三角级数论

（下　册）

陈 建 功 著

上海科学技术出版社

三角级数论

（下 册）

陈 建 功 著

上海科学技术出版社

内 容 提 要

本书是作者三十多年来为国内外研究生讲授三角级数论所用讲义几经修改补充整理而成。全书分上下两册，上册早在1964年出版。下册在1966年5月完稿，因受“四人帮”的干扰而稽延迄今才出版。

下册共四章：第五章至第八章。第五章富理埃级数的发散，阐述了富理埃级数和它的共轭级数、更序级数的发散问题。第六章富理埃系数，阐述了富理埃系数的性质、条件、估计等问题。第七章三角多项式的逼近论，阐述了三角多项式的逼近问题，讨论了几种逼近法和它们的偏差估计。第八章一般的三角级数，介绍黎曼的理论及以后的发展。书中包含了国内外迄至六十年代为止的一些重要成果。

本书可供高等学校数学系高年级学生，研究生，科研工作者阅读。

三 角 级 数 论

(下 册)

陈 建 功 著

上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32　印张 13.25　字数 365,400
1979年8月第1版　1979年8月第1次印刷
印数 1—45,000

书号：13119·747　定价：1.50元

目　录

第 五 章

富理埃级数的发散

1. 法都的问题

法都(P. Fatou)在他的"三角级数与泰勒级数"(Acta M., 30, 1930)的名著中，提出如下的问题：存在幂级数 $\sum \alpha_n z^n$ 在圆周 $|z|=1$ 上到处发散而满足条件 $\alpha_n=o(1)$ 的吗?

卢金(Лузин)于 1911 年，在意大利的杂志(R. C. Palermo)上，给法都的问题以肯定的回答.

卢金的幂级数 $\sum a_n z^n$ $\alpha_n=o(1)$ 而 $\sum \alpha_n z^n$ 在 $|z|=1$ 上处处发散.

置 $z=e^{i\varphi}$ $(0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi)$, $S_n(z)=1+z+\cdots+z^n$, 则

$$|S_n(z)|=\left|\frac{\sin(n+1)\dfrac{\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}\right|.$$

当 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时,

$$\frac{2}{\pi}\leqslant\left|\frac{\sin\theta}{\theta}\right|\leqslant 1.$$

因此, 在区间

$$-\frac{\pi}{n+1}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n+1}$$

上,

$$\left|\frac{\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|=(n+1)\left|\frac{\sin(n+1)\frac{\varphi}{2}}{(n+1)\frac{\varphi}{2}}\right|\left|\frac{\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|$$

$$\geqslant\frac{2}{\pi}(n+1).$$

以$n+1$个分点

$$\varphi_\nu=e^{i\frac{2\nu\pi}{n+1}}\quad(\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

将单位圆周等分成$n+1$个圆弧. 当

$$\frac{\pi}{n+1}(2\nu-1)\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{n+1}(2\nu+1)$$

时,我们见到$\left|S_n(e^{-i\frac{2\nu\pi}{n+1}}z)\right|\geqslant\frac{2}{\pi}(n+1)$. 作多项式

$$H_{(n)}(z)=S_n(z)+z^{n+1}S_n(z/\varphi_1)+z^{2(n+1)}S_n(z/\varphi_2)+\cdots$$
$$+z^{n(n+1)}S_n(z/\varphi_n),$$

$H_{(n)}(z)$的次数是$\psi(n)=n(n+2)$, 每项系数的模都等于1. 置

$$\lambda_1=\psi(0)+1=1^2,$$
$$\lambda_2=\psi(0)+\psi(1)+2=1^2+2^2,$$
$$\lambda_3=\psi(0)+\psi(1)+\psi(2)+3=1^2+2^2+3^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lambda_n=\psi(0)+\cdots+\psi(n-1)+n=1^2+2^2+\cdots+n^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

那末$z^{\lambda_n}H_{(n)}(z)$的最低次项的次数λ_n大于$z^{\lambda_{n-1}}H_{(n-1)}(z)$的最高次项的次数$\lambda_{n-1}+\psi(n-1)=\lambda_n-1$. 由是

$$H_{(0)}(z)+\frac{1}{\sqrt{1}}z^{\lambda_1}H_{(1)}(z)+\frac{1}{\sqrt{2}}z^{\lambda_2}H_{(2)}(z)+\cdots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{n}}z^{\lambda_n}H_{(n)}(z)+\cdots$$

成一z的幂级数$\sum a_nz^n$, $a_n=o(1)$.

对于单位圆周上的一点 ξ, 前述 $n+1$ 个圆弧 $(\varphi_0, \varphi_1), \cdots, (\varphi_n, \varphi_0)$ 中必有一个圆弧含有 ξ. 由于

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\,\xi^{\lambda_n+\nu(n+1)}H_{(n)}\right|\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{2}{\pi}(n+1)\right|=\infty,$$

所以 $\sum\alpha_n\xi^n$ 发散. 从而 $\sum\alpha_n z^n$ 在 $|z|=1$ 上到处发散.

置 $\alpha_n=a_n+ib_n$, 则 $\sum\alpha_n z^n$ 的实部和虚部($z=e^{i\varphi}$ 的话)分别是

$$\sum_0^\infty(a_n\cos n\varphi-b_n\sin n\varphi),\quad \sum_0^\infty(a_n\sin n\varphi+b_n\sin n\varphi).$$

两者之中, 必有一个级数, 它的发散点集的测度 $(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$ 不小于 π 的. 但是我们可以证明, 第一个三角级数几乎处处发散. 从等式

$$S_n(e^{i\varphi})=\frac{1}{2}\left\{(1-\cos(n+1)\varphi)+\frac{\sin\varphi\sin(n+1)\varphi}{1-\cos\varphi}\right\}$$
$$+\frac{i}{2}\left\{-\sin(n+1)\varphi+\frac{\sin\varphi[1-\cos(n+1)\varphi]}{1-\cos\varphi}\right\},$$

得到 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}z^{\lambda_n+\nu(n+1)}S_n(z/\varphi_\nu)$ 的实部等于

$$\frac{C}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\sin(n+1)\dfrac{\theta}{2}}{\sin\dfrac{\theta}{2}}\cos\left[\left(\theta+\frac{2\pi}{n+1}\right)\mu_n+(n+1)\frac{\theta}{2}\right],$$

这里 $|C|<2$, $\mu_n=\lambda_n+\nu(n+1)$, $\theta=\varphi-\dfrac{2\nu\pi}{n+1}$. 当

$$(\nu)_1\qquad \frac{\pi}{n+1}(2\nu-1)\leqslant\varphi<\frac{\pi}{n+1}(2\nu+1)$$

时, $|\theta|\leqslant\dfrac{\pi}{n+1}$. 因此

$$\left|\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}z^{\lambda_n+\nu(n+1)}S_n(z/\varphi_\nu)\right)-\frac{C}{\sqrt{n}}\right|$$
$$>\frac{\sqrt{n}}{4}\left|\cos\left[\left(\theta+\frac{2\pi}{n+1}\right)\mu_n+\frac{1}{2}(n+1)\theta\right]\right|$$
$$=\frac{\sqrt{n}}{4}\left|\cos\pi x\left[\nu+\left(\frac{\lambda_n}{n+1}+\frac{1}{2}\right)\right]\right|,$$

这里 $\theta=\dfrac{\pi}{n+1}x$, 从而 $-1\leqslant x\leqslant1$. 在区间 $-1\leqslant x\leqslant1$ 上, 适合

$$\left|\cos \pi x\left(\nu+\frac{\lambda_n}{n+1}+\frac{1}{2}\right)\right| \leqslant \sin \frac{1}{\log n}$$

的 x 所成之点集的测度是小于 $4\cdot\frac{1}{\log n}$ 的. 因此在区间 $(\nu)_1$ 上,相应的点集的测度小于 $\frac{16}{n+1}\cdot\frac{1}{\log n}$ $(\nu=0, 1, \cdots, n)$; 在整个圆周 $|z|=1$ 上,具有上述性质的点集,其测度小于 $\frac{16}{\log n}$. 这就是说, 圆周 $|z|=1$ 上, 除开一个测度小于 $16/\log n$ 的点集, 在其他的点 z, 成立着如下的不等式:

$$(\nu)_2 \qquad \left|\operatorname{Re}(\cdots)-\frac{C}{\sqrt{n}}\right|>\frac{\sqrt{n}}{4} \sin \frac{1}{\log n} \sim \frac{1}{4} \frac{\sqrt{n}}{\log n}$$

(对于 n,有一个 ν, $\nu=0, 1, \cdots, n$). 因此 $\sum(a_n \cos n\theta-b_n \sin n\theta)$ 几乎处处发散. 事实上,假如这个实部级数的收敛点集 $E\subset(0, 2\pi)$ 具有正的测度 $|E|$,那末取 N 满足 $\frac{16}{\log N}<|E|$,当 $n>N$ 时,由不等式 $(\nu)_2$, $|E|<\frac{16}{\log n}$. 这是与 $n>N$ 相冲突的. 由是 $|E|=0$. 我们可述如下的定理——卢金的定理:

定理 1 存在系数为 $o(1)$ 的几乎到处发散的三角级数.

那末存在几乎到处发散的富理埃级数吗? 1923 年, 柯尔莫哥洛夫 (А. Н. Колмогоров) 在数学基础 (Fund. Math., 4) 上给此问题以肯定的回答.

定理 2 存在到处发散的(勒贝格)富理埃级数.

【证明】 对应于所要富理埃级数 $\mathfrak{S}[f]$ 的 $f(\theta)$, 是利用费耶核

$$K_n(\theta)=\frac{1}{2n+2}\left[\frac{\sin (n+1)\theta/2}{\sin \theta/2}\right]^2$$

作成的. 对于 n, 选取适当大的 $m_0<m_1<\cdots<m_n$. 置 $\theta_\nu=\frac{2\nu\pi}{2n+1}$,作

$$\psi(\theta)=\frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} K_{m_\nu}(\theta-\theta_{2\nu}).$$

当 $m_j\leqslant k<m_{j+1}$ 时, $\mathfrak{S}[\psi]$ 的第 k 部分和 $S_k(\psi, \theta)$ 是

$$\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{j}K_{m_\nu}(\theta-\theta_{2\nu})$$
$$+\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=j+1}^{n}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{k}\frac{m_\nu-k+k-l+1}{m_\nu+1}\cos l(\theta-\theta_{2\nu})\right\}$$
$$=\frac{1}{n+1}\left\{\sum_{\nu=0}^{j}K_{m_\nu}(\theta-\theta_{2\nu})+\sum_{\nu=j+1}^{n}\left[\frac{m_\nu-k}{2m_\nu+2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{k+1}{m_\nu+1}K_k(\theta-\theta_{2\nu})+\sum_{l=1}^{k}\frac{m_\nu-k}{m_\nu+1}\cos l(\theta-\theta_{2\nu})\right]\right\}.$$

方括号[…]中第一和第三两项之和等于 $\frac{m_\nu-k}{m_\nu+1}D_k(\theta-\theta_{2\nu})$，第二项是正的；因此，当 $m_j\leqslant k<m_{j+1}$ 时，

$$S_k(\psi,\ \theta)\geqslant\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{m_\nu-k}{m_\nu+1}D_k(\theta-\theta_{2\nu}).$$

假如 $2k+1$ 是 $2n+1$ 的整数倍，那末

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(\theta_{2\nu}-\theta)=-\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta.$$

从而在 $2k+1$ 是 $2n+1$ 的整数倍，$m_j\leqslant k<m_{j+1}$ 的条件下，

$$S_k(\psi,\ \theta)\geqslant-\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta}{n+1}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{m_\nu-k}{m_\nu+1}\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}(\theta_{2\nu}-\theta)}.$$

取正数 δ 足够小，作区间 $I_\nu=(\theta_\nu+\delta,\ \theta_{\nu+1}-\delta)$．我们需要如下的

引理 设 $m_0,\ m_1,\ \cdots,\ m_n$ 是足够大的整数（$m_\nu<m_{\nu+1}$）．对于

$$\theta\in I_{2j}+I_{2j+1},$$

有整数 $k=k(\theta)$ 适合于

$$\frac{2k+1}{2n+1}=\text{整数},\quad m_j\leqslant k<\frac{1}{2}m_{j+1},\quad -\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\theta\geqslant\frac{1}{2}.$$

应用引理，我们得到

$$\begin{aligned}S_k(\psi,\ \theta)&\geqslant\frac{1}{2n+2}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{1}{2(\theta_{2\nu}-\theta)}\\&\geqslant\frac{1}{4n+4}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{(2n+1)/2\pi}{2\nu+2-(2j+2)}\\&=\frac{2n+1}{16\pi(n+1)}\sum_{\nu=j+1}^{n}\frac{1}{\nu-j}>C_1\log(n-j)>C_2\log n,\end{aligned}$$

$j\leqslant n-\sqrt{n}$ 的话；$C_1,\ C_2,\ \cdots$ 都是绝对常数．

取 m_0 很大，当 $\theta\in(\theta_\nu-\delta,\ \theta_\nu+\delta)$ 时，可使

$$\phi(\theta)=K_{m_0}((2n+1)\theta)\geqslant n\quad(\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n).$$

置 $f_n(\theta)=\phi(\theta)+\psi(\theta)$，那末，当 $\theta\in I_{2j}+I_{2j+1},\ 0\leqslant j\leqslant n-\sqrt{n}$ 时，

$$S_k(f_n,\ \theta)=S_k(\phi,\ \theta)+S_k(\psi,\ \theta)=\phi(\theta)+S_k(\psi,\ \theta)\geqslant C_3\log n.$$

现在于区间 $J_\nu=(\theta_\nu-\delta,\ \theta_\nu+\delta)\ (\nu=0,\ 1,\ \cdots,\ 2n)$ 上，估计 $S_k(f_n,\ \theta)$. 我们将证

$$S_{m_0}(f_n,\ \theta)\geqslant\frac{1}{2}n\quad(\theta\in(\theta_\nu-\delta,\ \theta_\nu+\delta)).$$

事实上，由于 $S_{m_0}(f_n,\ \theta)\geqslant n+S_{m_0}(\psi,\ \theta)$，所以只要证明末项 $>-C_4\log n$ 就好了. 首先假设 $\theta\in(\theta_{2h}-\delta,\ \theta_{2h}+\delta)$，$k=m_0$，那末从上面已得的结果，

$$S_{m_0}(f_n,\ \theta)\geqslant\frac{1}{n+1}\sum_{\nu=0}^{n}\frac{m_\nu-m_0}{m_\nu+1}D_{m_0}(\theta-\theta_{2\nu}).$$

由于 $D_{m_0}(\theta-\theta_{2h})>0$，所以当 $\theta_{2h}-\delta\leqslant\theta\leqslant\theta_{2h}+\delta$ 时，

$$S_{m_0}(f_n,\ \theta)\geqslant\frac{1}{n+1}\sum_{\nu\neq h}\frac{m_\nu-m_0}{m_\nu+1}D_{m_0}(\theta-\theta_{2\nu})$$

$$\geqslant-\frac{1}{n+1}\sum_{\nu\neq h}\frac{2n+1}{4\pi|h-\nu|}>-C_5\log n.$$

当 $\theta_{2h+1}-\delta\leqslant\theta\leqslant\theta_{2h+1}+\delta$ 时，我们仍能得到

$$S_{m_0}(\psi,\ \theta)>-C_6\log n,\quad S_{m_0}(f_n,\ \theta)>\frac{1}{2}n.$$

由是，对于 $[0,\ 4\pi(n-\sqrt{n})/(2n+1)]$ 中的任一 θ，存在一个 k，$k>n$，

$$S_k(f_n,\ \theta)>C\log n\quad(n>n_1).$$

这样，我们得到数列 $f_n(\theta)$，$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，它具有下述种种性质：

（i）$f_n=\psi+\varphi\geqslant0$，$\displaystyle\int_0^{2\pi}f_n(\theta)d\theta=2\pi$.

（ii）点集 $\displaystyle\sum_{j=0}^{N}(I_{2j}+I_{2j+1}+I_j)$ $(N=[n-\sqrt{n}])$ 含有 $E_n=\left[0,\ \dfrac{4\pi N}{2n+1}\right]$. 置 $\lambda_n=m_0$，$\nu_n=m_N$；当 $\theta\in E_n$ 时，有 k 适合于 $\lambda_n\leqslant k<\nu_n$ 以及

$$S_k(f_n,\ \theta)>C\log n\quad(C>0).$$

取 λ_{n+1} 足够大，使 $\lambda_{n+1}>\nu_n(n=1, 2, \cdots)$. 当 $n_\mu>\exp(\mu^4)$时，级数

$$\sum(\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

收敛；从而函数

$$f(\theta)=\sum_{\mu=1}^{\infty} f_{n_\mu}(\theta)\ (\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

具有处处发散的富理埃级数. 事实上，由于 $f_{n_\mu}(\theta)\geqslant 0$, 所以

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta=\sum_{\mu=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} f_{n_\mu}(\theta)\log(n_\mu)^{-\frac{1}{2}}\,d\theta$$

$$=2\pi\sum_{\mu=1}^{\infty}(\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}},$$

因此 $f(\theta)$ 具有富理埃级数 $\mathfrak{S}[f]$.

现在证明 $\mathfrak{S}[f]$ 处处发散. 设

$$\theta\in E_{n_M},\ u=\sum_{\mu=1}^{M-1} f_{n_\mu}\cdot(\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}},$$

$$v=f_{n_M}\cdot(\log n_M)^{-\frac{1}{2}},$$

$$f=u+v+w.$$

存在如下的 $k=k(\theta)$: $\lambda_{n_M}\leqslant k<\nu_{n_M}$. 由是，假设 $n_\mu>n_{\mu-1}^4$,

$$S_k(u,\ \theta)=u\geqslant 0,$$

$$S_k(v,\ \theta)=S_k(f_{n_M}(\log n_M)^{-\frac{1}{2}},\theta)>C(\log n_M)^{\frac{1}{2}},$$

$$|S_k(w,\ \theta)|\leqslant\frac{2k+1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{\mu=M+1}^{\infty}\frac{f_{n_\mu}(t)}{(\log n_\mu)^{\frac{1}{2}}}\right|dt$$

$$=(4k+2)\sum_{\mu=M+1}^{\infty}(\log n_\mu)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant(4k+2)(\log n_{M+1})^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)$$

$$=(8k+4)(\log n_{M+1})^{-\frac{1}{2}}.$$

我们又不妨假设 $(\log n_\mu)^{\frac{1}{2}}>\nu_{n_{\mu-1}}$, 因此

$$(8k+4)(\log n_{M+1})^{-\frac{1}{2}}<(8k+4)\nu_{n_M}^{-1}<16.$$

从而

$$S_k(f,\ \theta)=S_k(u,\ \theta)+S_k(v,\ \theta)+S_k(w,\ \theta)>C\log(n_M)^{\frac{1}{2}}-16.$$

由是可知 E_{n_M} 中一切点都是 $\mathfrak{S}[f]$ 的发散点；M 可以很大，E_M 的极限点集是 $[0, 2\pi]$，所以 $\mathfrak{S}[f]$ 处处发散.

【引理的证明】　我们探求适合条件的 k. 置 $2k+1=\rho(2n+1)$，ρ 是奇数. 我们逐一决定 m_0, m_1, $\cdots$. 设 m_0, m_1, $\cdots$, m_j 已经定好，$\theta\in I_{2j}+I_{2j+1}$. 置

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)(\theta_{2j+2}-\theta)=\sin 2\pi\rho\alpha,$$

则

$$\alpha=(2n+1)(\theta_{2j+2}-\theta)/4\pi,$$

$$\alpha\in\left[\eta,\ \frac{1}{2}-\eta\right]+\left[\frac{1}{2}+\eta,\ 1-\eta\right],$$

$$\eta=\eta(\delta,\ n).$$

设 ρ_0 是一奇数. 当 $\rho=\rho_0$, ρ_0+2, ρ_0+4, $\cdots$ 时，$2\pi\rho\alpha$ 取值

$$2\pi\rho_0\alpha,\quad 2\pi\rho_0+2\pi\alpha,\quad 2\pi\rho_0+4\pi\alpha,\quad \cdots.$$

相邻两角之差是 $2\pi\alpha$. 我们分为两个情况来处理：

$$\text{(i)}\qquad 2\alpha\in\left[2\eta,\ \frac{1}{3}\right),$$

$$\text{(ii)}\qquad 2\alpha\in\left[\frac{1}{3},\ 1-2\eta\right].$$

由于 $2\alpha\in[2\eta,\ 1-2\eta]+[1+2\eta,\ 2-2\eta]$，所以在 $[0, 2\pi]$ 上来说，只要假设 (i) 和 (ii) 两种情况就行了. 假如 (i) 成立，那末取最小的整数 ν 使 $\rho_0\alpha+2\alpha\nu$ 的分数部分 $\geqslant\frac{1}{3}$. 置 $\rho=\rho_0+2\nu$，我们就得到 $\sin 2\pi\rho\alpha\geqslant\frac{1}{2}$.

假如 α 是一无理数，那末 $s\alpha\,(s=1, 3, 5, \cdots)$ 的分数部分

$$(s\alpha)=s\alpha-[s\alpha]\quad (s=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)$$

在区间中是稠密的*). 因此，必有 $(s\alpha)$ 落入于 $\left(2\eta,\ \frac{1}{3}\right)$. 由 (i) 知有

---

*) 这就是说，当 $0<a<b<1$ 时，区间 $(a,\ b)$ 中必含有一个 $(s\alpha)$. 由连分数的理论，假如 x 是一无理数，Q 是一正整数，那末必有既约分数 $\frac{p}{q}$ 适合于 $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$，$q>Q$. 从而 $(qx)<\frac{1}{q}$. $Q>\frac{1}{a}$ 的话，必有整数 N 使 $(Nqx)\in(a,\ b)$. 置 $x=(s\alpha)$，$Nqs=s_0$，则 $(s_0\alpha)$ 是在区间 $(a,\ b)$ 中的.

奇数 ρ 适合于 $\sin 2\pi\rho\alpha \geqslant \frac{1}{2}$. 假如 α 是一既约分数 $\frac{p}{q}$, 那末当 q 是奇数时, $\rho_0 p$, $(\rho_0+2)p$, $(\rho_0+4)p$, $\cdots$, $(\rho_0+2q-2)p$ 以 q 相除的余数是两两相异的. 换句话说, 余数是 $0, 1, 2, \cdots, q-1$ 的一个排列. 当 $q \geqslant 3$ 时, $\frac{r}{q}(r=0, 1, \cdots, q-1)$ 中必有一数落入 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ 中. 假如 q 是偶数, 那末 $\frac{q}{2}$ 个数

$$\rho_0 p, \quad (\rho_0+2)p, \quad (\rho_0+4)p, \quad \cdots, \quad (\rho_0+q-2)p$$

关于 $\bmod q$ 是两两相异的, 以 q 除后的余数是 $1, 3, \cdots, q-1$ 的一个排列. 由是

$$\frac{1}{q}, \quad \frac{3}{q}, \quad \cdots, \quad \frac{q-1}{q}$$

是

$$\frac{\rho_0 p}{q}, \quad \frac{(\rho_0+2)p}{q}, \quad \cdots, \quad \frac{(\rho_0+q-2)p}{q}$$

的分数部分的一个排列. 由于

$$\frac{1}{2} \overline{\in} \left(\eta, \frac{1}{2}-\eta\right)+\left(\frac{1}{2}+\eta, 1-\eta\right),$$

所以我们可说 $q=4, 6, 8, \cdots$. 当 $q=4$ 时,

$$\frac{1}{4} \in \left(0, \frac{1}{3}\right);$$

当 $q=6$ 时,

$$\frac{1}{6} \in \left(0, \frac{1}{3}\right);$$

当 $q>6$ 时,

$$\frac{2}{q} < \frac{1}{3}.$$

总而言之, 即使在(ii)的情况, 也必有

$$(s\alpha) \in \left(0, \frac{1}{3}\right),$$

从而有奇数 ρ 适合于

$$\sin 2\pi\rho\alpha \geqslant \frac{1}{2}.$$

从 ρ 可以导出 k, 当 $m_j \leqslant k < m_j'$ 时, 我们可取 $m_{j+1} > 2m_j'$, 引理证毕, 定理 2 证明完毕.

内窦(L. Neder)于 1921 年在德国的数学年刊 84 上，证明：对于 $\alpha_n\to 0$, $\sum\alpha_n^2=\infty$ 的正数数列$\{\alpha_n\}$，存在 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=O(\alpha_n)$ 且使幂级数 $\sum c_n z^n$ 在$|z|=1$ 上处处发散．这个结果，可以写成如下的形式：

定理 3 对于如下的数列 $\{\alpha_n\}$, $\alpha_n>0$, $\sum\alpha_n^2=\infty$，必有处处发散的一对共轭三角级数，其系数适合于 $a_n=O(\alpha_n)$, $b_n=O(\alpha_n)$.

这里引入斯捷切金(С. Б. Стечкин, ИАН, 1957)的证明．证明的基础是下面的

引理 1 设 $p\geqslant 24$，固定着 φ，作 x 的三角多项式

$$D_p(x,\ \varphi)=\sum_{k=0}^{p-1}\cos(kx+\varphi),$$

则当

$$\frac{\pi}{p}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{p}$$

时，有如下的 k_1 和 k_2:

$$0\leqslant k_1<k_2<p,$$

$$\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\cos(kx+\varphi)\right|\geqslant\frac{p}{48}.$$

【证明】 置 $\psi_k=kx+\varphi$，则 $\varphi=\psi_0\leqslant\psi_1\leqslant\cdots\leqslant\psi_{p-1}=\varphi+(p-1)x$. 区间 $I=[\psi_0,\ \psi_{p-1}]$ 的长等于

$$(p-1)x\geqslant\frac{p-1}{p}\pi\geqslant\left(1-\frac{1}{24}\right)\pi=\frac{23}{24}\pi.$$

因此，I 或是包含长为 $\frac{\pi}{4}$ 的一个子区间 I_+，当 $\psi\in I_+$ 时，$\cos\psi\geqslant\frac{1}{2}$；或是 I 包含 I_-，当 $\psi\in I_-$ 时，

$$\cos\psi\leqslant-\frac{1}{2},\quad |I_-|=\frac{\pi}{4}.$$

两种情况总有一种成为事实．由于 ψ_0, $\cdots$, ψ_{p-1} 的相邻两点之差是

$$x\leqslant\frac{3\pi}{p}\leqslant\frac{\pi}{4},$$

所以 ψ_k 落在 I_+(或是 I_-) 的个数不小于

$$\frac{\pi}{4}\div x\geqslant\frac{\pi}{4}\div\frac{3\pi}{p}\geqslant\left[\frac{p}{12}\right]\geqslant\frac{p}{12}-1\geqslant\frac{p}{24}.$$

设 $\psi_k\in I_+$ 的最小和最大的 k 分别为 k_1 和 k_2，那末

$$k_2-k_1+1\geqslant\frac{p}{24},$$

$$\sum_{k=k_1}^{k_2}\cos(kx+\varphi)=\sum_{k=k_1}^{k_2}\cos\psi_k\geqslant\frac{1}{2}(k_2-k_1+1)\geqslant\frac{p}{48}.$$

同样可证在 I_- 的情况,左方的和 $\leqslant-\frac{p}{48}$.

总之

$$\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\cos(kx+\varphi)\right|\geqslant\frac{p}{48}.$$

引理证毕.

其次,我们需要下述引理 2 中的自然数列$\{p_n\}$.

引理 2 对于 $\{a_n\}$, 当 $a_n\downarrow 0$, $\sum a_n^2=\infty$ 时,存在增加的自然数列 $\{p_n\}$ 适合于

$$\frac{1}{p_n}\leqslant a_{p_1+p_2+\cdots+p_n},\quad \sum\frac{1}{p_n}=\infty.$$

【证明】 设 $N_0=0$, $N_1<N_2<\cdots<N_n$ 都是自然数. 当 N_0, N_1, $\cdots$, N_{n-1} 已经定好的时候,N_n 是适合于$(N-N_{n-1})a_N>1$ 的最小整数. N_n 是存在的, 假如不然, 那末当 $N>N_{n-1}$ 时, $(N-N_{n-1})a_N\leqslant 1$, 从而

$$a_N=O\left(\frac{1}{N}\right),$$

有背于 $\sum a_n^2=\infty$. 由是, 当 $n=1,\ 2,\ \cdots$ 时,

$$(1)\qquad (N-N_{n-1})a_N\leqslant 1\quad (N_{n-1}\leqslant N<N_n),$$
$$(N_n-N_{n-1})a_{N_n}>1.$$

我们要证

$$p_n=N_n-N_{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

是适合引理 2 中一切条件的. 首先, 由定义, $p_na_{N_n}>1$, 或是

$$\frac{1}{p_n}<a_{N_n}=a_{p_1+p_2+\cdots+p_n}.$$

从

$$p_{n+1}a_{N_{n+1}}>1\geqslant(p_n-1)a_{N_n}\geqslant(p_n-1)a_{N_{n+1}},$$

得到 $p_{n+1}>p_n-1$. 因此, $p_1\leqslant p_2\leqslant p_3\leqslant\cdots$.

最后证明 $\sum p_n^{-1}=\infty$. 由于 $p_n\alpha_{N_n}\leqslant 1+\alpha_{N_n}\leqslant 1+\alpha_1$, 所以

$$\alpha_{N_n}\leqslant\frac{1+\alpha_1}{p_n}.$$

因此

$$\sum_{N=N_n}^{N_n+p_n-1}\alpha_N^2\leqslant p_n\alpha_{N_n}^2\leqslant(1+\alpha_1)^2p_n^{-1}. \tag{2}$$

利用(1), 我们见到

$$\sum_{N_n+p_n}^{N_{n+1}-1}\alpha_N^2\leqslant\sum_{N_n+p_n}^{N_{n+1}-1}\frac{1}{(N-N_n)^2}=\frac{1}{p_n^2}+\cdots+\frac{1}{(p_{n+1}-1)^2} \tag{3}$$

$$<\sum_{k=p_n}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\frac{2}{p_n}.$$

将(2)和(3)两式相加, 得到

$$[2+(1+\alpha_1)^2]\frac{1}{p_n}>\sum_{N=N_n}^{N_{n+1}-1}\alpha_N^2.$$

关于 n 相加, 我们见到

$$\sum_{1}^{N_{n+1}}\frac{1}{p_n}>\frac{1}{2+(1+\alpha_1)^2}\sum_{N=p_n}^{N_{n+1}-1}\alpha_N^2\to\infty\quad(n\to\infty).$$

引理 2 证毕.

【定理 3 的证明】 我们利用形如

$$T_{N,p}(x,\ \gamma)=\sum_{k=0}^{p-1}\cos\left[(N+k)x-k\gamma\right],$$

$$Q_{N,p}(x,\ \gamma)=\sum_{k=0}^{p-1}\sin\left[(N+k)x-k\gamma\right]$$

的互相共轭的三角多项式来作成所要的两个三角级数. 置

$$\gamma_n=2\pi\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{p_k}-\pi\frac{1}{p_n},$$

则所要的三角级数就是

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}T_{N_{n-1},p_n}(x,\ \gamma_n),$$

$$\bar{S}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p_n}Q_{N_{n-1},p_n}(x,\ \gamma_n).$$

这两个级数都不能“并项”的. 比方说, $S(x)$的 n 项是 $N_{n-1}+p_n-1$ 阶的多项式, 由于