

实变函数与泛函分析概要

(第二版)

第一册

郑维行 王声望 编

高等教育出版社

本书第二版基本上保持了第一版简明、近代化、内容完备并便于教学的特色。此次修订时，作者增加了广义测度等内容，修正了某些错误或不妥之处，习题也有所增加，加大了使用本书的自由度。

全书分两册出版。第一册内容为实变函数部分，主要包括集论初步，可测集与可测函数，勒贝格积分论等。以勒贝格积分理论为重点，采用内外测度的方法，用简单函数的积分引进勒贝格积分。L^p空间专列一章，包括傅立叶变式，为过渡到第二篇提供典型的例子。

本书供综合大学数学、计算数学专业使用，高等师范院校数学系也可选用。

责任编辑　丁鹤龄

〔京〕　112号

高等学校教材

实变函数与泛函分析概要

（第二版）

第一册

郑维行　王声望　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

天津新华印刷四厂印装

*

开本850×1168　1/32　印张7.75　字数184 000

1980年1月第1版

1989年5月第2版　　1992年5月第4次印刷

印数8 222—13 492

ISBN 7-04-002107-2/O·749

定价 2.50 元

序　言

本教材是我们在南京大学数学系多年教学的基础上产生的，这次编写时又增加了若干新内容．全书共分两篇．第一篇介绍实变函数论，内容包括点集、测度与可测函数，L积分以及积分序列的极限的三大定理与傅比尼定理等．以勒贝格积分为重点，采用内、外测度的方法构造点集的测度，用简单函数的积分引进L积分，以期符合由浅入深、由特殊到一般的认识规律．L^p空间专列一章，其中还包括在应用上极为重要的傅立叶变式，为过渡到第二篇提供典型的例子．第二篇讲述泛函分析的一些基本内容．如距离空间、赋范线性空间、希尔伯特空间等概念，线性分析的几条基本定理，全连续算子的黎斯-邵德尔理论，完备内积空间中有界自伴算子的谱论初步．书中给出不少例子以说明基本概念．为了使学生了解本学科中抽象的必要性与应用的广泛性，我们曾作了一定的努力．鉴于本课程是一门重要基础课，在数学教学中具有承上启下的作用，所以我们安排了某些内容，如微分与积分、L积分与R积分的比较、压缩映象原理等，以便与数学分析、代数、方程等相联系；同时，还适当介绍了有关序集、抽象测度、LS积分概念、拓扑空间大意等内容，为感兴趣的读者进一步学习近代数学与近代物理打下基础．各章末均附有习题，以供教学时选用．

本教材是为综合大学数学系同名课程而试编的，估计一学年126学时左右可以讲完(主要内容)．如果只安排一学期72学时的，则可选用第一章到第六章的基本内容．进修班、高等师范院校也可参考使用．

教材初稿曾得到程其襄、严绍宗、王斯雷、张奠宙教授，徐荣权、俞致寿副教授等的细心审查与认真讨论，曾远荣、江泽坚、夏道行教授专门阅览了手稿，他们都提出了许多宝贵意见，编者基本上都采纳了；函数论教研室的马吉溥、苏维宜、任福贤、何泽霖、宋国柱、王巧玲、王崇祜、华茂芬等同志协助阅读手稿，并参加了部分修改工作. 编者在此谨对他们致以衷心的感谢. 由于我们水平所限，加之时间仓促，书中错误在所难免，希望专家与同志们多多给予指正。

编　者

1978年10月于南京

第二版 前 言

在修订第二版中，我们作了若干少量的补充并修正了某些错误．习题也作了增加．这样，在使用本书时选择的自由度就加大了．

程其襄教授再一次通阅全稿并提出许多宝贵意见，编者不胜感谢．

广大教师与读者热情来信指出本书中的一些缺点与疏漏之处，编者谨对他们表示谢意。

编　者

1986年1月于南京

目　　录

第　一　篇

第一篇

第一章　集与点集

数学分析中最重要的概念之一是黎曼(B.Riemann)积分，从黎曼积分的记号$\int_a^b f(x)\,dx$可以看出，它含有两个要素与一个运算，即被积函数$f(x)$、积分区间$[a,b]$与积分运算. 本篇的中心内容是勒贝格(H. Lebesgue)积分，它的记号是$\int_E f(x)dm$，这里$f(x)$是可测函数，E是欧几里得(Euclid)空间中可测集，不必是区间，而积分运算依赖于所考虑的测度m. 这是近代积分论中最重要的一种积分，讨论这种积分不仅是为了推广黎曼积分，而且是由于它本身在运算上的灵活性，这对进一步学习近代数学是十分必要的. 同时，我们可以看到，数学分析中的一些重要结果也从而得到较为精确的说明. 勒贝格积分理论的产生自有它的实际背景. 我们将按照集、可测集与可测函数、积分的顺序来讨论，把有关积分的各个环节逐一弄清，进而掌握积分的完整概念.

§1. 集及其运算

集或**集合**是数学中的一个基本概念. 本书所研究的集合，是指具有确定内容或适合一定条件的事物的全体. 对集合的这样的粗略理解不影响我们对本书主题的讨论，因而我们将不去谈集的

严格定义. 构成一个集的那些事物称为集的元或元素. 元与集的关系是个别与整体的关系. 例如, 一个圆周上的点的全体成一集, 它的元是点. 以实数为系数的多项式全体成一集, 它的元是实系数多项式. 书中恒约定, 对给定的集, 任一元要么属于它, 要么不属于它, 二者必居其一.

又如, 直线上的一切开区间(a,b)成一集(或称类), 这集的元是开区间, 实轴上满足$|\cos x|\geqslant 1/2$的点构成一集; $[0,1]$上一切连续函数构成一集, 等等.

本书常用拉丁文大写字母A,B等表示集, 用小写字母a,b等表示集的元.

现在我们引进有关集的一些简单概念或术语. 设A是一个集, a是它的元, 就写为$a\in A$, 读作a属于A, 它的意义与A含有a相同. 若元b不属于A, 写为$b\overline{\in}A$或$b\notin A$. 对于任何集A, 我们恒约定$A\overline{\in}A$, 即集A自身不能看成A的元.

若集A的元只有有限个, 称A为有限集. 不含任何元的集称为空集, 用记号$\varnothing$表示. 一个非空集, 如果不是有限集, 就称为无限集.

某些集之间可以有种种关系或性质. 最基本的关系要算"包含"与"相等". 设A,B是两个集, 若A的每个元都属于B, 称A是B的子集, 记成$A\subset B$或$B\supset A$, 分别读作A含于B或B包含A. 若$A\subset B$且存在一个元$x\in B$而$x\overline{\in}A$, 则称A是B的真子集。为方便起见, 规定空集$\varnothing$是任何集的子集. 若A,B是两个集, 若同时有$A\subset B$与$B\subset A$成立, 则称集合A与B相等, 记成$A=B$.

设给定一集A与一性质π. 用记号

$$\{a:a\in A,\ \pi(a)\}$$

表示A中一切具有性质π的元a所成的集, 有时简记成$A\{\pi(a)\}$. 例如, 上面提到的一个例子可以写成$A\{|\cos x|\geqslant 1/2\}$, 这里$A=$

$(-\infty, \infty)$. 关系式 $\{a: a\in A, \pi_1(a)\}\subset\{a: a\in A, \pi_2(a)\}$ 的意义是：由性质 $\pi_1(a)$ 可以推出性质 $\pi_2(a)(a\in A)$.

下面引进集的运算.

定义 1.1 设 A, B 是两个集. 由 A 中的元以及 B 中的元全体所成的集称为 A, B 的并, 记成 $A\cup B$(图 1)；就是说,

$$A\cup B=\{x: x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元所成的集称为 A 与 B 的交. 记成 $A\cap B$(图 2)；即

$$A\cap B=\{x: x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的那些元所成的集称为 A 与 B 的差, 记成 $A-B$(图 3). 当 $B\subset A$ 时, 差集又称为 B 关于 A 的补集, 记成 $\mathscr{C}_A B$. 并集与交集概念可以推广到任意个集的情形. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是一集族, 这里 I 是指标集, α 在 I 中取值, 那么它们的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha=\{a: \text{有某个 } \alpha\in I \text{ 使 } a\in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha=\{a: \text{对一切 } \alpha\in I \text{ 有 } a\in A_\alpha\}.$$

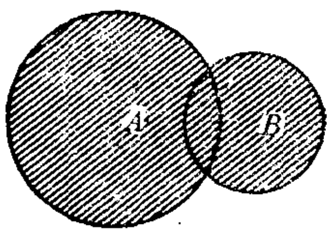


图 1 A∪B

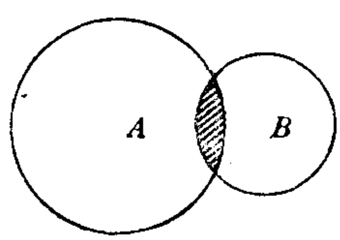


图 2 A∩B

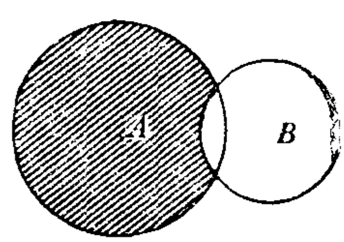


图 3 A—B

我们建立下列定理.

定理 1.1 对于集 E 与任意一集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, 恒有分配律成立：

$$E\cap\Big(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha).$$

证 $x\in E\cap(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha)$当且仅当$x\in E$且$x\in\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$或

$x\in E$且存在$\alpha_0\in I$使$x\in A_{\alpha_0}$.

上述论断等价于$x\in E\cap A_{\alpha_0}$(对某个α_0)从而等价于$x\in\bigcup_{\alpha\in I}(E\cap A_\alpha)$. 这证明了所欲证的等式成立。

当我们在研究一个问题时,如果所考虑的一切集都是X的子集,这时便称X为基本集. 例如限制在数直线上研究各种不同的点集,那么数直线是基本集. 对于任一基本集X, 差集$X-A$称为A关于X的补集或简称为A的补集,记成$\mathscr{C}A$.

定理 1.2 对于基本集X中的并集、交集的补集运算,有

(i) $\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$;

(ii) $\mathscr{C}(\bigcap_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$.

证 设$x\in\mathscr{C}(\bigcup A_\alpha)$, 则$x$不属于任何$A_\alpha$, 故$x$属于每个$A_\alpha$的补集$\mathscr{C}A_\alpha$,因此$x\in\bigcap(\mathscr{C}A_\alpha)$. 由此可见

$$\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)\subset\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha).$$

同理可证$\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha)\supset\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha)$. 这样(i)得证.

由(i)取补集得$\mathscr{C}(\mathscr{C}(\bigcup_\alpha A_\alpha))=\mathscr{C}(\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha))$, 即 $\bigcup_\alpha A_\alpha=\mathscr{C}(\bigcap_\alpha(\mathscr{C}A_\alpha))$, 再把$A_\alpha$换成$\mathscr{C}A_\alpha$, 即得(ii).

所证定理称为笛摩根(De Morgan)法则. 它提供一种对偶方法,能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去(参看后面的定理 3.3 与 3.5).

§2. 映射·集的对等·可列集

我们知道, 数学分析中所讲的函数可以看成是数集与数集之间的一种对应关系,或数集到数集的映射. 把函数概念一般化,得

到下面的定义.

定义 2.1 设 A, B 是两个非空集. 若依一定的法则 f, 对每个 $x\in A$, 在 B 中有一个确定的元 y 与之对应, 则称 f 是定义在 A 上而取值于 B 的映射, 记成 $f: A\to B$, 并将 x 与 y 的关系写成 $y=f(x)$. 这时称 A 为 f 的定义域,

$$f(A)=\{f(x): x\in A\}$$

为 f 的值域.

注意, 两个法则 f 与 g 的给出方式可能不同, 如果它们有同一效果, 即对一切 $x\in A$ 有 $f(x)=g(x)$, 则认为它们表示同一映射.

设给定映射 $f: A\to B$, 如果有 $B=f(A)$, 就是说, f 的象充满整个 B, 则说 f 是满射或映上的; 如果对每个 $y\in B$, 仅有唯一的 $x\in A$ 使 $f(x)=y$, 则说 f 有逆映射 f^{-1}, 它是定义在 $f(A)$上而取值于 A 上的满射. 当映射 $f: A\to f(A)$ 有逆映射时, 称 f 是一一映射.

设给定两个映射 $f: A\to B, g: B\to C$, 用记号 $g\circ f$ 表示 A 到 C 的映射, 由关系 $g\circ f(x)=g(f(x))(x\in A)$ 定义, 称为 f 与 g 的结合. 设 $B_0\subset B$, 用记号 $f^{-1}(B_0)$表示 B_0 在映射 f 下的原象, 即

$$f^{-1}(B_0)=\{x: x\in A, f(x)\in B_0\}.$$

容易验明, 若 $B_0\subset B, A_0\subset A$, 则一般有

$$f(f^{-1}(B_0))\subset B_0,\ f^{-1}(f(A_0))\supset A_0.$$

如果$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 A 的子集族, $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ 是 B 的子集族, 同样容易验证下列关系:

$$f(\bigcup_\alpha A_\alpha)=\bigcup_\alpha f(A_\alpha),\ f^{-1}(\bigcap_\alpha B_\alpha)=\bigcap_\alpha f^{-1}(B_\alpha).$$

今后我们常要用到集 E 的特征函数概念, 记成 $\chi_E(x)$, 它的定义是

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1, 若 x\in E,\\ 0, 若 x\overline{\in} E.\end{cases}$$

定义 2.2 设 A, B 为两个集，如果有一一映射 f 存在，使 $f(A)=B$,则称 A 与 B 成一一对应或互相对等，记成 $A\sim B$.

对等概念对于无限集的研究是十分重要的．关于对等，易见有下列性质：

(i) **自反性**．$A\sim A$;

(ii) **对称性**．若 $A\sim B$ 则 $B\sim A$;

(iii) **传递性**．若 $A\sim B$, $B\sim C$, 则 $A\sim C$.

由对等的定义可知，当两个有限集互相对等时，它们的元的个数必相同．至于无限集，采用元素个数一词就不适宜，但对等概念仍然可用．粗略地说，可以用对等概念对无限集的元的“个数”进行比较．

以后我们将用 $\mathbb{R}$ 表示实数集，$\mathbb{Q}$ 表示有理数集，$\mathbb{Z}$ 表示整数集，而 $\mathbb{N}$ 表示自然数集．在所有无限集中，$\mathbb{N}$ 是最简单的一个．任何一个集，若与 $\mathbb{N}$ 对等，就称为可列集．换句话说，可列集的一切元可用自然数编号，使之成为无穷序列的形式：$a_1, a_2\cdots, a_n, \cdots$．可以举出许多可列集的例子．例如全体正偶数集依 $2n\longleftrightarrow n$ 对应的方式与 $\mathbb{N}$ 成一一对应；$\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{N}$ 的对应方法如下：

$$0\longleftrightarrow 1,\ (-1)^{n+1}\left[\frac{n}{2}\right]\longleftrightarrow n, n=2,3,\cdots.$$

其中记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数．这样正偶数集与整数集均为可列集．

再举一个稍为复杂的例子：有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列的．其实，把非零有理数 r 写成既约分数的形式 $r=p/q$, 这里 $q>0$, $p\neq 0$, p, q 均为整数．称 $n=|p|+q$ 为 r 的“模”．现规定 0 的模为 1，很明显，模为 n 的有理数的个数是有限的．于是把一切有理数按模的

递增顺序编组，凡是模相同的编在同一组里，然后再依组的顺序把所有有理数逐个编号. 这样，每个有理数得到了一个确定的号码，因而建立了 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应，这证明了有理数集 $\mathbb{Q}$ 的可列性.

不难看出，可列集的子集至多是可列的. 由此推知，实直线 $\mathbb{R}$ 上任一类互不相交的开区间集必为可列集或有限集。其实，在每个区间中取一有理数与这个区间对应，则不同区间对应于不同的有理数，故所述开区间类与有理数的一子集对等，因而至多是可列的.

可以断言，可列集是无限集中“元素的个数最少”的一类集。这句话的精确含义由下列定理表出.

定理 2.1　任何无限集含有一个可列子集.

证　设 A 是任给无限集. 用归纳法，可作出 A 的子集列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，使每个 A_n 恰含 n 个元. 其实，因 $A\neq\varnothing$，可取出 $a_1\in A$，并令 $A_1=\{a_1\}$. 假定对任意自然数 n，用任何方式作出了 A 的子集 A_n，它有 n 个元，那么由于 $A-A_n$ 非空，可取 $a_{n+1}\in A-A_n$，令 $A_{n+1}=A_n\cup\{a_{n+1}\}$，则显见 A_{n+1} 是 A 的子集且含有 $n+1$ 个元. 由此可见，所述序列 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 存在. 现在对每个 $n\in\mathbb{N}$，令

$$B_n=A_{2^n}-\left(\bigcup_{k=0}^{n-1}A_{2^k}\right)。$$

那么，$\{B_n\}$ 是 A 中互不相交的子集类，并且看出，B_n 中元的个数不少于 $2^n-\sum\limits_{k=0}^{n-1}2^k=1$，故每个 B_n 非空。我们由每个 B_n 中取一个元构成一个集 B，则易见 B 是 A 的可列子集.

定理证完.

由所证定理可以推出下列事实：**凡无限集必与它的一个真子集对等**. 其实，设 A 是所给无限集，据定理 2.1，A 存在可列子集 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. 令 $B=A-\{a_1\}$，则 B 是 A 的真子集. 作下列对应：

$$a \longleftrightarrow a, \qquad \text{对 } a \in A - \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$a_k \longleftrightarrow a_{k+1}, \quad \text{对 } k = 1, 2, \cdots,$$

易见这是 A 与 B 之间的一一对应，因而 A 与它的一个真子集 B 对等. 所证事实是无限集的一个特征性质，因而也可作为无限集的定义.

定理 2.2 可列个可列集的并集是可列的.

证 设$\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$是可列集的可列类，把它们的元分别排列如下表：

$$\begin{array}{l}
A_1 = \{a_1^{(1)} \rightarrow a_2^{(1)} \quad a_3^{(1)} \rightarrow a_4^{(1)} \cdots\} \\
A_2 = \{a_1^{(2)} \quad a_2^{(2)} \quad a_3^{(2)} \quad a_4^{(2)} \cdots\} \\
A_3 = \{a_1^{(3)} \quad a_2^{(3)} \quad a_3^{(3)} \quad a_4^{(3)} \cdots\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
A_k = \{a_1^{(k)} \quad a_2^{(k)} \quad a_3^{(k)} \quad a_4^{(k)} \cdots\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

令 $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. 我们把 S 中的元如上表那样依箭头指向的顺序排列. 即先写 $a_1^{(1)}$，再写 $a_2^{(1)}$ 与 $a_1^{(2)}$，此时字母的上下附标之和等于 3；再写 $a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}$，此时字母上下附标之和等于 4；一般地，写到(在最大上标为奇数情形)

$$a_1^{(2k+1)}, a_2^{(2k)}, \cdots, a_{2k+1}^{(1)}$$

时，字母上下标之和为 $2k+2$，等等. 由此可以断定，S 与自然数集的一子集对等，并且 S 显然是无限集，故 S 为可列的.

由所证定理可知，有理数集是可列的.

下面定理表明不可列集是存在的.

定理 2.3 点集$[0, 1] = \{x : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$是不可列的.

证 用反证法. 假定[0, 1]可列, 把其中一切点编排为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots.$$

把闭区间[0, 1]三等分, 则显见[0, 1/3]与[2/3, 1]中至少有一个不含有 x_1, 用 I_1 表示任一这样的区间, 即 $x_1 \overline{\in} I_1$. 把 I_1 三等分, 在它们的左与右两个闭区间中必有一个不含有 x_2, 用 I_2 表示相应的区间, 即 $x_2 \overline{\in} I_2$. 同样把 I_2 三等分, 又可得不含有 x_3 的一个闭区间 I_3, 等等. 根据归纳法, 得到闭区间列 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 满足条件

(i) $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$;

(ii) $x_n \overline{\in} I_n, n \in \mathbb{N}$;

(iii) I_n 的长度为 3^{-n}, 它当 $n \to \infty$ 时趋于 0.

根据分析学中的区间套定理, 存在点 $\xi \in I_n, n \in \mathbb{N}$. 由于 $x_n \overline{\in} I_n$ 对任一 n 成立, 故 ξ 不会是任一 x_n, 但 ξ 显然属于[0, 1]. 发生矛盾, 这表明[0, 1]是不可列点集.

关于集的某些一般属性, 我们将在 §5 再作补充讨论.

§3. 一维开集、闭集及其性质

以下专门讨论欧几里得空间中的点集(简称点集), 这在数学分析中已有所了解. 前面两节中关于集的一般结果, 自然对点集也适用, 这里将进一步介绍点集所特有的一些性质. 由于一维欧几里得空间比较简单, 且具有自身的特性, 故先提出讨论。下面论述虽然在本质上对多维点集也适用, 但读者初学时, 不妨先从一维情形来理解, 以后再理解多维情形, 就不会发生困难了.

先引进点集的一些基本概念.

定义 3.1 设 E 为一维欧几里得空间 $\mathbb{R}$ 的任一子集, $a \in \mathbb{R}$. 含有 a 的任一开区间称为 *a 的邻域*. 对于 E 中一点 a, 如果存在 a 的某个邻域 (α, β) 整个含于 E 内, 这时 $a \in (\alpha, \beta) \subset E$, 则称 a 为