直観几何

上 册

D. 希尔伯特
S. 康福森 著
王 联 芳 譯
江 澤 涵 校 訂

高等教育出版社

直　观　几　何

上　册

D. 希尔伯特
S. 康福森　著
王　联　芳　譯
江　澤　涵　校　訂

高等教育出版社

希尔伯特和康福森合著的"直观几何"(D. Hilbert u. S. Cohn-Vossen, "Anschauliche Geometrie", 德国 Verlag von Julius Springer 1932 年出版)是一本著名的著作,书中用直观方法深入浅出地介绍了几何中丰富的知识。可供具有大学一二年级数学程度的读者阅读。

全书共六章:最简单的曲线和曲面,正则点系,构形,微分几何,运动学,拓扑学。中译本分上下两册出版,每册包括三章。

译文大体上是根据英译本"Geometry and the Imagination"(P. Nemenyi 译,美国 Chelsea Publishing Company 1952 年出版),也参考了德文原本和俄译本"Наглядная геометрия",第二版(С. А. Каменецкий 译,苏联 Государственное издательство технико-теоретической литературы 1951 年出版)。

直 观 几 何

上 册

D. 希尔伯特 S. 康福森著

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省〇五印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 5.75 字数 130,000

1959 年 12 月第 1 版 1964 年 6 月第 4 次印刷

印数 12,201—29,800

书号 13010·0961 定价 0.88元

俄譯本出版者的話

D. 希尔伯特和 S. 康福森合著的"直观几何"是世界通俗文献中为数不多的出于大数学家手笔的书籍中的一本，由于叙述的循序渐进而又生动，著者就使得极其丰富的几何知識能为对数学有兴趣的广大讀者所接受、所理解。

原书著者之一 S. 康福森在 1934 年由希特勒德国迁居到苏联来，并且参加了俄譯本第一版的准备工作。1936 年 S. 康福森在重病之后死于莫斯科。

必須指出，原书还是有些較大的缺点的。一般地說，书中沒有关于数学发現的历史方面的闡述。某些地方虽也有带点历史性質的注释，却往往只詳細地引証比較不重要的著作，可是对于直接关联到所講內容而属于我国科学家的重大的数学研究，有时連提也不提。在这次再版俄譯本时，各个地方加了脚注，希望尽可能地弥补这个缺陷。

序

在数学中，象在任何科学研究中那样，有两种傾向。一种是抽象的傾向，即从所研究的錯綜复杂的材料中提炼出其內在的邏輯关系，并根据这些关系把这些材料作系統的、有条理的处理。另一种是直观的傾向，即更直接地掌握所研究的对象，側重它們之間的关系的具体意义，也可以說領会它們的生动的形象。

就几何方面說，抽象的傾向已經引导到代数几何、黎曼几何和拓扑学等宏偉的系統的理論；在这里抽象的思考方法、以及代数性質的符号运算获得广泛的运用。然而，直观在几何中起的作用却是更大，过去如此，現在还是如此。具体的直观不仅对于研究工作有巨大的价值，对于理解和欣賞几何中的研究結果也是这样。

本书的目的在于从直观形象这一側面来介紹今日的几何。借助于直观想象，我們能够闡述几何中的各种各样的事实和問題；不但如此，在許多情况下我們还能够描述有关的研究方法和証明方法的几何輪廓，而无須詳究概念的严格定义和实际計算。例如，具有一个洞（不管这个洞多么小）的球面恒能攤平的証明，或一般地不能把两个不同的环面中的一个保角地映射成另一个环面的証明，都可如此处理，使得不愿追究解析推演的細节的人，也可以領会到应如何証明和为什么能这样証明。

由于几何的方面很广而且它跟許多数学分支发生关系，因而我們甚至于能够从它获得整个数学的概观、能够認識数学問題的变化多端、以及数学思想的丰富多彩，因此从直观形象出发而且用粗綫条的方式来描繪几何，应該会使专家圈子以外更广大的群众

对于数学有更合理的評价。因为,一般地說,数学并不是普通人特别喜爱的学科,虽然它的重要性可以說已經得到公認了。此中原因是由于有一种流行的誤解,認为数学不过是算术的延續和提高,用数目来变戏法。本书用图形来替代公式;这里的图形是讀者看得見的,而且讀者容易制作模型来加以补充。本书要通过这种方式来和这种流行的誤解作斗爭。希望本书能使讀者易于看透数学的本质,不致于在繁难的学习面前望而却步,从而使数学更易于为人所欣賞。

本书的目标旣是如此,自然不能顧到把各方面的材料搜罗完备和把所討論的材料按严格系統安排,也不能把所討論的每个課題討論得詳尽无遺。再者,书中各节对于讀者預先具有的数学訓練的要求也不能完全相同;虽然本书大部分的叙述是很初等的,但是,若要避免冗长而厌煩的叙述,有一些美丽的几何的探討是只有对于具有一定程度的訓練的人才能完全解释清楚。

各章的附录都假定讀者已具有某些預备知識,这些附录是补充性的,而不是解释正文的。

几何各部門的相互关系甚为密切,而且密切得往往出人意料之外。这一情况在本书中多处出現。虽然如此,由于所处理的材料多种多样,有必要使各章在一定程度上各自独立,以免为了理解后面的几章就必需完全熟悉前面的各章。我們希望,由于有了一些叙述上的重复,讀者可能自由地閱讀各别的章,有时甚至是各别的节,而不致于难以接受或不感到兴趣。我們愿意領着諸位讀者在几何的大花園里作一次幽閑的散步,让每人摘取一束自己心爱的花朵。

本书的底稿是我在古庭根于 1920—1921 年冬季每周四次的“直观几何”的講演,經 W. 罗塞曼(Rosemann)記录的。本书里基本上保存了原講稿的結构和内容,但是 S. 康福森 (Cohn-Vossen)

改写了許多細节，并且补充了不少的材料。

D. 希尔伯特

1932 年 6 月于古庭根

上册目录

俄譯本出版者的話 ……5

序 ……6

第一章　最簡单的曲綫和曲面 ……1

§1. 平面曲綫 ……1

§2. 柱面、錐面、圓錐曲綫以及它們的回轉曲面 ……7

§3. 二阶曲面 ……12

§4. 椭球面与共焦二阶曲面的繩綫作图 ……19

第一章　附录 ……25

1. 圓錐曲綫的垂足点作图 ……25

2. 圓錐曲綫的准綫 ……27

3. 双曲面的能动綳杆模型 ……30

第二章　正則点系 ……33

§5. 平面点格 ……33

§6. 在数論中的平面点格 ……39

§7. 三維和三維以上的点格 ……47

§8. 作为正則点系的結晶体 ……54

§9. 正則点系和不連續运动群 ……58

§10. 平面运动及其合成；平面不連續运动群的分类 ……61

§11. 有无穷大基本区域的平面不連續运动群 ……66

§12. 平面运动的結晶体群，正則点系和指針系。以合同区域組成的平面結构 ……72

§13. 空間結晶体类及运动群。鏡面对称群和点系 ……83

§14. 正多面体 ……91

第三章　投影构形 ……96

§15. 平面构形导言 ……97

§16. 构形(7_3)和构形(8_3) ……100

§17. 构形(9_3) ……104

§18. 透視画法，无穷远元素和平面上的对偶原理 ……114

§19. 无穷远元素和空間的对偶原理。德沙格定理和德沙格构形(10_3) ……122

§ 20. 巴斯加定理和德沙格定理的比較 ······ 130
§ 21. 空間构形导言 ······ 134
§ 22. 雷耶构形 ······ 135
§ 23. 三維和四維空間的正多面体及其投影 ······ 144
§ 24. 几何学的枚举法 ······ 161
§ 25. 施累弗利双六构形 ······ 167

第一章　最簡单的曲綫和曲面

§1. 平面曲綫

最簡单的曲面是平面。最簡单的曲綫是平面曲綫；平面曲綫当中最簡单的是直綫。直綫可以定义为两点間最短的路程，也可以定义为二平面的交綫，或者旋轉的軸。

直綫之外最簡单的曲綫要算圓。即使象这样簡单的图形，也能够对它作出繁多而深入的研究，以致可写成专书。我們給圓下这样的定义：它是曲綫，曲綫上的各点与一已知点的距离相等。我們通常用众所共知的繩綫作法或圓規作法来作圓。从这种作法显然可知：圓是閉合的曲綫，到处是凸的。因此通过圓周上任一点可作一条定直綫（切綫），使唯有这一点（切点）才是直綫与圓共同的，同时直綫上其余所有的点都在圓外（图 1）。切点 B 上的半徑 MB 必为从圓心 M 到切綫 t 的最短路程，因为 t 上除 B 外的所有点都在圓外，因此这些点跟 M 的距离应較切点跟 M 的距离为远。由此可以推出，圓的半徑 MB 垂直于半徑上的切綫。要証明这句話，我們作圓心 M 对于切綫 t 的反射点，即从 M 作切綫 t 的垂綫，延长一倍到 M'；这 M' 叫做 M 的象点。现在因为 MB 是从 M 到 t 的最短路程，又因为对称关系，得知 $M'B$ 是从 M' 到 t 的最短路程。因此綫路

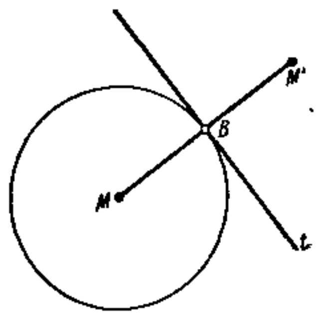

图 1

MBM' 一定是 M 和 M' 两点間的最短路程，所以在点 B 处不会弯折，也就是說，MB 的确垂直于 t。

从圓的作法很自然地会想起一种推广情形。我們知道在用繩索作圓时，須将閉合的繩綫套在一个固定的点(圓心)上，并且在画圓的过程中时时将繩綫拉緊。現在假如将此繩綫套在两个固定的点上，則得出与圓类似的曲綫。这种曲綫叫做椭圓，两个定点叫做椭圓的焦点。由繩綫作图法可知，椭圓是具有下列性質的曲綫：曲綫上任一点到二已知点的距离之和是一常量。如果設二点重合，則得到椭圓的极限情形，即圓。椭圓也有几个簡单的性質，跟上面列举的圓的各种性質相当：它是閉合的曲綫，到处是凸的，在椭圓上任一点均可作其切綫，切綫上每一点除切点外均在椭圓之外。与圓半徑相当的，是連接椭圓上一点和二焦点的二綫段。这二綫段叫做椭圓的焦半徑。与圓的切綫必垂直过切点的半徑这件事相当的，是椭圓的切綫同过切点的二焦半徑作成等角。依图 2 上的記

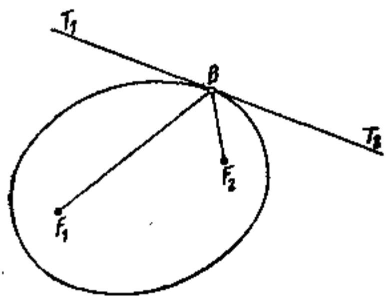

图 2

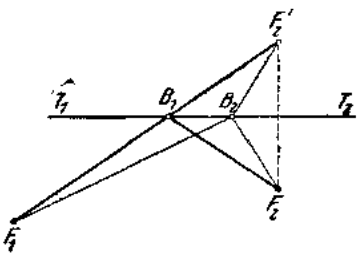

图 3

法，这句断語可写成 $\angle F_1BT_1=\angle F_2BT_2$。証明如下：作 F_2 对于切綫的反射点 F_2'(图 3)。同切綫交于 B_1 的綫段 F_1F_2' 是 F_1 和 F_2' 两点間最短的路綫。因为，設 B_2 是切綫上任意另外一点，那么綫段 $F_1B_2F_2=F_1B_2F_2'$ 必大于 $F_1B_1F_2=F_1B_1F_2'$。另一方面，F_1 和 F_2 两点間最短的并且与切綫相交的路綫是由过切点 B 的二焦半徑

組成的。这是由于切綫上任何其他的点都在椭圓之外，从而从二焦点到这样一点的距离之和必定大于从二焦点到椭圓上 B 点的距离之和。所以 B 同 B_1 重合。因为 F_2 和 F_2' 对于直綫 T_1T_2 对称，而且 $\angle F_1B_1T_1$ 和 $\angle F_2'B_1T_2$ 成对頂角，因此我們的断語得証。

椭圓切綫的这种性質在光学上获得应用，焦点和焦半徑二名詞也是从这里来的。这是說，假如置光源于椭圓鏡面的一个焦点处，其反射綫必将聚集于另一焦点。

另外有一种曲綫，它的作法虽不如椭圓那样容易，但原理同样簡单。这种曲綫上的任一点到二定点距离之差为一常数。这曲綫名为双曲綫，二定点名为双曲綫的焦点。这样，对曲綫上任一点 B 或 B'（图 4），关系式 $F_1B-F_2B=$ 常数 a 或 $F_2B'-F_1B'=a$ 应該成立。据此，双曲綫由两个分支組成。直观上显然，双曲綫到处是凸的，并且經过曲綫上任一点都可作一切綫。以后我們还要証明（参看第 9 頁上脚注 2）：切綫上除去切点外，同曲綫再沒有公共点。仿照椭圓的情形，可以証明，双曲綫的切綫平分过切点的二焦半徑的夹角（图 6）。

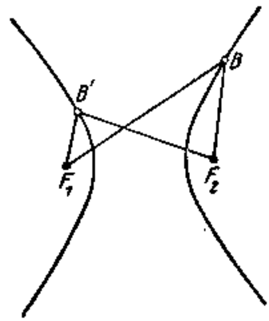

图 4

运用极限过程，可以从椭圓得出另外一种曲綫——抛物綫（图 5）。为了达到这个目的，先固定一个焦点，比如說 F_1，再固定同此焦点最近的頂点 S（所謂椭圓的頂点，是說椭圓与两焦点連綫的交点）。現在我們来考慮，假如第二个焦点 F_2 在 SF_1 的延长綫上移动，离 F_1 越来越远，椭圓将如何变化。我們說这些椭圓趋近于一极限曲綫，这极限曲綫就是抛物綫。从这个极限过程我們可导出抛物綫的一个簡单定义。闡述如下：

假如椭圓的焦距 F_1F_2 充分地大，而在繩綫作图中鉛笔始終貼

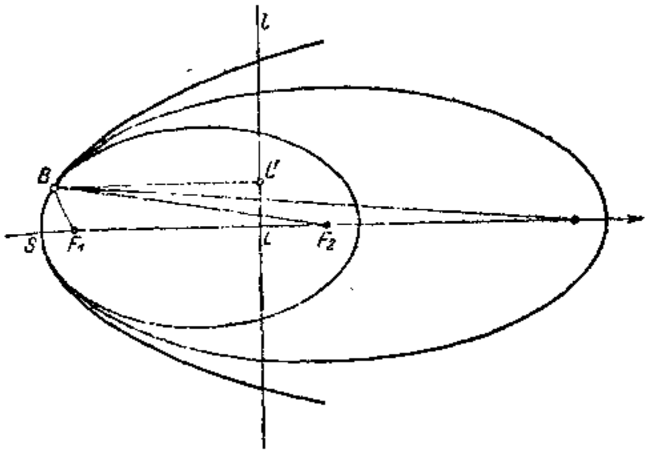

图 5

紧繩綫走动，一直走到頂点 S 的邻近，則由 F_2 引出的繩綫几乎平行于 SF_2（图 5）。过 F_1F_2 上任一点 L 作直綫 F_1F_2 的垂綫 l，則有下面的近似的等式成立：

$$F_1B+BF_2=F_1B+BL'+LF_2=\text{常数}$$

（其中的 L' 是从 B 到 l 的垂綫的垂足）。如用一个新的常数去代替

$$\text{“常数}-LF_2\text{”},$$

便得到

$$F_1B+BL'=\text{常数}$$

（因为就一个定曲綫来說，LF_2 是常数）。距离 F_1F_2 越大，上式越正确，因之在极限的情形下，上式就严格地成立了。这样，我們說，拋物綫是这样的曲綫，从曲綫上任一点到一定点及一定直綫的距离之和是一常数。換句話說，从拋物綫上任一点到一定点的距离，等于从这点到一条定直綫的距离。这条定直綫是这样得到的：在 S 的和 l 不同的一側，与 S 的距离等于 SF_1 的某处作 l 的平行綫；这条直綫叫做拋物綫的准綫。

設有一道平行于 SF_1 的光綫，落在拋物形鏡面上，則反射綫將聚于 F_1；这是从上述极限过程中推导出来的另一結果。

上面我們講的椭圓"族"有一个共同的頂点和一个共同的离頂点最近的焦点。現在让我們看一下有两个共同焦点的椭圓族。"共焦点"的椭圓族"簡单而无空隙地"复盖平面，这是說，对于平面上任意一点，族中恰有一条曲綫通过它。这是因为二焦点到已知点距离之和是一个定値，所以已知点就在以此定値为和的椭圓上①。

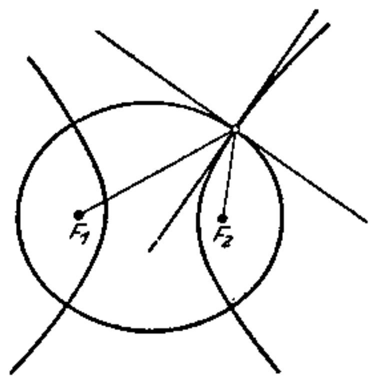

图 6

現在我們再将与上述椭圓族共焦点的双曲綫族也加进来研究。这种双曲綫族也是簡单而无空隙地复盖平面②。这样一来，对于平面上任一点，恰好有共焦点的椭圓族和双曲綫族中各一条曲綫通过它（图 6）。在任一已知点（二焦点例外），对过这点的椭圓和双曲綫分別所作的二切綫必平分通过这点的二焦半徑所作的角及其补角，因此这二切綫相互垂直。

由此可知，共焦点的椭圓族和双曲綫族形成"正交曲綫族"（两族曲綫，如果一族中的每条曲綫与另一族中的每一曲綫直交时，称为正交曲綫族；二曲綫的交角，按定义为在其交点处二切綫所成的角）。为了获得正交曲綫族的整个面貌，我們从 F_1F_2 的垂直平分綫开始，来看看双曲綫族。这些双曲綫越来越扁平，最后变为綫段

① 連接二焦点的綫段是退化的椭圓。在此椭圓上任一点，距二焦点距离之和等于二焦点間的距离。

② 連接二焦点的直綫，但去掉焦点之間的部分，是退化的双曲綫。連接二焦点的綫段的垂直平分綫也是退化的双曲綫。在后面的情形中，距离之差是常数零。

F_1F_2 的延长綫——一对射綫。如此平面完全被复盖了。現在我們再跳到綫段 F_1F_2 上去。这一綫段逐漸膨脹，起初是扁平的橢圓，而当它的大小无限扩張时，形状越来越象圓。这样，平面第二次被复盖了。

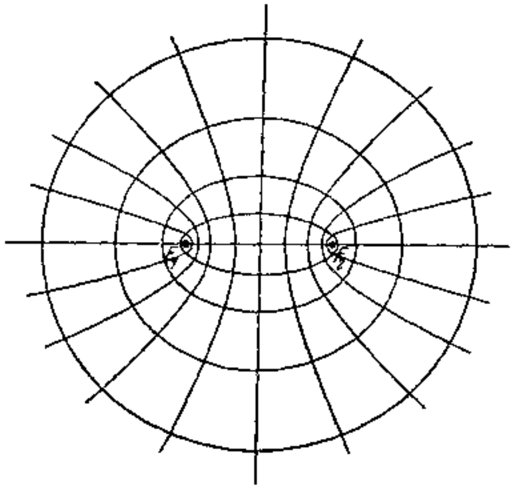

图 7

正交曲綫族另一个非常簡单的例子是同心圓組和通过公共圓心的諸直綫。这样的图形可以由上例用极限过程得到，即当二焦点趋近以至重合时。这时橢圓都变为圓，双曲綫都变为成对的直綫。

地图上的等高綫和最大坡度綫，也是正交曲綫族的一个例子。

最后，让我們再講一种用繩綫作出的正交曲綫族。把一根繩綫纏繞在一个凸的曲綫上，比如說圓。現在要找出一面将繩綫拉緊一面打开时繩綫端点所描繪的曲綫（图 8）。如此得出的曲綫叫做圓的"漸伸綫"，它繞着圓走，一圈比一圈寬，亦即它是一条螺綫。由上面的作图法显然可知，螺綫垂直于由其

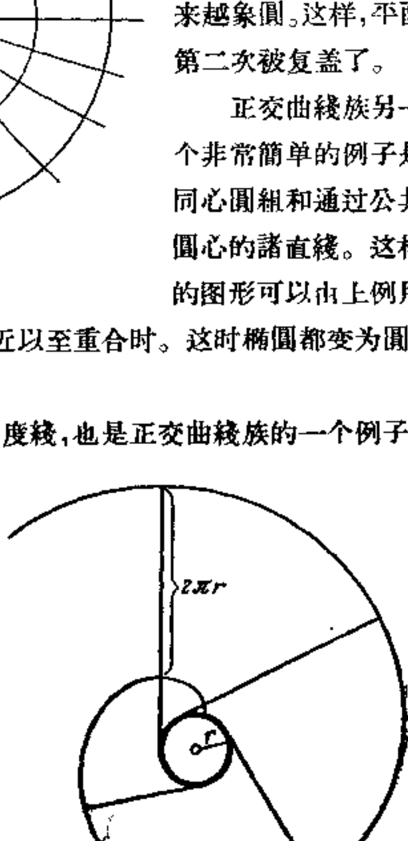

图 8

上任一点所作的圓的一条切綫。螺綫的其他各圈也跟这条切綫直交。由相邻二圈截出的切綫綫段，其長一定，等于母圓的圓周长。

我們可以由圆周上不同的点开始打开繩索而作出同一圓的任意多个其他的漸伸綫。也可以只将漸伸綫族中的一条曲綫繞圓心旋轉而得到漸伸綫族的全部曲綫。漸伸綫族簡单而无空隙地复蓋平面，但圓内的点除外。漸伸綫族正交于圓的两族半切綫之一。

对于其他任何直綫族，它的正交曲綫族也都是漸伸綫。它們的母綫（上例是圓）就是已知直綫族的包絡。我們将在微分几何（第四章）和运动学（第五章）中再回顾这一現象。

§ 2. 柱面、錐面、圓錐曲綫以及它們的回轉曲面

最簡单的弯曲的面是柱面。柱面可以由最簡单的曲綫——直綫和圓——用下法得出：沿一圓周移动垂直于圓面的直綫。得出柱面的另一种方法是：将一直綫繞着和它平行的軸回轉。由此可見，圓柱面是一种回轉曲面。回轉曲面是曲面中很重要的一类。在日常生活中常常碰到它，例如杯子、瓶子等等。这种曲面都具有这样的特征：它們可由一平面曲綫繞同一平面上的一軸回轉而产生。

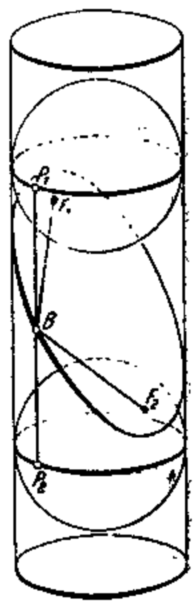

图 9

一个垂直于柱面軸的平面，同柱面交于一圓。与軸斜交的平面同圓柱面的截綫，給人的直觀感覚好象是一个橢圓。現在我們来証明，这曲綫的确是橢圓。为了証明，我們取一个大小恰够放入柱面内的球，推动之，使与截面剛好接触（图 9）。另取一球，同法，放在截面的它側。这两个球与柱面切于二圓，与截面切于两点 F_1 和 F_2。将截面与柱面的交綫上任一点 B 同 F_1

和 F_2 連接起来。考虑柱面上經过 B 的母綫，它与球和柱面的交綫交于 P_1, P_2 两点。BF_1 和 BP_1 是一个球的两条通过 B 的切綫。所有这样的切綫綫段都相等，这可以从球有旋轉对称性立即知道。因此而有 $BF_1=BP_1$，同理 $BF_2=BP_2$。从此得出

$$BF_1+BF_2=BP_1+BP_2=P_1P_2。$$

但是由于图形有旋轉对称性，距离 P_1P_2 与曲綫上所选擇的 B 点的位置无关，因此截綫上的所有点到 F_1 和 F_2 的距离之和都相等；这就是說，这曲綫是以 F_1 和 F_2 为焦点的椭圓。

上述事实还可以表述成投影定理：假如光綫从垂直于圓所在的平面射进来，則圓在斜面（对圓所在的平面来說）上的投影是椭圓。

仅次于圓柱面的最簡单的回轉曲面是圓錐面。圓錐面由回轉一直綫而得，但回轉軸与該直綫相交。因此，从一定点到一定球的所有切綫形成一圓錐面，又从一圓的軸（譯者注：即通过圓心且垂直于該圓所在的平面的直綫）上一点作到該圓的所有投射綫也形成一圓錐面。

垂直于錐面軸的平面与錐面交于一圓；截面稍傾斜，交綫便成为椭圓。这可以借助于二輔助球来証明，証法同圓柱面的情形完全一样。

截面越傾向錐面軸，椭圓越扁长，截面与錐面的母綫一开始平行，交綫就不再是有界的閉合曲綫。用前面用过的极限过程的办法（参看图 5），可以証明交綫是抛物綫。

如果截面更傾向錐面軸，那末截面同两支錐面都相交（以前只是同一支相交）。它們的交綫看来好象是双曲綫的样子（图 10）。为了証明它的确是双曲綫，我們在两支錐面內各放进一球，使剛好与錐面和截面相接触。（这时二球居于截面的同側，与此相反，在椭圓的情形下，二球居于截面的异側。）仿照第 7 頁的証明，就有