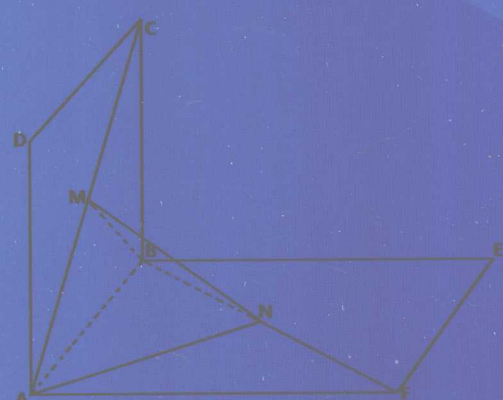
工科研究生数学类基础课程应用系列丛书

代数学基础

(下册)

杜现昆　马　晶　杨　柳　编



科学出版社

工科研究生数学类基础课程应用系列丛书

代数学基础

(下册)

杜现昆　马　晶　杨　柳　编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是为非数学专业的研究生编写的公共数学课程教材，分上、下两册：上册是矩阵论，下册是抽象代数学. 本册书在工科线性代数课程的基础上介绍群、环、域、模的基础知识以及范畴论的初步知识，内容适当，适合初学.

本书可作为理工科研究生抽象代数课程的教材，也可供其他学科领域的人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

代数学基础（下册）/杜现昆，马晶，杨柳编. —北京：科学出版社，2016.1
(工科研究生数学类基础课程应用系列丛书)
ISBN 978-7-03-045393-8

Ⅰ. ①代… Ⅱ. ①杜… ②马… ③杨… Ⅲ. ①高等代数-研究生-教材
Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 193612 号

责任编辑：张中兴 / 责任校对：张凤琴
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2016 年 1 月第　一　版　开本：720 × 1000 B5
2016 年 1 月第一次印刷　印张：10 1/2
字数：212 000

定价：29.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

“工科研究生数学类基础课程应用系列丛书”
编委会名单

序　言

“工科研究生数学类基础课程应用系列丛书”是根据教育部关于研究生培养指导规划和目标、结合当前研究生教育改革的实际情况，借鉴国内外研究生教育的最新研究成果，旨在规范和加强研究生公共基础课教学的一套研究生公共数学系列教材. 本系列教材经过对研究生公共数学课程整合、优化，共编写教材 13 册，具体包括:《现代分析基础》(上、下册)、《代数学基础》(上、下册)、《现代统计学基础》(上、下册)、《现代微分方程概论》(上、下册)、《现代计算方法》(上、下册)、《现代优化理论与方法》(上、下册)、《应用泛函分析》. 其中上册为非数学类硕士研究生教材，下册为非数学类博士研究生教材.

本套丛书的编写体现了时代的特征，本着加强基础、淡化证明、强调应用的原则，力争做到科学性、系统性和实用性的统一，着眼于传授教学知识和培养学生数学素养的高度结合.

本套丛书吸取国内外同类教材的精华，参考近年来出版的一些新教材，结合当前研究生公共数学教学改革的实际，特别是综合性大学非数学类研究生公共数学的实际需求.

本套丛书体例科学、结构合理、内容经典而追求创新，既是作者多年教学经验的总结，又是作者长期教学研究和科学研究成果的体现. 每章后面配备巩固基本概念、基本理论、基本运算的基本题目，又有提高学生抽象思维、逻辑推理和综合运用基础知识解题的提高题目，为学生掌握教材基本内容，运用教材基本知识开发创新思维提供了可行条件.

本套丛书适用面广、涉及专业全、教学内容新，可作为综合性大学非数学专业研究生公共数学教材和教学参考书，在教材体系与内容的编排上认真考虑不同专业，不同学时的授课对象的需求，可选择不同的教学模块，以满足广大读者的实际需要.

本套丛书的编写过程中，得到了吉林大学研究生院、吉林大学数学学院和数学研究所的大力支持，也得到了科学出版社的领导和编辑的鼎力帮助，在此一并致谢.

由于编者水平有限，书中的不妥之处在所难免，恳请广大读者批评指正，以期不断完善.

丛书编委会
2015 年 3 月于长春

前 言

代数学是数学的一个重要而基本的分支, 历史悠久, 体系庞杂, 是一种有力的数学语言和工具, 在数学以及科学技术领域中都有着重要的应用. 本书是为非数学专业的研究生编写的公共数学课程教材, 分上、下两册: 上册是矩阵论, 下册是抽象代数学. 矩阵论和抽象代数学可以分别看成是线性代数在技术和理论方面的延伸.

抽象代数学是于 20 世纪初发展起来的, 主要研究各种代数系统 —— 带有运算的集合. 本册书在工科线性代数课程的基础上介绍群、环、域、模的基础知识以及范畴的初步知识. 主要目的有两个, 一是为读者进一步学习代数学知识提供必要的基础, 二是使读者能高观点地理解所学过的线性代数知识. 本册书的内容是抽象代数学的入门知识, 本册书对几乎所有基础性的结论都给出严格的证明 (但省略一些直接的验证), 并且尽可能地保证语言表达的规范性和严谨性. 编者认为, 只有理解和掌握规范的数学语言, 才能在学习和应用代数学知识的道路上走得更远.

本书共 6 章. 第 1 章是预备知识, 以集合论知识为基础, 介绍集合、映射、关系、运算的一些记号和基本性质, 这是学习抽象代数学必须了解的现代数学语言. 第 2 章主要介绍群的基础知识: 群的定义和例子、子群、商群、群同态、同态基本定理、同构定理、直积以及几种特殊的群 (循环群、有限阿贝尔群、置换群、自由群). 第 3 章主要介绍环的基础知识: 环的定义和例子、子环、理想、商环、同态、同态基本定理、同构定理、直积、多项式环以及整环的分式域和唯一分解整环. 本册书有意将群和环的内容安排得很平行, 以便通过类比加深理解. 第 4 章的内容是域的基础知识: 素域、单扩张、有限扩张、代数扩张、多项式的分裂域、有限域. 第 5 章介绍模的基础知识: 模的定义和例子、子模、商模、同态、同态基本定理、同构定理、直积、自由模. 因为范畴论是比集合–映射概括性更强、更现代的数学语言, 所以第 6 章还介绍范畴论的三个基本概念: 范畴、函子、自然变换.

本书在每一节后配有习题. 感谢白兰、杨行、李月月、李霞、孙成侠在本书的编写过程中所给予的帮助, 感谢田海峰演算了书中的所有习题, 感谢本书编辑张中兴的热情及辛勤工作.

由于编者水平所限, 书中难免不妥之处, 敬请读者指正.

编 者

2014 年 9 月

目　录

第 1 章　预 备 知 识

集合论是现代数学的基础, 抽象代数学是以集合论为基础的典型数学分支. 本章主要介绍以后要用到的集合论的一些知识: 集合、映射、关系、运算. 假设读者已经掌握中学所学的集合论知识, 知道集合、元素、子集、包含、交、并、余集、空集等概念和一些基本事实.

1.1　集合与映射

首先规定一些记号: $\mathbf{N}$ 表示非负整数集; $\mathbf{Z}$ 表示整数集; $\mathbf{Q}$ 表示有理数集; $\mathbf{R}$ 表示实数集; $\mathbf{C}$ 表示复数集; $\varnothing$ 表示空集.

设 F 是数域, 则 F^* 表示 F 中非零元素之集. 例如, $\mathbf{Q}^*$ 表示非零有理数集合; $\mathbf{R}^*$ 表示非零实数集合; $\mathbf{C}^*$ 表示非零复数集合.

要注意, 如果想使用自然数这个术语, 应该声明 0 是不是自然数.

设 X 是一个集合, X 的所有子集构成的集合称为 X 的**幂集**, 记为 2^X. 例如, 当 $X=\varnothing$ 时, 幂集 $2^X=\{\varnothing\}$; 当 $X=\{a\}$ 时, 幂集 $2^X=\{\varnothing,X\}$; 当 $X=\{a,b\}$ 时, 幂集 $2^X=\{\varnothing,\{a\},\{b\},X\}$. 这里要注意 $\varnothing$ 和 $\{\varnothing\}$ 的区别, 前者表示空集, 它没有元素, 而后者表示以空集为元素的集合, 它含有一个元素 —— 空集 $\varnothing$.

若 X 含 n 个元素, 则幂集 2^X 含 2^n 个元素.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 都是集合, $x_i\in X_i$, $i=1,2,\cdots,n$, 把 $(x_1,\cdots,x_n)$ 称为 n **元组**, 并规定两个 n 元组 $(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $(y_1,\cdots,y_n)$ 相等当且仅当 $x_1=y_1,\cdots,x_n=y_n$. 显然, n 元组是数域上 n 维行向量的推广.

设 X_1,X_2 是两个非空集合, 定义 $X_1\times X_2=\{(x_1,x_2)\mid x_1\in X_1,\ x_2\in X_2\}$, 称为 X_1 和 X_2 的**笛卡儿积**.

一般地, 集合 $X_1,\cdots,X_n$ 的**笛卡儿积**定义为

$$X_1\times\cdots\times X_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in X_i,\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

通常把 n 个 X 的笛卡儿积记为 X^n, 即

$$X^n=\underbrace{X\times\cdots\times X}_{n\text{个}}.$$

对于有限集合 X, 用 $|X|$ 表示 X 中元素的个数, 则有

(1) $|2^X| = 2^{|X|}$;

(2) $|X_1 \times \cdots \times X_n| = |X_1| \cdots |X_n|$.

如果 X 是一组互不相交的子集的并集 (这样的并集称为不交并), 就称这组子集是 X 的一个**划分**.

若 X 是有限集合, $X_1, \cdots, X_n$ 是 X 的一个划分, 则

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_n, \quad X_i \cap X_j = \varnothing, \ \forall i \neq j.$$

于是, $|X| = |X_1| + \cdots + |X_n|$.

在现代数学中, 对象之间的关系非常重要, 这样的关系通常用映射来描述. 现在回想一下映射的概念.

定义 1.1.1 设 X, Y 是两个非空集合, f 是一个对应关系, 使得对于每个 $x \in X$ 都有唯一的 $y \in Y$ 与之对应, 则称 $f: X \to Y$ 为 X 到 Y 的**映射**, 简称 f 是 X 到 Y 的映射. X 称为 f 的**定义域**或**始集**, Y 称为 f 的**终集**.

集合到数集的映射通常称为**函数**. 微积分中的函数都是特殊的映射.

设 f 是 X 到 Y 的对应关系, 如果 $x \in X$ 与 $y \in Y$ 对应, 则记为 $y = f(x)$ 或 $x \mapsto y$.

例如, 正弦函数的对应关系可表示成 $x \mapsto \sin x$.

设 f 是 X 到 Y 的对应关系, 为了说明 f 是映射, 需要 (且只需) 验证 f 具有如下两个性质.

(1) 遍历性: X 的每个元素都对应 Y 中的某个元素;

(2) 定义合理性: 当 $x_1 = x_2$ 时, 必有 $f(x_1) = f(x_2)$.

显然, 定义合理性是为了保证映射的对应关系必须是 "多对一" 或 "一对一", 而不能是 "一对多", 即对应关系必须是 "单值的". 在大多数情况下, 定义合理性是比较明显的. 但当定义域 X 中同一元素有多种表现形式时(如 $\frac{1}{2}$ 也可表示成 $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ 等), 要说明一个对应关系 f 定义了一个映射就必须说明 $f(x)$ 与 x 的表现形式无关, 也即 f 是定义合理的.

例 1.1.1 设 f 表示 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Q}$ 的对应关系 $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, 则 f 没有遍历性 (因 $f(1)$ 不存在), 故 f 不是映射.

例 1.1.2 设 f 表示 $\mathbf{Q}$ 到 $\mathbf{Q}$ 的对应关系 $\dfrac{a}{b} \mapsto a + b$, 则 f 不具定义合理性, 故 f 不是映射. 实际上, 虽然 $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$, 但

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3, \quad f\left(\frac{2}{4}\right) = 6.$$

例 1.1.3 设 $\mathbf{Q}^*$ 表示非零有理数之集, f 表示 $\mathbf{Q}^*$ 到 $\mathbf{Q}$ 的对应关系 $\dfrac{a}{b} \mapsto \dfrac{b}{a}$,

则 f 是映射. 实际上, f 显然是遍历的, 并且当 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\in\mathbf{Q}^*$ 时, 必有 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{d}{c}$, 从而 $f\left(\dfrac{a}{b}\right)=f\left(\dfrac{c}{d}\right)$, 故 f 是定义合理的.

例 1.1.4 设 X 是非空集合, 则对应关系 $x\mapsto x$ 是 X 到 X 的映射, 称为 X 上的**恒等映射**, 通常用 1_X 来表示, 即 $1_X(x)=x,\ x\in X$.

集合 X 到其自身的映射也称为 X 的**变换**. 例如, X 上的恒等映射 1_X 就是 X 的一个变换, 所以恒等映射也称为**恒等变换**.

定义 1.1.2 设 f,g 都是 X 到 Y 的映射, 如果对于任意的 $x\in X$ 都有 $f(x)=g(x)$, 则称 f 和 g**相等**, 记为 $f=g$.

需要强调的是, 只有两个同为 X 到 Y 的映射才有相等之说.

例 1.1.5 设 $X=\{0,1\}$. 定义 $f(x)=x,\ g(x)=x^2,\ h(x)=\sin\dfrac{\pi x}{2}$, 则 f,g,h 都是 X 到 X 的映射, 并且

$$\begin{aligned}
&f(0)=0,\quad f(1)=1;\\
&g(0)=0,\quad g(1)=1;\\
&h(0)=0,\quad h(1)=1.
\end{aligned}$$

因此, f,g,h 全相等.

例 1.1.6 考虑下列映射

$$\begin{aligned}
&f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin x,\\
&g:\mathbf{R}\to[-1,1],\ g(x)=\sin x,\\
&h:[0,2\pi]\to[-1,1],\ h(x)=\sin x.
\end{aligned}$$

这三个映射互不相等, 因为它们不满足定义中的前提条件.

定义 1.1.3 设 $f:X\to Y$ 是一个映射.

(1) 对于 X 的非空子集 X_0, 令 $f(X_0)=\{f(x)\mid x\in X_0\}$, 称为 X_0 的**像**. 特别地, X 的像 $f(X)$ 也称为 f 的**像**, 记为 $\operatorname{im} f$.

(2) 对于 Y 的非空子集 Y_0, 令 $f^{-1}(Y_0)=\{x\in X\mid f(x)\in Y_0\}$, 称为 Y_0 关于 f 的**原像**.

对于映射 $f:X\to Y$, X 的非空子集的像总是非空的, 但 Y 的非空子集的原像未必非空.

对于函数 f, 它的像 $\operatorname{im} f$ 其实就是通常所说的**值域**.

例 1.1.7 设 $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R},\ f(x)=\sin x$, 则

$$\begin{aligned}
&f([0,\pi])=[0,1],\\
&\operatorname{im} f=f([0,+\infty))=[-1,1],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&f^{-1}(0)=\{k\pi \mid k\in \mathbf{Z}\},\\
&f^{-1}([0,1])=\bigcup_{k=0}^{\infty}\left[2k\pi,\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\right],\\
&f^{-1}([2,3])=\varnothing,
\end{aligned}
$$

其中 $[a,b]$ 表示区间.

像函数一样, 映射也有复合的概念.

定义 1.1.4　对于映射 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, 定义 $h(x)=g\big(f(x)\big)$, $x\in X$, 则 h 是 X 到 Z 的映射, 称为 f 与 g 的**复合**, 记为 $h=gf$ 或 $h=g\circ f$, 即

$$gf(x)=g\big(f(x)\big),\quad x\in X.$$

要注意微积分中函数复合与此处映射复合之间的区别. 在微积分中, 只要 f 的值域 (即像) 包含于 g 的定义域, gf 就有意义; 而对于映射, f 的终集和 g 的定义域必须相同 gf 才有意义. 映射复合的要求比函数复合更强. 应当在不同课程中, 使用不同的定义.

例 1.1.8　设 $\mathbf{R}^n$ 表示实 n 元列之集. 对于任意一个 $m\times n$ 实矩阵 A, 可以定义一个映射 $f_A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, $f_A(\alpha)=A\alpha$. 对于一个 $p\times q$ 实矩阵 B, 可以类似地定义映射 $f_B:\mathbf{R}^q\to\mathbf{R}^p$. 显然, $f_A\circ f_B$ 有意义当且仅当 $n=p$, 即 AB 有意义. 进一步, 当 $n=p$ 时, 直接验证可知 $f_A\circ f_B=f_{AB}$.

这个例子表明, 一般地, "f 与 g 的复合" 和 "g 与 f 的复合" 是不同的.

命题 1.1.1　设 $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$, $h: Z\to W$, 则

(1) $(hg)f=h(gf)$;

(2) $f1_X=1_Yf=f$.

证明　只证明 (1). 显然, $(hg)f$ 和 $h(gf)$ 都是 X 到 W 的映射, 并且对任意 $x\in X$ 有

$$(hg)f(x)=h\big(g(f(x))\big)=h\big(gf(x)\big)=h(gf)(x),$$

故 $(hg)f=h(gf)$. □

就像初等几何中经常要画图一样, 常用图来表示映射的关系, 如图 1-1 和图 1-2 所示.

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
 & Z
\end{tikzcd}
$$

图 1-1

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f'"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
Y' \arrow[r, "g'"] & Z
\end{tikzcd}
$$

图 1-2

其中 X, Y, Y', Z 都是集合, f, f', g, g', h 都是映射. 这种图也称为**图表**. 如果 $h=gf$, 则称图 1-1 是**交换的**. 如果 $gf=g'f'$, 则称图 1-2 是**交换的**.

上面的三角形的图和方形的图是集合与映射的两种基本类型的图, 其他的图基本上都是这两类图的组合.

根据映射的定义, 其对应关系必须是遍历的 (即 X 的每个元素都必须和 Y 中的某个元素对应), 但反过来并不要求 Y 的每个元素与 X 的元素对应; 另一方面, 对应关系不能是 "一对多", 可以是 "多对一", 但不必是 "一对一".

定义 1.1.5 设有映射 $f: X \to Y$.

(1) 称 f 是**满射**,是指对于任意的 $y \in Y$, 必有 $x \in X$, 使得 $y = f(x)$, 即 Y 中每个元素都是 X 中某个元素的像.

(2) 称 f 是**单射**, 是指对于任意的 $x_1, x_2 \in X$, 当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时, 必有 $x_1 = x_2$, 即 f 是一对一的.

(3) 称 f 是**双射**, 是指它既是单射又是满射. 双射也称为**一一对应**.

从定义立即可以看出, $f: X \to Y$ 是满射当且仅当 $f(X) = Y$.

例 1.1.9 (1) 设 $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = |x|$, 则 f 既不是满射 (因为 -1 不是任何元素的像), 也不是单射 (因为 $f(-1) = f(1)$).

(2) 设 $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{N}$, $f(x) = |x|$, 则 f 是满射. 但 f 不是单射, 因为 $f(1) = f(-1)$.

(3) 设 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $f(x) = x$, 则 f 是单射. 但 f 不是满射, 因为 -1 不是任何元素的像.

(4) 设 $f: \mathbf{Z} \to \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\}$, $f(x) = 2x$, 则 f 是双射.

(5) 恒等映射是双射.

(6) 微积分中的严格单调函数都是单射.

例 1.1.10 设 $X \subseteq Y$, 定义 $i: X \to Y$, $i(x) = x$, 则 i 是单射, 称为**包含映射**.

设 $M_{m\times n}(F)$ 表示数域 F 上 $m \times n$ 矩阵之集.

例 1.1.11 令 $f: M_{m\times n}(F) \to M_{n\times m}(F)$, $f(A) = A^{\mathrm{T}}$, 其中 A^{T} 表示 A 的转置, 则 f 是双射.

类似于反函数, 关于映射也有逆映射的概念, 它是反函数概念的推广. 此外, 可逆映射也可以与可逆矩阵相类比.

定义 1.1.6 设有映射 $f: X \to Y$.

(1) 若有映射 $g: Y \to X$ 使得 $fg = 1_Y$, 就称 f **右可逆**, g 是 f 的一个**右逆**.

(2) 若有映射 $g: Y \to X$ 使得 $gf = 1_X$, 就称 f**左可逆**, g 是 f 的一个**左逆**.

(3) 若有映射 $g: Y \to X$ 使得 $gf = 1_X$, $fg = 1_Y$, 就称 f 是**可逆映射**.

下面的引理说明可逆映射 f 有唯一的左逆和右逆, 并且左逆和右逆是相同的, 称为 f 的**逆**, 记为 f^{-1}.

引理 1.1.1 若一个映射 f 既有左逆又有右逆, 则任意的左逆和右逆都相等, 且等于 f 的逆. 特别地, 可逆映射的逆是唯一的.

证明　设 $f: X \to Y$ 有左逆 g 和右逆 h, 则 $gf = 1_X$, $fh = 1_Y$, 从而

$$g = g1_Y = g(fh) = (gf)h = 1_X h = h. \qquad \square$$

命题 1.1.2　*可逆映射 f 的逆映射 f^{-1} 仍为可逆映射; 两个可逆映射 f, g 的复合映射 gf 仍为可逆映射. 进一步,*

$$(f^{-1})^{-1} = f, \quad (gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}.$$

证明　只证明第二个等式. 设 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$. 因为

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(ff^{-1})g^{-1} = g1_Y g^{-1} = gg^{-1} = 1_Z,$$
$$(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1}g)f = f^{-1}1_Y f = f^{-1}f = 1_X,$$

所以 $(gf)^{-1} = f^{-1}g^{-1}$. $\square$

命题 1.1.3　*设有映射 $f: X \to Y$.*

(1) f 右可逆当且仅当 f 是满射;

(2) f 左可逆当且仅当 f 是单射;

(3) f 可逆当且仅当 f 是双射.

证明　(1) 必要性. 设 f 有右逆 h, 则 $fh = 1_Y$. 对于任意 $y \in Y$, 记 $h(y) = x$, 则有 $f(x) = fh(y) = 1_Y(y) = y$, 所以 f 是满射.

充分性. 设 f 是满射, 则对于每个 $y \in Y$, 都可取定一个 $x_y \in X$ 使得 $f(x_y) = y$. 定义映射 $h: Y \to X$, $y \mapsto x_y$, 则对任意 $y \in Y$ 都有

$$fh(y) = f(h(y)) = f(x_y) = y,$$

所以 $fh = 1_Y$, 即 h 是 f 的右逆.

(2) 必要性. 设 f 有左逆 g, 则 $gf = 1_X$. 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则两边用 g 作用可得 $gf(x_1) = gf(x_2)$, 即 $1_X(x_1) = 1_X(x_2)$, 从而 $x_1 = x_2$, 所以 f 是单射.

充分性. 设 f 是单射, 则对于任意 $y \in f(X)$, 其原像 $f^{-1}(y)$ 只包含一个元素 y'. 在 X 中任意取定一个元素 a. 定义 Y 到 X 的对应关系 g 如下:

$$g(y) = \begin{cases} y', & y \in f(X), \\ a, & y \in Y \backslash f(X). \end{cases}$$

显然, g 是 Y 到 X 的映射. 因为 f 是单射, 所以对于任意 $x \in X$, 有

$$gf(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x.$$

于是, $gf = 1_X$, 即 g 是 f 的左逆.

(3) 由 (1), (2) 和引理 1.1.1 立即可得. $\square$

要注意的是, 若 f 只有左逆或者只有右逆, 则 f 未必可逆. 左逆和右逆一般不是唯一的.

另外还要注意, 对于一般的映射 f, 原像记号 $f^{-1}(y)$ 整体才有意义, 其中的 f^{-1} 是没有意义的, 不能单独使用, 更不能把它理解为 f 的逆映射. 但若 f 是可逆的, 则原像 $f^{-1}(y)$ 中的 f^{-1} 可以理解成 f 的逆, 而 $f^{-1}(y)$ 也可以理解成 y 在 f^{-1} 下的像.

推论 1.1.1 对于有限集上的变换, 满射、单射、双射、右可逆、左可逆、可逆这些概念都是等价的.

证明 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, f 是 X 的变换, 则 $f(X)\subseteq X$. 只需证明 f 是满射当且仅当 f 是单射. 如果 f 是满射, 则 $f(X)=X$, 从而 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 必定互不相同, 故 f 是单射. 反过来, 设 f 是单射, 则 $f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)$ 互不相同, 从而 $f(X)$ 是 X 的含有 n 个元素的子集, 故必有 $f(X)=X$, 即 f 是满射. □

习 题 1.1

1. 说明集合 N 与集合 $\{N\}$ 的区别.

2. 设 X,Y 是两个有限集合. 证明: $|X\cup Y|=|X|+|Y|-|X\cap Y|$.

3. 对于两个集合 X 和 Y, 定义 $Y\setminus X=\{y\mid y\in Y,\ y\notin X\}$. 对于集合 A,B,C, 证明德・摩根律:

$$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C),\quad A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C).$$

4. 设 $X=\{1,2,3,4,5\}$, $Y=\{0,2,4,6,8,10\}$.

(1) 给出 X 到 Y 的一个单射; X 到 Y 的映射能不能是满射?

(2) 给出 Y 到 X 的一个满射; Y 到 X 的映射能不能是单射?

5. 设 $f:X\to Y$, $S_1,S_2\subseteq X$. 证明:

$$f(S_1\cap S_2)\subseteq f(S_1)\cap f(S_2),\quad f(S_1\cup S_2)=f(S_1)\cup f(S_2).$$

举例说明左边的包含关系可以是真包含.

6. 设 $M_n(F)$ 表示数域 F 上全体 n 阶矩阵构成的集合, 则 $\varphi:A\mapsto\det(A)$ 是否为 $M_n(F)$ 到 F 的一个映射? 其中 $\det(A)$ 表示 A 的行列式. 进一步, φ 是否为满射或单射?

7. 设 F 是数域, F^n 表示 F 上的 n 元列之集. 取定 F 上的一个 $m\times n$ 矩阵 A, 定义 $f_A:F^n\to F^m$, $f_A(\alpha)=A\alpha$. 证明:

(1) f_A 是单射当且仅当 A 的秩等于 n;

(2) f_A 是满射当且仅当 A 的秩等于 m;

(3) f_A 是双射当且仅当 $m=n$, 并且 A 是可逆矩阵.

8. 设 h 是集合 X 到其自身的映射, 并且对于任意集合 Y 以及任意映射 $f:X\to Y$ (或 $g:Y\to X$), 都有

$$f\circ h=f\ (\text{或 } h\circ g=g),$$

证明: h 是 X 上的恒等映射.

9. 设 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to Z$ 为两个映射. 证明:

(1) 若 f, g 都是单射, 则 gf 是单射; 反之, 若 gf 是单射, 则 f 是单射;

(2) 若 f, g 都是满射, 则 gf 是满射; 反之, 若 gf 是满射, 则 g 是满射.

10. 设有两个映射 $f: X \to Y$ 与 $g: Y \to X$, 若 fg 与 gf 都是双射, 则 f 和 g 都是双射. 举例说明, 如果只有 fg 是双射, 则 f 未必是双射.

11. 设 $f: X \to Y$ 是映射, 证明:

(1) f 是单射当且仅当 f 是左可消去的, 即对于任意映射 $g: U \to X$ 和 $h: U \to X$, 只要 $fg = fh$, 必有 $g = h$;

(2) f 是满射当且仅当 f 是右可消去的, 即对于任意映射 $g: Y \to Z$ 和 $h: Y \to Z$, 只要 $gf = hf$, 必有 $g = h$.

12. 证明: 每个映射都等于一个单射与一个满射的复合.

13. 设 X, Y 都是有限集合, 证明:

(1) $|X| \leqslant |Y|$ 当且仅当存在一个 X 到 Y 的单射, 当且仅当存在一个 Y 到 X 的满射;

(2) $|X| = |Y|$ 当且仅当存在一个 X 到 Y 的双射.

1.2 关 系

我们经常需要研究对象之间的关系. 例如, n 阶矩阵之间的相似关系, 正整数之间的整除关系等. 这些关系实质上就是一个规则, 使得任意两个对象要么适合这个规则, 要么不适合这个规则. 比如, 两个矩阵要么相似, 要么不相似. 但是, "好朋友" 就不是这样的关系, 因为 "好朋友" 是一个比较模糊的概念, 没有一个明确的标准来判断任意两个人是不是好朋友.

现在考虑一般集合上的关系.

定义 1.2.1 *设 X 是非空集合, X 上的 (二元) 关系就是一种规则 R, 使得对于 X 的任意一对元素 a, b 都可以确定 a 和 b 是否适合规则 R. 当 a, b 适合 R 时, 就说 a, b 具有***关系***R, 记为 aRb.*

例如, 在 n 阶矩阵集合上, 相等是一个关系, 相似也是一个关系. 又如, 在整数集合上, $>$ 和 $\leqslant$ 都是关系.

例 1.2.1 *设 $a, b \in \mathbf{Z}$, 如果有 $c \in \mathbf{Z}$ 使得 $a = bc$, 则称 b 整除 a, 记为 $b|a$. 整除 $|$ 是 $\mathbf{Z}$ 上的一个关系.*

设 R 是 X 上的一个关系, 则 R 确定了 $X \times X$ 的一个子集

$$\{(a, b) \mid a, b \in A,\ aRb\},$$

这个子集称为 R 的图像. 反过来, $X \times X$ 的一个子集 S 也确定一个二元关系 R, 其定义为: $aRb \Leftrightarrow (a, b) \in S$. 这样, X 上的二元关系就和 $X \times X$ 的子集一一对应 (犹

如函数与图像之间的对应). 因此, 通常直接把图像称为二元关系, 这样就可以给出下面的比定义 1.2.1 更严格的定义.

定义 1.2.2 设 X 是非空集合, 则 $X \times X$ 的一个子集称为 X 上的一个**二元关系**, 简称为**关系**.

这个定义要比前面的定义 1.2.1 使用起来更方便. 例如, 利用这个定义容易讨论关系的大小、交、并等.

应当注意, $X \times X$ 的空子集是 X 上的关系, 称为空关系, 它等价于 X 中任意两个元素都没有这种关系. 另一个极端的情况是, $X \times X$ 本身也是 X 上的关系, 称为全关系, 它等价于 X 中任意两个元素都有这种关系.

例 1.2.2 在实数集合 $\mathbf{R}$ 上, 通常的 $\leqslant$ 是二元关系, 其图像为

$$\{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{R},\ a \leqslant b\}.$$

例 1.2.3 在整数集合 $\mathbf{Z}$ 上整除关系就是 $\{(a,b) \mid a,b \in \mathbf{Z},\ a|b\}$.

例 1.2.4 设 X 是非空集合, 则 $\{(a,a) \mid a \in X\}$ 所定义的二元关系就是相等关系.

下面介绍两个重要的关系: 等价关系和偏序关系.

首先介绍等价关系.

定义 1.2.3 设 $\sim$ 是集合 X 上的二元关系, 并且具有如下性质:

(1) 反身性: 对任何 $a \in X$ 都有 $a \sim a$;

(2) 对称性: 若 $a \sim b$, 则 $b \sim a$;

(3) 传递性: 若 $a \sim b$, $b \sim c$, 则 $a \sim c$.

则称 $\sim$ 为 X 上的**等价关系**.

例如, 相等关系 “=” 是等价关系. 每个等价关系都包含相等关系, 所以等价关系是相等关系的一种推广.

例 1.2.5 (1) 设 $F[x]$ 表示数域 F 上的多项式之集. 对于任意 $f(x), g(x) \in F[x]$, 规定 $f(x) \sim g(x)$ 当且仅当它们互相整除, 则 $\sim$ 是 $F[x]$ 上的等价关系.

(2) 对于映射 $f: X \to Y$, 定义

$$\sim_f = \{(x_1,x_2) \in X \times X \mid f(x_1) = f(x_2)\}.$$

容易验证这是 X 上的等价关系, 称为 f 诱导的等价关系. 进一步, f 是单射当且仅当 $\sim_f$ 是相等关系.

给定集合 X 上的一个等价关系 $\sim$. 一个**等价类**就是由互相等价的元素所组成的集合, 即两个元素等价当且仅当它们属于同一个等价类. 由所有等价类构成的集合, 称为 X 的**商集**, 记为 $X/\sim$. 注意, 在 X 中看, 一个等价类是一个子集, 而在商集 $X/\sim$ 中看, 一个等价类就是一个元素.