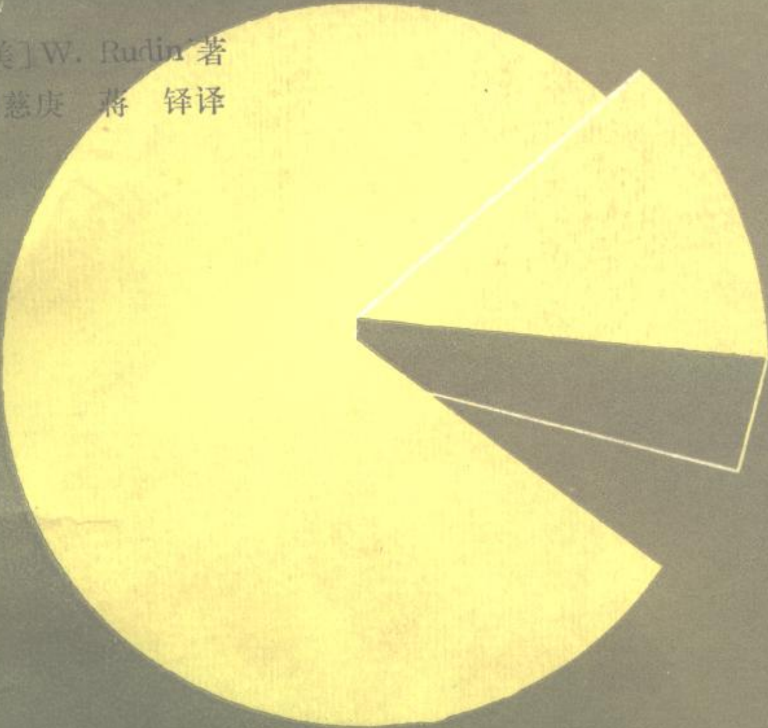
[美] W. Rudin 著
赵慈庚 蒋 铎译



数学分析原理

上册

数学分析原理

51.61

数学分析原理

上册

[美] W. Rudin 著
赵慈庚 蒋 铎译

高等教育出版社

出 版 前 言

本书是根据 W·Rudin 所著 Principles of Mathematical Analysis 一书 1976 年第三版译出的. 原书是为数学专业的高年级大学生和一年级研究生写的数学分析教本. 译本分上、下册出版.

上册包括原书前六章,内容为实、复数系、基础拓扑、数列和级数、连续性、微分和 Riemann-Stieltjes 积分.

本书可供数学专业高年级学生、研究生和教师参考.

数学分析原理

上 册

[美] W Rudin 著

赵慈庚 蒋 铎 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 5.25 字数 120,000

1979 年 4 月第 1 版 1987 年 7 月第 4次印刷

印数 44,051—47,850

书号 13010·0348 定价 0.60 元

译者的话

一九七七年春季，北京师范大学数学系为了青年教师进修，组织本系教师严士健、郝钢新、周美珂、王嵩骧、汪培庄、朱汝金、张阳春、陈公宁、蒋铎、孙永生等十人依次将W. Rudin著的Principles of Mathematical Analysis 第二版各章译成中文作为教材. 译完以后有些兄弟院校来索译稿. 人民教育出版社的同志看到此稿后，觉得有出版价值，因而建议按本书第三版重译出版. 数学系便指定我们两人担任这项工作. 我们在这译稿的基础上，从一九七八年二月到十月重译完毕.

全书共分十一章. 第一章讲实数系和复数系；把实数域定义为包容着全体有理数作为其子域、具有最小上界性的有序域；然后由此出发来讨论实数的性质，并在附录中证明了它的存在性. 第二章讲基础拓扑，介绍度量空间，从而使以后各章可以在较一般的基础上进行研究. 第三章讨论数列和级数. 第四章讲连续性. 第五章讲微分. 第六章是 Riemann-Stieltjes 积分，把 Riemann 积分作为它的特例来讲. 第七章是函数序列及函数项级数，除了讨论极限换序的问题以外，还证明了 Alzela 定理及 Weierstrass 定理. 第八章对于函数项级数作了几个专题讨论，对三角函数、指数函数、对数函数给出了解析定义，证明了代数基本定理，又介绍了 Fourier 级数和 Γ 函数. 第九章和第十章是多元函数的微分和积分，讨论了 n 维欧氏空间 R^n 上的向量函数的微分问题. 用压缩映象的不动点原理证明了反函数定理. 第十章讨论 n 维欧氏空间中的微积分基本定理. 第十一章讲 Lebesgue 积分理论，介绍了 L^2 空间.

由于译者水平有限，错误在所难免. 欢迎同志们批评指正.

赵慈庚　蒋铎

一九七九年四月，于北京师范大学数学系.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

前　　言

本书打算给大学数学专业高年级本科生或一年级研究生，作为分析课程的教科书.

这一版包含的论题，本质上与第二版相同，有些增加，有一点小的削减，还有一项重要的改组. 我希望这些变动，能使这材料更易接受，也更能吸引学习这课程的学生.

经验使我相信，一开始就从有理数建立实数，从教学法上说，并不妥当(虽然逻辑上正确). 许多学生在初学之时完全不体会这样做的必要性. 因此，将实数系做为具有最小上界性的有序域而引入，并且很快就对这个性质做了一些有益的应用. 但是 Dedekind 结构没有略去. 现在把它放在第一章的附录中，在这里一旦时机接近成熟，读者就能把它学习得津津有味.

多变量函数的材料差不多完全重写了，补了许多细节，又添了不少例题和许多启发. 反函数定理——第九章的关键项目——的证明，用压缩映象的不动点定理把它化简了. 微分形式的讨论更加详细. 加入了 Stokes 定理的一些应用.

关于其它的改变是：把 Riemann-Stieltjes 积分这一章做了一点调整，关于 Γ 函数，把读者自证的那一小段加到第八章里去了，并且有许多新的习题，其中大多数都给了十分详细的提示.

我又在几处说到了美国数学月刊或数学杂志上出现的作品，以期学生逐渐养成查阅期刊文献的习惯，这些旁涉多半是由 R. B. Burckel 的惠示.

在过去几年里，许多人，学生和教师，对于本书的前两版，给我送来了更正、评论和其它注释. 对此，我都非常尊重. 借此机会对所有给我写信的各位致以真诚的谢意.

Walter　Rudin

目　录

第一章　实数系和复数系

导引

分析学的主要概念(如收敛、连续、微分法和积分法)，必须有精确定义的数的概念作根据，才能讨论得满意．然而，我们并不讨论那些约束整数算术的公理，但假定读者已熟悉了有理数(即形如m/n的数，这里m和n都是整数且$n\neq 0$)．

有理数系不论作为一个域来说，还是作为一个有序集(这些术语将在第1.6段与1.12段中定义)来说，对于很多意图殊感不足．例如，没有有理数p能满足$p^2=2$．(我们马上就要证明这点)．这就势必引进所谓“无理数”，它们时常被写成无穷十进小数的展开式，而认为相应的有限十进小数是“逼近”它们的．例如序列

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \cdots$$

“趋于$\sqrt{2}$”．但是，若不先把无理数$\sqrt{2}$明确地规定了，必将发生疑问：上面这个序列“趋于”的是什么呢？

所谓的“实数系”建立起来以后，这类的问题马上就得到回答．

1.1　例　我们现在证明方程

$$p^2=2 \tag{1}$$

不能被任何有理数p满足．倘若有那样一个p，我们可以把它写成$p=m/n$，其中m及n都是整数，而且可以选得不都是偶数．假定我们这样做了．于是由(1)式得出

$$m^2=2n^2, \tag{2}$$

这表明m^2是偶数，因此m是偶数(如果m是奇数，那么m^2将是奇数)，因而m^2能被4整除．于是(2)的右边能被4整除，因而n^2是

偶数，这又说明 n 是偶数.

假定(1)式成立，就导致 m 及 n 都是偶数的结论，这与 m 及 n 的选择相矛盾. 因此，对于有理数 p，(1)式不能成立.

现在我们把这种情况考察得再稍微严密一些. 令 A 是使 $p^2<2$ 的一切正有理数 p 的集，B 是使 $p^2>2$ 的一切正有理数 p 的集. 我们来证明 A 里没有最大数，B 里没有最小数.

更明确地说，对于 A 中的每个 p，能在 A 中找到一个有理数 q，而 $p<q$，并且对于 B 中的每个 p，能在 B 中找到一个有理数 q，而 $q<p$.

为了做这件事，给每个有理数 $p>0$，配置一个数

$$q=p-\frac{p^2-2}{p+2}=\frac{2p+2}{p+2}. \tag{3}$$

于是

$$q^2-2=\frac{2(p^2-2)}{(p+2)^2}. \tag{4}$$

如果 p 在 A 中，那么 $p^2-2<0$，(3)式说明 $q>p$，而(4)式说明 $q^2<2$，因而 q 在 A 中.

如果 p 在 B 中，那么 $p^2-2>0$，(3)式说明 $0<q<p$，而(4)式说明 $q^2>2$. 因而 q 在 B 中.

1.2 评注 上面这番讨论的目的就是说明：尽管两个有理数之间还有另外的有理数(因为，如果 $r<s$，那么 $r<\frac{r+s}{2}<s$)，有理数系还是有某些空隙. 而实数系填满了这些空隙. 这就是实数系在分析学中能起基础作用的主要原因.

为了说明它和复数系的结构，我们先简单地讨论一下有序集和域的一般概念.

这里有一些在全书中要用的标准的集论的术语.

1.3 定义 若 A 是任意集(它的元素可以是数，也可以是其

它物件），我们用 $x\in A$ 表示 x 是 A 的一个元（或元素）.

如果 x 不是 A 的元，就写成 $x\notin A$.

不包含元素的集称为空集. 至少包含一个元素的集，叫做非空集.

如果 A、B 都是集，并且如果 A 的每个元素是 B 的元素，就说 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 此外，如果 B 中有一个元素不在 A 中，就说 A 是 B 的真子集. 注意，对于每个集 A，有 $A\subset A$.

如果 $A\subset B$，并且 $B\subset A$，就写成 $A=B$. 不然就写成 $A\neq B$.

1.4 定义 在第一章，自始至终用 Q 表示所有有理数构成的集.

有序集

1.5 定义 设 S 是一个集. S 上的序是一种关系，记作 $<$，它有下面的两个性质：

(i) 如果 $x\in S$ 并且 $y\in S$，那么在

$$x<y,\ x=y,\ y<x$$

三种述语之中，有一种且只有一种成立.

(ii) 如果 $x, y, z\in S$，又如果 $x<y$ 且 $y<z$，那么 $x<z$.

述语"$x<y$"可以读作"x 少于 y"或"x 小于 y"或"x 先于 y".

用 $y>x$ 代替 $x<y$，时常是方便的.

记号 $x\leqslant y$ 指的是 $x<y$ 或 $x=y$，而不细说二者之中谁能成立. 换句话说，$x\leqslant y$ 是 $x>y$ 的否定.

1.6 定义 在集 S 里定义了一种序，便是一个有序集

例如，如果对于任意两个有理数 r, s，规定当 $s-r$ 是正有理数时表示 $r<s$，Q 就是一个有序集.

1.7 定义 设 S 是有序集，而 $E\subset S$. 如果存在 $\beta\in S$，而每个 $x\in E$，满足 $x\leqslant\beta$，我们就说 E 上有界，并称 β 为 E 的一个上界.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

用类似的方法以定义下界(把$\leqslant$换成$\geqslant$就行了).

1.8 定义 设S是有序集,$E\subset S$,且E上有界. 设存在一个$\alpha\in S$,它具有以下性质:

(i) α是E的上界.

(ii) 如果$\gamma<\alpha$, γ就不是E的上界.

便把α叫做E的最小上界[由(ii)来看,显然最多有一个这样的α]或E的上确界,而记作

$$\alpha=\sup E.$$

类似地可定义下有界集E的最大下界或下确界. 述语

$$\alpha=\inf E$$

表示α是E的一个下界,而任何合于$\beta>\alpha$的β,不能是E的下界

1.9 例

(a) 把例1.1 中的集A与B看作有序集Q的子集. 集A上有界. 实际上,A的那些上界,刚好就是B的那些元. 因为B没有最小的元,所以A在Q中没有最小上界.

类似地,B下有界: B的所有下界的集,由A和所有合于$r\in Q$并且$r\leqslant 0$的r组成. 因为A没有最大的元,所以B在Q中没有最大下界.

(b) 如果$\alpha=\sup E$存在. 这α可以是E的元,也可以不是E的元. 例如,假设E_1是所有合于$r\in Q$及$r<0$的集. 假设E_2是所有合于$r\in Q$及$r\leqslant 0$的集. 于是

$$\sup E_1=\sup E_2=0,$$

而$0\notin E_1$, $0\in E_2$.

(c) 假设$n=1,2,3,\cdots$, E由所有数$1/n$组成,那么,$\sup E=1$,它在E中,但$\inf E=0$不在E中.

1.10 定义 有序集S,如果具有性质:

若$E\subset S$, E不空,且E上有界时,$\sup E$便在S里. 就说S有

最小上界性.

例1.9(a)说明Q没有最小上界性.

我们现在来证明，在最大下界与最小上界之间，有密切的关系，也就是有最小上界性的每个有序集，一定也有最大下界性.

1.11 定理 设S是具有最小上界性的有序集，$B\subset S$，B不空且B下有界. 令L是B的所有下界的集. 那么

$$\alpha=\sup L$$

在S存在，并且$\alpha=\inf B$.

特别地说就是$\inf B$在S有在

证 因B下有界，L不空. L刚好由这样一些$y\in S$组成，它们对于每个$x\in B$，满足不等式$y\leqslant x$. 可见每个$x\in B$是L的上界. 于是L上有界，因而我们对S的假定意味着S里有L的上确界；把它叫做α.

如果$\gamma<\alpha$，那么γ不是L的上界(参看定义1.8)，因此$\gamma\notin B$. 由此对于每个$x\in B$，$\alpha\leqslant x$. 所以$\alpha\in L$.

如果$\alpha<\beta$，由于α是L的上界，必然$\beta\notin L$.

我们已证明了：$\alpha\in L$. 而当$\beta>\alpha$时，就有$\beta\notin L$. 换句话说，α是B的下界，但若$\beta>\alpha$，β就不是B的下界. 这就是说$\alpha=\inf B$.

域

1.12 定义 域是一个集F，它具有两种运算，叫做加法和乘法，这些运算满足所谓“域的公理”(A)，(M)，及(D)：

(A) 加法公理

(A_1) 如果$x\in F$，$y\in F$，它们的和$x+y$在F中.

(A_2) 加法是可交换的：对于所有$x, y\in F$，

$$x+y=y+x.$$

(A_3) 加法是可结合的：对于所有 $x, y, z\in F$,

$$(x+y)+z=x+(y+z).$$

(A_4) F 含有元素 0, 对于每个 $x\in F$, 有

$$0+x=x.$$

(A_5) 对应于每个 $x\in F$, 有一元素 $-x\in F$, 合于

$$x+(-x)=0.$$

(M) 乘法公理

(M_1) 如果 $x\in F, y\in F$, 它们的乘积 xy 在 F 中。

(M_2) 乘法是可交换的：对于所有的 $x, y\in F$,

$$xy=yx.$$

(M_3) 乘法是结合的：对于所有的 $x, y, z\in F$,

$$(xy)z=x(yz).$$

(M_4) F 含有元素 $1\neq 0$, 对于每个 $x\in F$,

$$1x=x.$$

(M_5) 如果 $x\in F$ 且 $x\neq 0$, 存在元素 $1/x$, 合于

$$x(1/x)=1.$$

(D) 分配律

$$x(y+z)=xy+xz$$

对于所有 $x, y, z\in F$ 成立.

1.13 评注

(a) 人们经常(在域中)用

$$x-y, \frac{x}{y}, x+y+z, xyz, x^2, x^3, 2x, 3x, \cdots$$

以代替

$$x+(-y), x\cdot\left(\frac{1}{y}\right), (x+y)+z, (xy)z, xx, xxx, x+x,$$

$$(x+x)+x, \cdots$$

(*b*) 如果在所有有理数的集 Q 里, 使加法与乘法采取通常的意义, 域的公理显然适用. 因此, Q 是一个域.

(*c*) 虽然详细地研究域(或其它的代数结构)并不是我们的目的, 但是证明 Q 的某些众所周知的性质是域公理的推论, 还是值得一做的; 一旦这样做了, 就不需要对实数和复数再去证明这些性质了.

1.14 命题 加法公理包含着以下几个述语:

(*a*) 如果 $x+y=x+z$, 就有 $y=z$;

(*b*) 如果 $x+y=x$, 就有 $y=0$;

(*c*) 如果 $x+y=0$, 就有 $y=-x$;

(*d*) $-(-x)=x$.

(*a*)是消去律. (*b*)中 y 的存在是(A_4)假定了的, (*b*)断定它的唯一性; (*c*)中 y 的存在, 由(A_5)假定, (*c*)断定其唯一性.

证 $x+y=x+z$ 时, (A)组公理可以给出

$$y=0+y=(-x+x)+y=-x+(x+y)$$
$$=-x+(x+z)=(-x+x)+z=0+z=z.$$

(*a*)得证. 在(*a*)中取 $z=0$ 就是(*b*). 在(*a*)中取 $z=-x$ 就是(*c*).

因 $-x+x=0$, (*c*)(用 $-x$ 代替 x, x 代替 y)就能产生出(*d*).

1.15 命题 乘法公理包含着以下几个述语:

(*a*) 如果 $x\neq 0$, 并且 $xy=xz$, 就有 $y=z$;

(*b*) 如果 $x\neq 0$, 并且 $xy=x$, 就有 $y=1$;

(*c*) 如果 $x\neq 0$, 并且 $xy=1$, 就有 $y=1/x$;

(*d*) 如果 $x\neq 0$, 就有 $1/(1/x)=x$.

证明与命题 1.14 的证明类似, 所以从略.

1.16 命题 对于任何 $x, y, z\in F$, 域公理包含着以下的述语

(*a*) $0x=0$

(*b*) 如果 $x\neq 0$, 且 $y\neq 0$, 那么 $xy\neq 0$.

(c) $(-x)y=-(xy)=x(-y)$.

(d) $(-x)(-y)=xy$.

证 $0x+0x=(0+0)x=0x$. 因此，由 1.14(b)有 $0x=0$，而(a)成立.

次设 $x\neq 0, y\neq 0$ 而 $xy=0$. 于是由(a)能推出

$$1=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)xy=\left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}\right)0=0.$$

矛盾. 于是(b)成立.

(c) 中前一等式，可由

$$(-x)y+xy=(-x+x)y=0y=0$$

结合 1.14(c)得来；(c)的后半可用同样方法证明. 最后，由(c)及 1.14(d)得

$$(-x)(-y)=-[x(-y)]=-[-(xy)]=xy.$$

1.17 定义 有序域是一个域 F，又是合于下列两条件的有序集

(i) 当 $x, y, z\in F$ 且 $y<z$ 时，$x+y<x+z$；

(ii) 如果 $x, y\in F$，$x>0$ 且 $y>0$，那么 $xy>0$.

如果 $x>0$，就说 x 是正的；如果 $x<0$，就说 x 是负的.

例如，Q 是有序域.

凡属研究不等式关系时所施行的一切熟知的规则，可以用到任何有序域上：用正(负)量乘时，保留(逆转)不等式的方向，平方不为负数，等等. 下面的命题罗列了其中的一些.

1.18 命题 在每个有序域中，下面几条述语都正确：

(a) 如果 $x>0$，那么 $-x<0$；反过来也对.

(b) 如果 $x>0$ 而 $y<z$，那么 $xy<xz$.

(c) 如果 $x<0$ 而 $y<z$，那么 $xy>xz$.

(d) 如果 $x\neq 0$，那么 $x^2>0$. 特别有 $1>0$.

(*e*) 如果 $0<x<y$, 那么 $0<1/y<1/x$.

证

(*a*) 如果 $x>0$, 那么 $0=-x+x>-x+0=-x$, 因此, $-x<0$. 如果 $x<0$, 那么 $0=-x+x<-x+0$; 因此 $-x>0$. 这就证明了 (*a*).

(*b*) 因为 $z>y$, 就有 $z-y>y-y=0$, 因此, $x(z-y)>0$, 所以

$$xz=x(z-y)+xy>0+xy=xy.$$

(*c*) 由 (*a*)、(*b*) 及命题 1.16(*c*)

$$-[x(z-y)]=(-x)(z-y)>0,$$

因此 $x(z-y)<0$, 而得 $xz<xy$.

(*d*) 如果 $x>0$, 由定义 1.17 的第 (ii) 部分就得出 $x^2>0$. 如果 $x<0$, 那么 $-x>0$, 因此 $(-x)^2>0$. 但是根据命题 1.16(*d*), $x^2=(-x)^2$. 因为 $1=1^2$, $1>0$.

(*e*) 如果 $y>0$, 而 $v\leqslant 0$, 那么 $yv\leqslant 0$. 但 $y\cdot(1/y)=1>0$. 因此 $1/y>0$. 类似地可得 $1/x>0$. 如果把不等式 $x<y$ 两端乘以正量 $(1/x)(1/y)$, 就得到 $1/y<1/x$.

实数域

现在叙述存在定理, 这是本章的核心

1.19 定理 具有最小上界性的有序域 R 存在.

此外, R 包容着 Q 作为其子域.

第二句话表示 $Q\subset R$ 而且把 R 中的加法与乘法运算用于 Q 的元时, 与有理数的普通运算相一致; 又正有理数是 R 中的正元素.

R 的元叫做实数.

定理 1.19 的证明相当地长, 而且有几分烦琐, 所以把它放在第一章的附录中了. 这证明实际是从 Q 来构造 R.

不用费多大劲, 就能从这种构造法提炼出下一定理来. 但是

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com