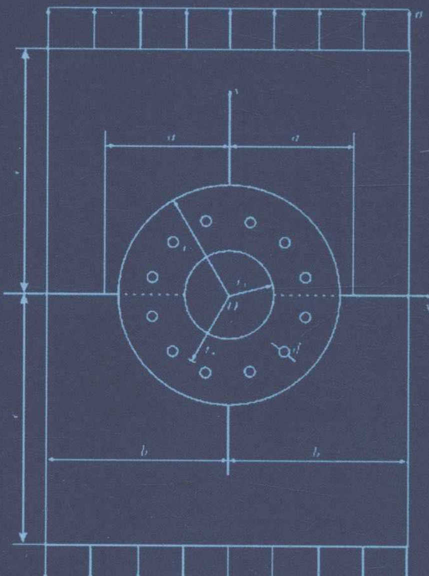
THE METHODS OF SOLUTIONS FOR
STRESS INTENSITY FACTOR IN
FRACTURE MECHANICS

断裂力学中
应力强度因子的解法

（上册）

张行 著



科学出版社

断裂力学中应力强度因子的解法
（上册）

张 行 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书是作者在从事断裂力学应力强度因子解法研究工作的成果基础上写成的。全书共21章，内容可分为三类。第一类是二维与三维的应力强度因子解析——变分解法。第二类是三维应力强度因子能量差率闭合解法。第三类则是二维与三维应力强度因子的广义刚度导数解法以及广义守恒积分解法。前两类内容是作者首创的，后一类内容是作者对已有方法的进一步发展。本书所提供的方法均具有计算效率高以及适用范围广的特点。第一类内容见于本书上册；第二、三类内容载于下册。

本书读者对象为固体力学、飞行器、车辆、地面设施、船舶与离岸结构设计等方面的研究生、教师、工程师与研究人员。

图书在版编目（CIP）数据

断裂力学中应力强度因子的解法（上册）/张行著. —北京：科学出版社，2016.12

ISBN 978-7-03-051351-9

Ⅰ.①断… Ⅱ.①张… Ⅲ.①断裂力学－应力强度因子－问题解答 Ⅳ.①O346.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第001092号

责任编辑：赵敬伟 / 责任校对：邹慧卿

责任印制：张 伟 / 封面设计：耕者工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年1月第 一 版 开本：720×1000 B5

2017年1月第一次印刷 印张：13 1/2

字数：272 000

定价：79.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

断裂力学是研究含裂纹构件强度与寿命的一门固体力学新分支，是结构损伤容限设计的理论基础。断裂力学可分为线弹性断裂力学与弹塑性断裂力学两大类别，前者适用于裂纹尖端附近小范围屈服的情况；后者适用于裂纹尖端附近大范围屈服的情况。就目前情况而言，弹塑性断裂力学发展很快，但是线弹性断裂力学在结构损伤容限设计中仍居重要地位。

在线弹性断裂力学中，最重要的力学参量是应力强度因子，它是裂纹扩展的驱动力，控制着裂纹尖端附近的应力场与位移场。因此，应力强度因子可以用于预估含裂纹结构在单调载荷作用下的剩余强度以及在重复载荷作用下的剩余寿命，作为结构与机械损伤容限设计基础。

目前，确定应力强度因子的方法大体可以分为解析法与数值法两大类。解析法的优点是所需的计算工作少；数值法的优点是所能解决的问题多。而前者的缺点是所能解决的问题少；后者的缺点是所需的计算工作多。

本书目的在于介绍作者及其合作者在应力强度因子解法方面所取得的研究成果。此成果获国家级科技进步三等奖，曾成功地用于“歼十”前翼耐久性设计，使该部件重量减轻 10 kg。其部分系统结果为本书上下册大量采用。

本书第 1 章至第 8 章介绍确定含裂纹二维与三维有限大体应力强度因子的解析变分方法。这是一种半解析半数值方法，兼有解析法与数值法的优点而克服了它们各自的缺点，即所需计算工作少而所能解决的问题多。当然，边界配置法与边界元素法也属于半解析半数值方法，但前者不能解决三维问题，而后者所需机时约比本方法所需机时大一个数量级。

本书第 9 章至第 16 章介绍确定含裂纹三维有限大体应力强度因子的能量差率封闭解法。这个方法的优点表现在它可以充分利用已有的二维应力强度因子结果确定三维应力强度因子。特别是这个方法是一种封闭解法，具有解析方法的优点，非常节省机时。由本方法所得结果与由有限元法所得结果的差别在工程允许范围之内，但本方法的计算工作量约为有限元法的千分之一到万分之一的数量级。

本书第 17 章至第 21 章介绍应力强度因子的广义刚度导数解法与广义守恒积分解法，它们发展了已有的刚度导数解法与守恒积分解法，拓宽了这两种解法的应用范围。

本书上、下两册分别介绍第 1 至 8 章与第 9 至 21 章内容。

书中如有不当之处，敬请读者批评与指正。

作　者

2016 年 5 月

目　录

第 1 章　弹性力学二维问题的复变函数通解

张　行

为了确定断裂力学中的二维应力强度因子，首先扼要介绍弹性力学二维问题的复变函数通解，其中包括各向同性材料与各向异性材料、平面问题与反平面问题。

1.1　各向同性材料平面问题的复变函数通解

1.1.1　基本方程与边界条件

这个问题以采用力法，引入应力函数求解为宜。应力函数 U 应该满足以下双调和方程[1]

$$\nabla^2\nabla^2 U=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 U=0 \tag{1.1}$$

U 与应力分量 σ_{xx}，σ_{yy} 与 σ_{xy} 有如下关系

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2},\quad \sigma_{yy}=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\quad \sigma_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y} \tag{1.2}$$

式(1.1)表示协调方程，式(1.2)表示平衡方程。

应变分量 ε_{xx}，ε_{yy} 与 ε_{xy} 可以通过物理方程表示成应力分量的函数如下

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{xx}&=\frac{1}{E_1}(\sigma_{xx}-\nu_1\sigma_{yy})\\
\varepsilon_{yy}&=\frac{1}{E_1}(\sigma_{yy}-\nu_1\sigma_{xx})\\
\varepsilon_{xy}&=\frac{1+\nu_1}{E_1}\sigma_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

式中，弹性常数 E_1 与 ν_1 视平面应力或平面应变问题而异

$$\left.\begin{aligned}
&E_1=E,\quad \nu_1=\nu\quad (\text{平面应力})\\
&E_1=\frac{E}{1-\nu^2},\quad \nu_1=\frac{\nu}{1-\nu}(\text{平面应变})
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

应变分量与位移分量 u_x 和 u_y 有如下关系

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}\\
&\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

式(1.5)表示几何方程。

进一步,元素刚体转动分量 ω_z 等于

$$\omega_z = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \tag{1.6}$$

平面问题的边界条件为

$$u_x = \bar{u}_x, u_y = \bar{u}_y, \quad \text{在 } s_u \text{ 上} \tag{1.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} l + \sigma_{yx} m = \bar{p}_x \\ \sigma_{xy} l + \sigma_{yy} m = \bar{p}_y \end{aligned}\right\} \quad \text{在 } s_p \text{ 上} \tag{1.8}$$

式中,$\bar{u}_x$,$\bar{u}_y$ 与 $\bar{p}_x$,$\bar{p}_y$ 分别是在 s_u 与 s_p 上给定的位移与面力;l 与 m 是边界外法线方向余弦。

1.1.2 应力函数与应力分量的复变函数通解

为了便于求解双调和方程式(1.1),引入如下共轭复变量

$$z = x + \mathrm{i}y, \quad \bar{z} = x - \mathrm{i}y \tag{1.9}$$

于是式(1.1)的复变函数形式为

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0 \tag{1.10}$$

积分上式,可得应力函数的复变函数表达式如下

$$U = f_1(z) + \bar{z} f_2(z) + f_3(\bar{z}) + z f_4(\bar{z}) \tag{1.11}$$

由于应力函数为实函数,有

$$f_3(\bar{z}) = \bar{f}_1(\bar{z}), \quad f_4(\bar{z}) = \bar{f}_2(\bar{z}) \tag{1.12}$$

令

$$\varphi(z) = 2f_2(z), \quad \theta(z) = 2f_1(z) \tag{1.13}$$

则应力函数的通解为

$$U = \frac{1}{2}\{\bar{z}\varphi(z) + z\varphi(\bar{z}) + \theta(z) + \bar{\theta}(\bar{z})\} \tag{1.14}$$

式中,复变函数 $\varphi(z)$ 与 $\theta(z)$ 的具体构造形式应根据问题的边界条件确定。

由式(1.9),可将式(1.2)改写如下

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right) U \\ \sigma_{yy} &= \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right) U \\ \sigma_{xy} &= -\mathrm{i}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right) U \end{aligned}\right\} \tag{1.15}$$

将上式进行组合,可得

$$\sigma_{yy} + \sigma_{xx} = 4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} \tag{1.16}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=4\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{1.17}$$

将式(1.14)代入式(1.16)与式(1.17)，得到应力组合的复变函数表达式如下

$$\sigma_{yy}+\sigma_{xx}=2\{\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})\}=4\mathrm{Re}\varphi'(z) \tag{1.18}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=\{2\overline{z}\varphi''(z)+\psi'(z)\} \tag{1.19}$$

以上二式称为穆斯海里什维利(Мусхелишвили)的应力表达式。式中，

$$\psi'(z)=\theta''(z) \tag{1.20}$$

1.1.3　位移分量的复变函数通解

由式(1.2)、式(1.3)与式(1.5)，可知

$$\left.\begin{aligned} E_1\frac{\partial u_x}{\partial x}&=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}-\nu_1\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\\ E_1\frac{\partial u_y}{\partial y}&=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\nu_1\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\\ \frac{E_1}{2(1+\nu_1)}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)&=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

引入调和函数 P

$$P=\nabla^2 U=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \tag{1.22}$$

由式(1.2)与式(1.18)，可知

$$P=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}=4\mathrm{Re}\varphi'(z) \tag{1.23}$$

令

$$\varphi(z)=p+\mathrm{i}q \tag{1.24}$$

则由解析函数理论，可得

$$P=4\frac{\partial p}{\partial x}=4\frac{\partial q}{\partial y} \tag{1.25}$$

考虑到式(1.22)～式(1.25)，可将式(1.21)的前两式改写如下

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_1}{1+\nu_1}\frac{\partial u_x}{\partial x}&=-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{4}{1+\nu_1}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{E_1}{1+\nu_1}\frac{\partial u_y}{\partial y}&=-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{4}{1+\nu_1}\frac{\partial q}{\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

积分上式，有

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_1}{1+\nu_1}u_x&=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{4}{1+\nu_1}p+f_1(y)\\ \frac{E_1}{1+\nu_1}u_y&=-\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{4}{1+\nu_1}q+f_2(x)\end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

将式(1.27)代入式(1.21)的第三式，容易证明

$$f_1(y)=-\omega y+u_{x0}$$
$$f_2(x)=\omega x+u_{y0} \tag{1.28}$$

显然,上式给出的 $f_1(y)$ 与 $f_2(x)$ 代表物体的刚体位移。从而,式(1.27)可以改写如下

$$\left.\begin{aligned}\frac{E_1}{1+\nu_1}u_x=-\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{4}{1+\nu_1}p\\ \frac{E_1}{1+\nu_1}u_y=-\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{4}{1+\nu_1}q\end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

由式(1.29)与式(1.14),有

$$2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi}'(\overline{z})-\overline{\psi}(\overline{z}) \tag{1.30}$$

上式称为穆斯海里什维利的位移表达式,式中,μ 为剪切弹模量。

$$\left.\begin{aligned}\kappa=\frac{3-\nu}{1+\nu}(\text{平面应力})\\ \kappa=3-4\nu(\text{平面应变})\end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

最后,容易证明

$$\omega_z=-\mathrm{i}\frac{2}{E_1}\{\varphi'(z)-\overline{\varphi}'(\overline{z})\} \tag{1.32}$$

1.2 各向异性材料平面问题的复变函数通解

在平面应力情况下,各向异性材料的应力与应变关系具有如下形式

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=a_{11}\sigma_{xx}+a_{12}\sigma_{yy}+a_{16}\sigma_{xy}\\ \varepsilon_{yy}&=a_{21}\sigma_{xx}+a_{22}\sigma_{yy}+a_{26}\sigma_{xy}\\ 2\varepsilon_{xy}&=a_{61}\sigma_{xx}+a_{62}\sigma_{yy}+a_{66}\sigma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

这时,以应力函数 U 表示的协调方程具有如下形式[2]

$$a_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^3\partial y}+(2a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}-2a_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x\partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0 \tag{1.34}$$

在平面应变情况下,各向异性材料的应力与应变关系具有如下形式

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=b_{11}\sigma_{xx}+b_{12}\sigma_{yy}+b_{16}\sigma_{xy}\\ \varepsilon_{yy}&=b_{21}\sigma_{xx}+b_{22}\sigma_{yy}+b_{26}\sigma_{xy}\\ 2\varepsilon_{xy}&=b_{61}\sigma_{xx}+b_{62}\sigma_{yy}+b_{66}\sigma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

这里,

$$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}\quad(i,j=1,2,6) \tag{1.36}$$

同时,协调方程相应地变成

$$b_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}-2b_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^3\partial y}+(2b_{12}+b_{66})\frac{\partial^4 U}{\partial x^2\partial y^2}-2b_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x\partial y^3}+b_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0 \tag{1.37}$$

显然，平衡方程、几何方程与边界条件均与各向同性材料的情况相同。

下面研究四阶偏微分方程式(1.34)的通解。引入广义复变量 z 如下

$$z=x+\mu y \tag{1.38}$$

式中，μ 为复常数

$$\mu=\alpha+\mathrm{i}\beta \tag{1.39}$$

将应力函数 U 写成如下广义复变函数形式

$$U=F(z)+\overline{F}(\overline{z}) \tag{1.40}$$

上式可以保证应力函数为实函数。

将式(1.40)代入式(1.34)，可得

$$a_{11}\mu^4-2a_{16}\mu^3+(2a_{12}+a_{66})\mu^2-2a_{26}\mu+a_{22}=0 \tag{1.41}$$

由此可见，只要 μ 是代数方程式(1.41)的根，则式(1.40)给出的 U 就是微分方程式(1.34)通解。

根据弹性常数之间的关系，可能存在以下两种情况：

(1)μ 的所有根均不相等，即

$$\left.\begin{aligned}\mu_1=\alpha_1+\mathrm{i}\beta_1,\mu_2=\alpha_2+\mathrm{i}\beta_2\\ \mu_3=\alpha_1-\mathrm{i}\beta_1,\mu_4=\alpha_2-\mathrm{i}\beta_2\end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

这里，α_1、β_1、α_2 与 β_2 均为实数。

(2)μ 的所有根成对相等，即

$$\mu_1=\mu_2=\alpha+\mathrm{i}\beta,\quad \mu_3=\mu_4=\alpha-\mathrm{i}\beta \tag{1.43}$$

对于各向同性材料，有

$$\mu_1=\mu_2=\mathrm{i},\quad \mu_3=\mu_4=-\mathrm{i} \tag{1.44}$$

如果材料是正交各向异性，而且坐标轴平行于材料的弹性主轴，则

$$a_{16}=0,\quad a_{26}=0 \tag{1.45}$$

此时，可能存在以下三种情况：

(1)μ_1 与 μ_2 为不等的虚数，即

$$\mu_1=\mathrm{i}\beta_1,\quad \mu_2=\mathrm{i}\beta_2 \tag{1.46}$$

(2)μ_1 与 μ_2 为相等的虚数，即

$$\mu_1=\mathrm{i}\beta,\quad \mu_2=\mathrm{i}\beta \tag{1.47}$$

(3)μ_1 与 μ_2 具有如下关系

$$\mu_1=\alpha+\mathrm{i}\beta,\quad \mu_2=-\alpha+\mathrm{i}\beta \tag{1.48}$$

对于 μ 的所有根不相等的情况，应力函数的通解为

$$U=F_1(z_1)+\overline{F_1(z_1)}+F_2(z_2)+\overline{F_2(z_2)} \tag{1.49}$$

式中，

$$z_j=x+\mu_j y \tag{1.50}$$

将式(1.49)代入式(1.2),并令

$$\varphi(z_1)=\frac{\mathrm{d}F_1}{\mathrm{d}z_1}=F'_1(z_1),\quad \varphi(z_2)=\frac{\mathrm{d}F_2}{\mathrm{d}z_2}=F'_2(z_2) \tag{1.51}$$

则由式(1.2)、式(1.49)和式(1.51)容易得到应力分量的复变函数表达式如下

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\mu_1^2\varphi'(z_1)+\mu_2^2\psi'(z_2)+\overline{\mu_1^2\varphi'(z_1)}+\overline{\mu_2^2\psi'(z_2)}\\\sigma_{yy}&=\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)+\overline{\varphi'(z_1)}+\overline{\psi'(z_2)}\\-\sigma_{xy}&=\mu_1\varphi'(z_1)+\mu_2\psi'(z_2)+\overline{\mu_1\varphi'(z_1)}+\overline{\mu_2\psi'(z_2)}\end{aligned}\right\} \tag{1.52}$$

最后研究位移分量的复变函数表达式。设

$$\left.\begin{aligned}u_x&=\xi_x(z_1)+\eta_x(z_2)+\overline{\xi_x(z_1)}+\overline{\eta_x(z_2)}\\u_y&=\xi_y(z_1)+\eta_y(z_2)+\overline{\xi_y(z_1)}+\overline{\eta_y(z_2)}\end{aligned}\right\} \tag{1.53}$$

将式(1.53)代入式(1.5),可得

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_{xx}&=\xi'_x(z_1)+\eta'_x(z_2)+\overline{\xi'_x(z_1)}+\overline{\eta'_x(z_2)}\\\varepsilon_{yy}&=\mu_1\xi'_y(z_1)+\mu_2\eta'_y(z_2)+\overline{\mu_1\xi'_y(z_1)}+\overline{\mu_2\eta'_y(z_2)}\\2\varepsilon_{xy}&=\xi'_y(z_1)+\eta'_y(z_2)+\overline{\xi'_y(z_1)}+\overline{\eta'_y(z_2)}+\mu_1\xi'_x(z_1)+\mu_2\eta'_x(z_2)\\&\quad+\bar{\mu}_1\overline{\xi'_x(z_1)}+\bar{\mu}_2\ \overline{\eta'_x(z_2)}\end{aligned}\right\} \tag{1.54}$$

将式(1.52)代入式(1.33)的前两式,并将所得结果与式(1.54)的前两式进行对比,可取

$$\left.\begin{aligned}\xi'_x(z_1)&=p_1\varphi'(z_1),\quad \eta'_x(z_2)=p_2\psi'(z_2)\\\xi'_y(z_1)&=q_1\varphi'(z_1),\quad \eta'_y(z_2)=q_2\psi'(z_2)\end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

式中,

$$p_j=a_{11}\mu_j^2+a_{12}-a_{16}\mu_j \tag{1.56}$$

$$\mu_j q_j=a_{21}\mu_j^2+a_{22}-a_{26}\mu_j \tag{1.57}$$

积分式(1.55),并将所得结果代入式(1.53),有位移分量的复变函数表达式如下

$$\left.\begin{aligned}u_x&=p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)+\bar{p}_1\ \overline{\varphi(z_1)}+\bar{p}_2\ \overline{\psi(z_2)}\\u_y&=q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)+\bar{q}_1\ \overline{\varphi(z_1)}+\bar{q}_2\ \overline{\psi(z_2)}\end{aligned}\right\} \tag{1.58}$$

将式(1.52)代入式(1.33)的第三式,将式(1.53)代入式(1.54)第三式,并将所得结果进行对比,则可得式(1.41)。由于 μ_j 是该方程的根,故此式即变为恒等式。式(1.58)略去了与变形无关的积分常数,式(1.52)与式(1.58)称为列赫尼斯基(Lехницкии)的应力与位移表达式。

1.3 反平面问题的复变函数通解

设 z 轴与棱柱体横截面垂直。反平面问题的位移具有如下形式

$$\left.\begin{array}{l} u_x=0, \quad u_y=0 \\ u_z=w(x,y) \end{array}\right\} \tag{1.59}$$

于是,反平面问题以用位移法求解为宜。

根据式(1.59),由弹性力学几何方程可得应变分量如下

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{xy}=0 \\ \varepsilon_{zx}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \quad \varepsilon_{zy}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial w}{\partial y} \end{array}\right\} \tag{1.60}$$

在确定应力分量时,假定材料是正交各向异性的,而且它的弹性主轴与坐标轴重合。这样,根据式(1.60),由弹性力学物理方程,应力分量为

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma_{xy}=0 \\ \sigma_{zx}=\mu_x \dfrac{\partial w}{\partial x}, \quad \sigma_{zy}=\mu_y \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{array}\right\} \tag{1.61}$$

根据式(1.61)可知,在弹性力学三个平衡方程中,前两个变为恒等式,而后一个具有如下形式

$$\mu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{1.62}$$

反平面问题的位移边界条件为

$$w=\overline{w}, \quad \text{在 } s_u \text{ 上} \tag{1.63}$$

根据式(1.61)可知,在弹性力学三个静力边界条件中,前两个变为恒等式,而后一个具有如下形式

$$\mu_x \frac{\partial w}{\partial x}l+\mu_y \frac{\partial w}{\partial y}m=\overline{p}_z, \quad \text{在 } s_p \text{ 上} \tag{1.64}$$

式(1.62)、式(1.63)与式(1.64)就是反平面问题的基本微分方程与全部边界条件。

下面研究二阶偏微分方程式(1.62)的通解。引入广义复变量 ζ 如下

$$\zeta=x+\nu y \tag{1.65}$$

式中,ν 为复常数,并等于

$$\nu=\alpha^{*}+\mathrm{i}\beta^{*} \tag{1.66}$$

将反平面位移 w 写成如下广义复变函数形式

$$w=g(\zeta)+\overline{g}(\overline{\zeta}) \tag{1.67}$$

上式可以保证反平面位移为实函数。

将式(1.67)代入式(1.62),可知

$$\nu=\sqrt{\frac{\mu_x}{\mu_y}}\,\mathrm{i} \tag{1.68}$$

由此可见,只要 ν 满足式(1.68),则式(1.67)就是微分方程式(1.62)通解。如果材料是各向同性的,即 $\mu_x=\mu_y=\mu$,则 $\nu=\mathrm{i}$。

将式(1.67)代入式(1.61),并考虑到式(1.68),可以得到反平面应力分量的广义复变函数表达式如下

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{zx}&=\mu_x\{g'(\zeta)+\overline{g}'(\overline{\zeta})\}\\ \sigma_{zy}&=\mathrm{i}\sqrt{\mu_x\mu_y}\{g'(\zeta)-\overline{g}'(\overline{\zeta})\}\end{aligned}\right\}\tag{1.69}$$

如果材料是各向同性的,则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0\\ &\sigma_{zx}=\mu\{g'(\zeta)+\overline{g}'(\overline{\zeta})\}\\ &\sigma_{zy}=i\mu\{g'(\zeta)-\overline{g}'(\overline{\zeta})\}\end{aligned}\right\}\tag{1.70}$$

这里,$\zeta=x+\mathrm{i}y$。

参 考 文 献

[1] Мусхелишвили Н И. Некоторые Основные Задачи Математической Теории Упругости. Москва Издательство Академии Наук, 1954.

[2] Лехницкий С Г. Анизотропные Пластинки. Москва Государственное Издагеллство Технико-теоретической Литературы,1957.

[3] 张行主编.高等弹性理论.北京:北京航空航天大学出版社,1994.

第 2 章　边缘裂纹二维应力强度因子的解析——变分解法

崔德渝　朱刚毅　张　行

本章以弹性力学二维问题复变函数解法为基础，研究边缘裂纹二维应力强度因子的解析——变分解法，其中包括各向同性材料的平面问题、各向异性材料的平面问题与反平面问题三种情况。

2.1　各向同性材料边缘裂纹平面问题解法

2.1.1　裂纹表面的边界条件

图 2.1 表示含边缘裂纹的一个二维固体。

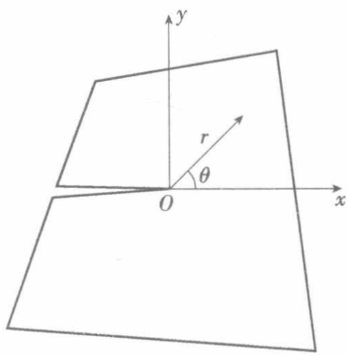


图 2.1　含边缘裂纹的二维固体

第 1 章曾经得到各向同性材料平面问题的应力与位移分量的穆斯海里什维利复变函数表达式[1]

$$\sigma_{yy}+\sigma_{xx}=2\{\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})\}=4\mathrm{Re}\varphi'(z) \tag{2.1}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{xy}=2\{\overline{z}\varphi''(z)+\psi'(z)\} \tag{2.2}$$

$$2\mu(u_x+\mathrm{i}u_y)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi}'(\overline{z})-\overline{\psi}(\overline{z}) \tag{2.3}$$

以上三式已经满足平面问题的所有基本方程。

下面建立裂纹表面的边界条件，并由此确定复变函数 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的构造形式[2]。根据图 2.1，裂纹上、下表面的边界条件为

$$\sigma_{yy}^{(+)}=\sigma_{xy}^{(+)}=0,\quad \sigma_{yy}^{(-)}=\sigma_{xy}^{(-)}=0 \tag{2.4}$$

式中，(+)与(−)分别表示裂纹上表面与下表面。

由式(2.4)可知，σ_{xx} 不出现在裂纹表面的边界条件中。因此，由式(2.1)与式

(2.2)消去 σ_{xx},可得到如下新的应力组合

$$\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{yz}=\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})+\overline{z}\,\overline{\varphi}''(\overline{z})+\overline{\psi}'(\overline{z})+(z-\overline{z})\,\overline{\varphi}''(\overline{z}) \tag{2.5}$$

为了简化以上表达式,引入新的复变函数 $\Omega(z)$ 如下

$$\Omega(z)=z\varphi'(z)+\psi(z) \tag{2.6}$$

于是,式(2.5)可被改写成

$$\sigma_{yy}-\mathrm{i}\sigma_{yx}=\varphi'(z)+\overline{\Omega}'(\overline{z})+(z-\overline{z})\,\varphi''(z) \tag{2.7}$$

这样,就以 $\Omega(z)$ 代替 $\psi(z)$ 表示应力与位移。

令 t 表示 z 在 x 轴上的值,并以记号 $P(t)^{(+)}$ 与 $P(t)^{(-)}$ 分别表示 z 自裂纹以上半平面与裂纹以下半平面趋向裂纹上、下表面时 $P(z)$ 的极限值。显然,在 x 轴上有

$$z-\overline{z}=0 \tag{2.8}$$

于是,将式(2.4)代入式(2.7),可知

$$\varphi'(t)^{(+)}+\overline{\Omega}'(t)^{(-)}=0 \tag{2.9}$$

$$\varphi'(t)^{(-)}+\overline{\Omega}'(t)^{(+)}=0 \tag{2.10}$$

以上两式经加、减运算后,可改写成

$$\{\varphi'(t)-\overline{\Omega}'(t)\}^{(+)}=\{\varphi'(t)-\overline{\Omega}'(t)\}^{(-)} \tag{2.11}$$

$$\{\varphi'(t)+\overline{\Omega}'(t)\}^{(+)}=-\{\varphi'(t)+\overline{\Omega}'(t)\}^{(-)} \tag{2.12}$$

式(2.11)表明,函数 $\{\varphi'(z)-\overline{\Omega}(z)\}$ 当自变量 z 掠过裂纹表面时为连续函数,它可表示成泰勒(Taylor)级数如下

$$\varphi'(z)-\overline{\Omega}'(z)=2g(z)=2\sum_{n=0}^{N}G_nz^n \tag{2.13}$$

式(2.12)表明,函数 $\{\varphi'(z)+\overline{\Omega}'(z)\}$ 当自变量 z 掠过裂纹表面时为呈反对称跳跃的间断函数,它可表示成如下形式

$$\varphi'(z)+\overline{\Omega}'(z)=z^{-1/2}2f(z)=2z^{-1/2}\sum_{n=0}^{N}F_nz^n \tag{2.14}$$

事实上,根据复变量的极坐标表示式,有

$$z^{-1/2}=r^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\vartheta}{2}}$$

于是,在裂纹上表面

$$\vartheta=\pi,\quad z^{-1/2}=-\mathrm{i}r^{-1/2}$$

同时,在裂纹下表面

$$\vartheta=-\pi,\quad z^{-1/2}=\mathrm{i}r^{-1/2}$$

从而,函数 $z^{-1/2}$ 在裂纹上、下表面呈反对称的跳跃形式,而 $f(z)$ 是连续函数,所以,由式(2.14)所确定的函数满足裂纹表面的间断要求。

由式(2.13)与式(2.14),可知

$$\left.\begin{aligned}\varphi'(z)&=z^{-1/2}f(z)+g(z)\\ \overline{\Omega}'(z)&=z^{-1/2}f(z)-g(z)\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

式中，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{N}F_nz^n,\quad g(z)=\sum_{n=0}^{N}G_nz^n \tag{2.16}$$

2.1.2　含边缘裂纹板的应力场

考虑到式(2.6)，可将式(2.1)与式(2.2)改写如下

$$\sigma_{yy}+\sigma_{xx}=2\{\varphi'(z)+\overline{\varphi}'(\overline{z})\} \tag{2.17}$$

$$\sigma_{yy}-\sigma_{xx}+2\mathrm{i}\sigma_{yx}=2\{\Omega'(z)-\varphi'(z)-(z-\overline{z})\varphi''(z)\} \tag{2.18}$$

将式(2.15)代入式(2.17)与式(2.18)，引入以下极坐标

$$\left.\begin{aligned}z&=re^{\mathrm{i}\vartheta}=r(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)\\ z^m&=r^m\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\vartheta}=r^m(\cos m\vartheta+\mathrm{i}\sin m\vartheta)\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

经过分离实部与虚部后，有含边缘裂纹板应力场的张量表达式如下

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}&=2\sum_{n=0}^{N}r^{n-\frac{1}{2}}\{F_n^Rf_{nij}^R(\vartheta)+F_n^If_{nij}^I(\vartheta)\}\\&\quad+2\sum_{n=0}^{N}r^n\{G_n^Rg_{nij}^R(\vartheta)+G_n^Ig_{nij}^I(\vartheta)\}\quad(i,j=1,2)\end{aligned} \tag{2.20}$$

式中，

$$\begin{gathered}\sigma_{11}=\sigma_{xx},\quad\sigma_{22}=\sigma_{yy},\quad\sigma_{12}=\sigma_{xy}\\ F_n=F_n^R+\mathrm{i}F_n^I\\ G_n=G_n^R+\mathrm{i}G_n^I\end{gathered} \tag{2.21}$$

$$f_{n11}^R(\vartheta)=f_{nxx}^R(\vartheta)=\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\vartheta-\left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\vartheta\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)\vartheta$$

$$\begin{aligned}f_{n11}^I(\vartheta)=f_{nxx}^I(\vartheta)=-\{&2\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\vartheta\\&+\left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\vartheta\cos\left(n-\frac{3}{2}\right)\vartheta\}\end{aligned}$$

$$g_{n11}^R(\vartheta)=g_{nxx}^R(\vartheta)=2\cos n\vartheta-n\sin\vartheta\sin(n-1)\vartheta$$

$$g_{n11}^I(\vartheta)=g_{nxx}^I(\vartheta)=-\{\sin n\vartheta+n\sin\vartheta\cos(n-1)\vartheta\}$$

$$f_{n22}^R(\vartheta)=f_{nyy}^R(\vartheta)=\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\vartheta+\left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\vartheta\sin\left(n-\frac{3}{2}\right)\vartheta$$

$$f_{n22}^I(\vartheta)=f_{nyy}^I(\vartheta)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\vartheta\cos\left(n-\frac{3}{2}\right)\vartheta$$

$$g_{n22}^R(\vartheta)=g_{nyy}^R(\vartheta)=n\sin\vartheta\sin(n-1)\vartheta$$

$$g_{n22}^I(\vartheta)=g_{nyy}^I(\vartheta)=-\sin n\vartheta+n\sin\vartheta\cos(n-1)\vartheta$$

$$f_{n12}^R(\vartheta)=f_{nxy}^R(\vartheta)=-\left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\vartheta\cos\left(n-\frac{3}{2}\right)\vartheta$$