高等数学学习方法指导书

（修订版）

下　　册

同济大学数学教研组 编

人民教育出版社

本书是根据我社出版的樊映川等编"高等数学讲义"(第一版，即1958年版)编写的．采用本指导书时必须采用上述高等数学讲义作为课本方能配合．本书可作为高等工业学校函授学生学习高等数学的教材，也可作为已修完高中数学课程的读者自学高等数学之用．

本书分上、下两册．上册包括一般学习方法指导，各章学习方法指导、习题、习题答案及测验作业题．下册是根据同济大学函授生学习高等数学时所提出的问题加以整理编写的，可解决学习上某些疑难题，也可作为体会教材的参考资料．

本版是修订版，由同济大学王福楹同志修订．

在修订本书时，考虑到许多高等工业学校函授生及业余自学读者学习樊映川等编"高等数学讲义"(第二版，即1964年版)的需要，我社编辑特在书末附加了对照表II，供学习第二版的读者参考使用．

高等数学学习方法指导书

(修订版)

下册

同济大学数学教研组 编

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 4.875 字数 116,000

1959年11月第1版

1981年10月第2版 1982年4月第1次印刷

印数 000,001—152,000

书号 13012·0679 定价 0.47 元

目　次

绪言

本校函授生在学习高等数学时曾书面提出了不少问题，本册就是根据函授生所提的问题加以整理而编写的．我们并不要求每一个读者（包括函授生及完全自学的读者）都要从头至尾来阅读本册的内容．但是，如果读者在阅读讲义（樊映川等编的高等数学讲义，第一版或第二版）及指导书上册（本教研组所编的高等数学学习方法指导书上册）或做指导书上册所指定的习题发生困难，并且经过自己思考而不能解决时，可以到本册中查阅一下，看是否有你所要解决的问题．如果查不到，函授生可用书面方式提请所属学校的教师解答．

必须再强调一下，读者应当尽自己的能力来解决所遇到的问题，这样才能逐步培养独立思考的能力．不先通过自己的思考就去查本册的答案是不会有很大益处的．

对于自学时间比较充裕的读者，我们建议将本册的内容作为参考材料来阅读．看看别人提出了些什么问题，想想这些问题应如何答复，再把自己的答案和本册的答案比较一下，这样对学习会有好处．但对于一般的读者，我们并不要求这样做．

本册中尚有少数问题所牵涉到的内容在指导书上册里指出是不必学的，关于这些问题及它们所牵涉到的讲义上的内容，一般读者不必去读它．因一般读者的学习时间不会很多，在这样情况下，首先应该熟悉主要的内容，读者不必因为少学了这些次要的内容而感到不安．

本册中各问题的排列次序是按照指导书上册所指定的学习次序编排的．

同济大学数学教研组

第一篇　解析几何

第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

1. 讲义上册3页第4行. 何谓数学归纳法? 如何应用此法并利用(1)式来证明(2)式?

答: 数学归纳法在中学代数里已经讲过. 数学里常常用它来证明对于从某一个自然数起直到任意的自然数 n 都是正确的某一个论断. 这方法的步骤如下:

1° 证明当 n 取第一个值 (例如 $n=1$ 或者 $n=2$ 等等) 的时候, 这个论断是正确的;

2° 假设当 $n=k$ 的时候 (k 是一个自然数), 这个论断是正确的, 然后去证明当 $n=k+1$ 的时候, 这个论断也是正确的.

下面就应用此法并利用(1)式来证明(2)式.

1° 把(1)式改写成

$$A_1A_2+A_2A_3=A_1A_3,$$

此式表示当 $n=3$ 时, (2)式是成立的.

2° 假设当 $n=k$ 的时候(k 是一个自然数, 且 $k\geqslant 3$), (2)式成立, 即

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-1}A_k=A_1A_k$$

成立. 现在要证明当 $n=k+1$ 时, (2) 式也成立, 为此试将上式两边都加上 A_kA_{k+1}, 得

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-1}A_k+A_kA_{k+1}=A_1A_k+A_kA_{k+1}. \qquad \text{(A)}$$

但根据 $AB+BC=AC$ 有 $A_1A_k+A_kA_{k+1}=A_1A_{k+1}$. 这样把所得的 A_1A_{k+1} 代入(A)式的右边, 就得到:

$$A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_{k-1}A_k+A_kA_{k+1}=A_1A_{k+1}.$$

这就是我们所要证明的论断.

因 $n=3$ 时(2)式成立(由 1°), 故 $n=3+1=4$ 时(2)式也成立[由 2°]. 因 $n=4$ 时(2)式成立, 故 $n=4+1=5$ 时(2)式也成立. 如此继续推论下去, 可知 (2) 式对于从 3 开始的一切自然数都成立.

2. 讲义上册 15 页. 在曲线方程的概念中说, 如果一曲线与一方程间有下述关系: 1° 曲线上任何点的坐标都满足这方程; 2° 曲线外任何点的坐标都不满足这方程, 那么这方程称为该曲线的方程. 问这两个条件是否必须同时具备? 如果一方程能符合条件 1° 是否也一定能符合条件 2°? 这两个条件是否有些重复?

答: 一方程必须同时具备上述两个条件才能称为给定曲线的方程. 这两个条件分别表示不同的要求, 它们并不重复. 一方程能符合条件 1° 时不一定能符合条件 2°, 反之, 一方程能符合条件 2° 时也不一定能符合条件 1°.

第二章 直 线

3. 讲义上册 26 页第 12—13 行. 为什么说点 M_0 的坐标不能满足方程(2)?

答: 点 M_0 的坐标为 x_0, y_0. 把 x_0 及 y_0 分别代入方程(2)中的 x 及 y 时, 等号左边分式中的分母成为零, 这时分式已失去意义, 等式也就不能成立.

4. 习题 1.2.18. 求直线 $x+8y-26=0$ 与 $4x+7y+29=0$ 之间的夹角的等分线的方程. 请予提示.

答: 两直线之间的夹角的等分线可看作到两直线的距离相等

的点的轨迹. 设等分线上任意一点 M 为 (ξ, η). 根据点到直线的距离公式, 点 M 到直线 $x+8y-26=0$ 的距离为 $d_1=\left|\frac{1}{\sqrt{65}}\xi+\frac{8}{\sqrt{65}}\eta-\frac{26}{\sqrt{65}}\right|$, 点 M 到直线 $4x+7y+29=0$ 的距离为 $d_2=\left|-\frac{4}{\sqrt{65}}\xi-\frac{7}{\sqrt{65}}\eta-\frac{29}{\sqrt{65}}\right|$. 按题意得

$$\left|\frac{1}{\sqrt{65}}\xi+\frac{8}{\sqrt{65}}\eta-\frac{26}{\sqrt{65}}\right|=\left|-\frac{4}{\sqrt{65}}\xi-\frac{7}{\sqrt{65}}\eta-\frac{29}{\sqrt{65}}\right|.$$

注意, 撤去绝对值记号时, 等号两边带有相同的及不同的正负号, 如此可得两个方程:

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{65}}\xi+\frac{8}{\sqrt{65}}\eta-\frac{26}{\sqrt{65}}\right)=+\left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\xi-\frac{7}{\sqrt{65}}\eta-\frac{29}{\sqrt{65}}\right)$$

及

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{65}}\xi+\frac{8}{\sqrt{65}}\eta-\frac{26}{\sqrt{65}}\right)=-\left(-\frac{4}{\sqrt{65}}\xi-\frac{7}{\sqrt{65}}\eta-\frac{29}{\sqrt{65}}\right).$$

将上面两个方程化简后,并将 ξ 及 η 分别换成 x 及 y, 即得两条直线所夹角的两条等分线方程.

5. 指导书上册 13 页自我检查题 1. 数 m, n, l 应满足什么条件, 方程 $mx+ny+l=0$ 才是直线的法线式方程? 这题的答案如何?

答: 把 $mx+ny+l=0$ 和 $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ 相比较得 $m=\cos\alpha$, $n=\sin\alpha$, $l=-p$. 但 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, 故 m 及 n 应满足条件 $m^2+n^2=1$. 又 $p\geqslant 0$, 故 l 应满足条件 $l\leqslant 0$.

第三章 二次曲线

6. 从讲义 § 3.11 看起来, 利用轴的平移好象只能使二次方程中的一次项或常数项消失, 它也能使二次方程中的二次项消失

吗?

答：利用轴的平移不可能使二次方程中的二次项消失．因为你把 $x=x'+a$ 及 $y=y'+b$ 代入一般二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

中，可得

$$Ax'^2+Bx'y'+Cy'^2+(2Aa+Bb+D)x'+(Ba+2Cb+E)y'$$
$$+(Aa^2+Bab+Cb^2+Da+Eb+F)=0.$$

在新方程中，二次项的系数与原方程中二次项的系数相同，它们仍为 A, B, C. 因此，无论怎样选择 a 及 b, 新方程中的二次项总是和原方程中的二次项一样，它们不会消失．

7．讲义上册 63 页倒数第 4 行．"将适当的两项的系数等于零"，这里所谓"适当的两项"是否指 x' 及 y' 的一次项和常数项？那么在什么情况下令一次项的系数等于零，在什么情况下令常数项等于零呢？

答：适当的两项是指 x' 及 y' 的一次项和常数项．如果两个一次项的系数中均含有 a 或 b, 则令两个一次项的系数为零(如例3)．如果只有一个一次项的系数中含有 a 或 b 而另一个一次项的系数中不含 a 及 b 这时就令含有 a 或 b 的这个一次项的系数等于零，另外再令常数项等于零．

8．利用轴的平移来简化二次方程时，为什么要令一次项的系数或常数项为零来建立方程组？为什么要解出 a 及 b? 目的何在？

答：以这样解出的 a 及 b 为新坐标系的原点可作轴的平移(这也就是令 $x=x'+a$, $y=y'+b$ 作坐标变换)，就能使新方程中的一次项或常数项消失(因为 a 及 b 正是根据这个目标来选出的!)，这就是建立方程组并解出 a 及 b 的目的．

9．讲义上册 67 页．利用轴的旋转来简化二次方程时，为什

么"若 $A=C$, 设 $\alpha=\frac{\pi}{4}$; 若 $A\neq C$, 设 $\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A-C}$," 这样就能把二次方程中的 xy 项消去么?

答：66 页倒数第 1 行我们得到一个等式

$$B\cos 2\alpha=(A-C)\sin 2\alpha.$$

这等式是根据 $B'=0$ 得出来的. 如果选择 α 能使这等式成立, 便能使 $B'=0$, 即能使新方程中的 $x'y'$ 项消失. 因此, 若 $A=C$, 则选 $\alpha=\frac{\pi}{4}$ 便能使这等式成立. 若 $A\neq C$, 则选 $\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{B}{A-C}$ 便能使这等式成立.

10. 利用轴的旋转来简化二次方程时, 如果旋转的角度 α 不是特别角, 是否可以查三角函数表来定出 α 而不必用讲义上册 68 页上的三角公式? 又如果不查三角函数表, 那么作图时这 α 角如何作法?

答：利用轴的旋转来简化二次方程时, 旋转的角度 α 必须完全准确才能使 xy 项消失. 但三角函数表只给出近似值, 因此利用三角函数表未必能达到简化方程的目的. 利用讲义上册 68 页的三角公式把 $\sin\alpha$ 及 $\cos\alpha$ 求出后, $\operatorname{tg}\alpha$ 也就可以求出. 利用 $\operatorname{tg}\alpha$ 便可在图中作出 α 角. 例如讲义上册 68 页例 4 已求出 $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, 则 $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$. 在 xOy 平面上取点 $(4,-3)$, 将这点与原点 O 联结起来得一直线, x 轴到这直线的角便是所要作的角 α (图 1). 由此便可作出新坐标系 $x'Oy'$.

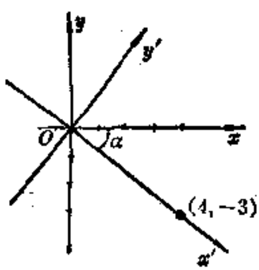

图 1

11. 讲义上册 68 页第 13—15 行. "$\sin\alpha$ 的符号和 $\operatorname{tg}2\alpha$ 的符号相同, 因为可以选择 α 在 $-\frac{\pi}{4}$

至$\frac{\pi}{4}$之间而使公式(11)成立，当α在这范围内时$\sin\alpha$和$\operatorname{tg}2\alpha$就同符号.”这几句话请解释一下.

答：当α在$-\frac{\pi}{4}$至$\frac{\pi}{4}$之间时，2α在$-\frac{\pi}{2}$至$\frac{\pi}{2}$之间，这时$\operatorname{tg}2\alpha$就可取得任何实数．因此总可以在$-\frac{\pi}{4}$至$\frac{\pi}{4}$之间选择一适当的α而使$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{B}{A-C}$成立.

又当$-\frac{\pi}{4}<\alpha<0$时，$\sin\alpha<0$，$\operatorname{tg}2\alpha<0$；当$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$时，$\sin\alpha>0$，$\operatorname{tg}2\alpha>0$．这表示$\alpha$在$-\frac{\pi}{4}$至$\frac{\pi}{4}$之间时，$\sin\alpha$和$\operatorname{tg}2\alpha$是同符号的.

12．二次方程经过简化后，曲线的形状是否也起了改变？

答：坐标轴的位置是改变了，但曲线的形状并不改变．参看§3.11的第一段话.

13．指导书上册19页自我检查题3．点(x_1, y_1)在抛物线$y^2-2px=0$的内部，点(x_2, y_2)在它的外部．问乘积$(y_1^2-2px_1)(y_2^2-2px_2)$的符号如何？请予提示.

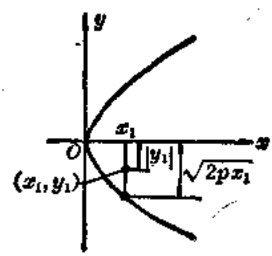

图 2

答：分$p>0$及$p<0$两种情形来讨论，每一种情形又分$x>0$及$x<0$两方面来讨论．最后可得出结论：对于抛物线内部的点(x_1, y_1)有$y_1^2-2px_1<0$，对于抛物线外部的点(x_2, y_2)有$y_2^2-2px_2>0$．因此$(y_1^2-2px_1)(y_2^2-2px_2)$的符号总是负的.

例如，当$p>0$，$x>0$时，抛物线内部的点(x_1, y_1)有$|y_1|<\sqrt{2px_1}$（图2），$y_1^2<2px_1$，$y_1^2-2px_1<0$.

第四章　极　坐　标

14. 讲义上册82页例5. 作图时 a 等于多少不知道, 则 $\frac{\pi}{2}a$, πa 等长度如何取定?

答: a 可以取定为任一正数, 例如, 为方便起见, 可以取定 $a=\frac{2}{\pi}$. 这样 $\frac{\pi}{2}a$ 便等于一个单位长度, πa 等于两个单位长度, $\frac{3\pi}{2}a$ 和 $2\pi a$ 分别等于三个及四个单位长度.

第五章　行列式及线性方程组

15. 讲义上册88页10—11行. 如果 $\Delta=0$, 但 Δ_x 及 Δ_y 中至少有一个不等于零, 则方程组(1)没有解. 为什么?

答: 见讲义上册87页倒数第7—1行.

16. 讲义上册88页第12行. 如果 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, 方程组(1)有无限多组解. 为什么?

答: 见讲义上册88页1—6行的一段.

17. 讲义上册93页倒数第3行起. "另一方面, 把行列式 Δ' 按第一行展开, 而第一行各元素的代数余子式就是对应于行列式 Δ 中第一行各元素的代数余子式 A_1, B_1, C_1. 因此, 得 $a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=\Delta'=0$."这一段请详细解释一下.

答: $$\Delta'=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_2\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_2\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$=a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1.$$

这里 $A_1=\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $B_1=-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $C_1=\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$分别为行列式 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$中对应于第一行元素 a_1, b_1, c_1 的代数余子式.

但另一方面因 Δ' 中第一行与第二行相同,根据性质 III$\Delta'=0$,因此有 $a_2A_1+b_2B_1+c_2C_1=0$.

18. 习题1.5.4.(c)计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}.$$

利用对角线法则算得结果为 $yz^2+xy^2+zx^2-x^2y-y^2z-z^2x$, 如何能得到后面所给出的答案$(x-y)(y-z)(z-x)$?

答: 先根据行列式性质 X, 以 -1 乘第二列各元素后加于第一列的对应元素, 再以 -1 乘第三列各元素后加于第二列的对应元素;然后根据行列式性质 IV 把行列式按第一行展开:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x-y & y-z & z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-y & y-z \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 \end{vmatrix}$$

$$=(x-y)(y^2-z^2)-(x^2-y^2)(y-z)$$

$$=(x-y)(y-z)(y+z-x-y)=(x-y)(y-z)(z-x).$$

19. 习题1.5.5.(c)化简

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}.$$

除了用对角线法则外,此题是否有较简的方法?

答: $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha & 1 & \cos(\alpha+\beta) \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta) & 1 \end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\alpha & 1-\cos^2\alpha & \cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta \\ \cos\beta & \cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta & 1-\cos^2\beta \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\cos^2\alpha & \cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta \\ \cos(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cos\beta & 1-\cos^2\beta \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & -\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\sin\beta & \sin^2\beta \end{vmatrix}$$

$$=\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta=0.$$

从第一步至第二步是根据性质 X, 从第二步至第三步是根据性质 IV.

20. 讲义上册 96 页倒数第 8—7 行. "根据行列式的性质 IV 和性质 V, 上式可写为:

$\Delta\cdot x=d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3$". 这几句请解释一下.

答: 根据性质 IV, $a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=\Delta$. 根据性质 V, $b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0$, $c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3=0$. 因此等式左边成为 $\Delta\cdot x+0\cdot y+0\cdot z=\Delta\cdot x$.

21. 讲义上册 98 页倒数第 1 行. "如果 $\Delta=0$, 且 Δ_x, Δ_y, Δ_z 也均为零, 这时方程组 (1) 可能没有解, 也可能有无限多组解." 这是如何知道的?

答: 因为在 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$ 的条件下, 没有解及有无限多组解的例子我们都容易举出来. 讲义上的例 1 及例 2 就是分别代表没有解及有无限多组解的例子. 既然两方面的例子都举得出来, 这就表示这两种可能性都是存在的.

22. 讲义上册 99 页 § 5.5. 方程组 (1)

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0. \end{cases}$$

这方程组有三个未知数,但只有两个方程,如何能解呢?又讲义中说 $x=y=z=0$ 是这方程组的一组解,这是如何看出来的?

答. 如果有三个数,把它们分别代入方程组(1)的 x, y, z 中去而能使方程组(1)的两个方程同时成立的,这三个数便称为方程组(1)的一组解. 如果方程组是有解的,方程组便称为是可解的. 否则便称为是不可解的. 如§5.5中的讨论所表明,上述方程组(1)是可解的,因为它有解,而且有无限多组解. "方程组中未知数的个数必须与方程的个数相同时方程组才是可解的"这种想法是没有根据的. 以 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 代入方程组(1),两个等式同时都成立,因此 $x=y=z=0$ 是方程组(1)的一组解.

23. 讲义上册102页. 关于方程组(6)的讨论中说,若这方程组的行列式 $\Delta\neq 0$,这时只有零解,为什么?

答: 见讲义上册102页倒数第10—9行.

24. 讲义上册102—103页. 关于方程组(6)的讨论中说,当方程组(6)的行列式 $\Delta=0$ 时,方程组(6)一定有非零解,为什么?

答: 在 $\Delta=0$ 的条件下,或者 Δ 的九个子行列式中至少有一个不等于零,或者九个子行列式都等于零. 除了这两种情形外不可能有其他情形. 但II, III中证明了,在上述两种情形下方程组(6)都有非零解,因此 $\Delta=0$ 时方程组(6)一定有非零解.

25. 讲义上册103页倒数6—5行. "如果这行列式等于零,而它的子行列式中至少有一个不等于零,则方程组中一个方程是其他两个的结果."子行列式等于零与否,是否看行列式 Δ 中左上角的子行列式? 又解时是否一定要取第一第二两个方程来解?

答: 不一定看 Δ 中左上角的子行列式,也不一定取第一第二

两个方程来解. 例如,方程组

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

的行列式 Δ 为:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

$\Delta=0$, Δ 的左上角的子行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=0$, 但左下角的子行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$. 解这方程组时不能取第一第二两个方程, 应该取第一第三或第二第三两个方程.

第六章 空间直角坐标及矢量代数初步

26. 讲义上册 115 页. 公式 (1) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$ 如何证明?

答: 这里可假定 λ 及 μ 均不为零, 因为如果 $\lambda=0$ 或 $\mu=0$, 则公式 (1) 的成立是很显然的. 例如, 若 $\lambda=0$, 则 $(0+\mu)\boldsymbol{A}=\mu\boldsymbol{A}=0\cdot\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$.

按照 λ 及 μ 为正或负, 证明应分四种情形来进行: $1°\ \lambda>0$, $\mu>0$; $2°\ \lambda>0$, $\mu<0$; $3°\ \lambda<0$, $\mu>0$; $4°\ \lambda<0$, $\mu<0$. 在这四种不同的情形下, 证明的方法基本上相同. 以下就第 2° 种情形加以证明, 其他情形留待读者作为习题来做.

设 $\lambda>0$, $\mu<0$. 如果 $|\lambda|=|\mu|$, 则 $\lambda+\mu=0$, 从而 (1) 式左边为零矢量; (1) 式右边则为两个长度相等但方向相反的矢量之

和，因此也是零矢量．所以当$|\lambda|=|\mu|$时，(1)式成立．以下可假定$|\lambda|\neq|\mu|$，如此就有两种不同的情形：(a)$|\lambda|>|\mu|$，(b)$|\lambda|<|\mu|$．以下分别来证在这两种情形下(1)式都成立．

(a)$\lambda>0$，$\mu<0$，$|\lambda|>|\mu|$．这时(1)式左边的矢量$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}$的模为$|\lambda+\mu|\cdot|\boldsymbol{A}|=(\lambda-|\mu|)\cdot|\boldsymbol{A}|$，而其方向则与矢量$\boldsymbol{A}$的方向相同（因$\lambda+\mu>0$）．矢量$\lambda\boldsymbol{A}$的模为$|\lambda|\cdot|\boldsymbol{A}|=\lambda|\boldsymbol{A}|$，$\lambda\boldsymbol{A}$的方向与$\boldsymbol{A}$的方向相同．矢量$\mu\boldsymbol{A}$的模为$|\mu|\cdot|\boldsymbol{A}|$，$\mu\boldsymbol{A}$的方向与$\boldsymbol{A}$的方向相反．和矢量$\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$的模为$\lambda|\boldsymbol{A}|-|\mu|\cdot|\boldsymbol{A}|=(\lambda-|\mu|)|\boldsymbol{A}|$，它的方向则与$\lambda\boldsymbol{A}$的方向相同，也就是与$\boldsymbol{A}$的方向相同．这就证明了(1)式右边的矢量等于(1)式左边的矢量．

(b) $\lambda>0$，$\mu<0$，$|\lambda|<|\mu|$．这时(1)式左边的矢量$(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}$的模为$|\lambda+\mu|\cdot|\boldsymbol{A}|=(|\mu|-\lambda)\cdot|\boldsymbol{A}|$，而其方向则与$\boldsymbol{A}$的方向相反（因$\lambda+\mu<0$）．(1)式右边的两个矢量$\lambda\boldsymbol{A}$及$\mu\boldsymbol{A}$的和矢量$\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$的模为$|\mu|\cdot|\boldsymbol{A}|-\lambda|\boldsymbol{A}|=(|\mu|-\lambda)\cdot|\boldsymbol{A}|$（因矢量$\mu\boldsymbol{A}$比矢量$\lambda\boldsymbol{A}$为长，故求$\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$的模时应该从$\mu\boldsymbol{A}$的模$|\mu|\cdot|\boldsymbol{A}|$中减去$\lambda\boldsymbol{A}$的模$\lambda|\boldsymbol{A}|$），$\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$的方向与$\mu\boldsymbol{A}$的方向相同，因此与$\boldsymbol{A}$的方向相反．这就证明了(1)式右边的矢量等于(1)式左边的矢量．

27．讲义上册115页．公式(2)$\lambda(\mu\boldsymbol{A})=\mu(\lambda\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$如何证明？

答：如果λ或μ有一为零，则$\lambda(\mu\boldsymbol{A})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{A})$及$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$都为零矢量，公式(2)成立．以下设$\lambda\neq0$，$\mu\neq0$．

要证公式(2)成立，应该证明公式(2)中的三个矢量$\lambda(\mu\boldsymbol{A})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{A})$及$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$的模彼此相等，且它们的方向也都相同．

先证模相等．$\lambda(\mu\boldsymbol{A})$的模等于$|\lambda|$乘上矢量$\mu\boldsymbol{A}$的模，因$\mu\boldsymbol{A}$的模为$|\mu|\cdot|\boldsymbol{A}|$，故$\lambda(\mu\boldsymbol{A})$的模为$|\lambda|\cdot|\mu|\cdot|\boldsymbol{A}|$．同理可证矢量$\mu(\lambda\boldsymbol{A})$的模为$|\mu|\cdot|\lambda|\cdot|\boldsymbol{A}|$．矢量$(\lambda\mu)\boldsymbol{A}$的模等于