数的趣谈

〔美〕I. 阿西莫夫 著

洪丕柱 周昌忠 译

黄绍元 校

上海科学技术出版社

ASIMOV ON NUMBERS

Isaac Asimov

Doubleday & Company, Inc.

1977, New York

数 的 趣 谈

〔美〕I. 阿西莫夫 著

洪丕柱 周昌忠 译

黄 绍 元 校

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所发行 上海市印刷四厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 8.625 字数 190,000

1980 年 12 月第 1 版 1980 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—80,000

书号: 13119·861 定价: (科三) 0.70 元

本书各篇文章原载于《幻想和科学小说杂志》。
各篇的发表日期如下：

关于无限大种种	1959 年 9 月
π 点滴	1960 年 5 月
几何作图的工具	1960 年 9 月
并非虚幻的虚数	1961 年 3 月
这就是它的大小	1961 年 10 月
加上前缀	1962 年 11 月
二进制，十进制，及其互换	1962 年 12 月
T 形数	1963 年 8 月
忘掉它！	1964 年 3 月
从无开始计数	1964 年 7 月
我们历年的日	1964 年 8 月
从头开始	1965 年 1 月
感叹号！	1965 年 7 月
水，水，到处都有——	1965 年 12 月
质子计算器	1966 年 1 月
地球上的高处和低处	1966 年 2 月
地球上的岛	1966 年 6 月

目　　录

第一部分　数和计数

1. 从无开始计数 ……2
2. 二进制，十进制，及其互换 ……18
3. 感叹号！ ……34
4. T 形数 ……52
5. 关于无限大种种 ……68

第二部分　数和数学

6. π 点滴 ……86
7. 几何作图的工具 ……101
8. 并非虚幻的虚数 ……115

第三部分　数和度量衡

9. 忘掉它！ ……131
10. 加上前缀 ……147

第四部分　数和历法

11. 我们历年的日 ……165
12. 从头开始 ……179

第五部分　数和生物学

13. 那就是它的大小 ……196

第六部分　数和天文学

14. 质子计算器 ……212

第七部分　数和地球

15．水，水，到处都有—— ……………………………………226
16．地球上的高处和低处 ……………………………………240
17．地球上的岛 ……………………………………255

第 一 部 分

数 和 计 数

1 从无开始计数

罗马数字，即使经过五个世纪废弃之后，对于一个有好奇心的人来说，似乎仍有一种特别的迷惑力.

依我看来，罗马数字之所以吸引人，其理由不外乎它们颇能令人自我陶醉. 当你走过一块刻有“立于 MCMXVIII”字样的街角石的时候，它会给你一种感染力，使你情不自禁地自我感叹一番：“啊，原来是建于一九一八年”. 不论理由如何，罗马数字确是值得深入探讨的.

关于数和计数的概念，以及较小的和较常用的数字的名称，可以追溯到史前时代. 难以相信，今日地球上任何一个部落，不论其如何原始，会对数没有产生过某种概念的.

在发明书写之后(它标志着“史前”和“有史”的分界线)，随之而来的一步就是必须选取数字进行书写. 当然，对表示一定数目的词设想出一些书写记号来是很容易的，正象设想出其他单词一样简单. 在英文中，我们可以把一只手上的手指数目写成“five”，而把四肢所有的趾指数目写成“twenty”.

然而，很久以前，国王的税吏、史官、文牍们在游戏中就发现，数具有有序的特点. 它具有一种固定的计数方法，并且对任何一个数都能用计数方法来达到加以定义. 因此，对于需要计数到特定的数，为什么不制定一些记号呢？

例如，如果用 表示“一”，用 ″ 表示“二”，用 ‴ 表示“三”，那么，我们就能毫无困难地得出用给定记号标示的数. 可以理解，比如记号 ′′′′′′′′′′′′′′′′′′′′′′′ 表示“二十三”. 而且，这样的

记号是通用的，不论用何种语言来计数，也不论你的特殊语言用怎样的声音来念这个数，这个符号总是表示“二十三”。

把过于众多的记号记写成长长的没有间断的一行，就会使阅读发生困难，这就自然需要把它分成较小的组．如果我们习惯于用一只手来计数的话，那就很自然地把记号分成五个一组．这样，“二十三”就可以写成 ′′′′′ ′′′′′ ′′′′′ ′′′′′ ′′′．如果我们更老练一些，用两只手同时作计数的话，我们就可以把它写成 ′′′′′′′′′′ ′′′′′′′′′′ ′′′．如果我们同时又光着脚，把脚趾也用上的话，我们又可以把数分成以二十为一组．

所有这三种将数的符号分成组以便于使用的方法，在人类的各种记数方法中都留下了它们的痕迹，但最受人欢迎的是以十个为一组．因为总的说来，以二十个符号为一组毕竟太多，难于一目了然，而以五个符号为一组又在数目较大时造成过多的组数．这样，以十个为一组就成了比较令人喜爱的折衷．

接着，用一个独立的记号来表示以十为一组的数看来是一个很自然的想法．在可以把一个独立的记号，比如–，用于这个目的时，就没有理由每次都非得把十个为一组的数写成 ′′′′′′′′′′．因此，“二十三”就可以写成 – – ′′′．

一旦这样开了头，下一步就很清楚了．在以十为一组的数的组数达到十个即一百时，就可以引入另一个符号，比如＋．十个一百，即一千，可以用＝来表示，等等．这样“四千六百七十五”这个数就可以写为：

＝＝＝＝＋＋＋＋＋＋– – – – – – – ′′′′′

为了使这样的一组记号更易于一目了然，我们可利用眼睛能识别图案的有利条件（大家知道，人们是怎样根据图案来说出一副纸牌或一对骰子中的数字的）．因此，我们又可以把

“四千六百七十五”写成：

$$\begin{array}{r} = = + + + - - -''' \\ - \\ = = + + + - - -'' \end{array}$$

事实上，古代巴比伦人正是用这种方法来书写数字的，不过他们是用楔形符号来表示的.

希腊人在其文明发展的较早阶段曾使用过一种与巴比伦人类似的方法．但是稍后，另一种方法代之而流行起来．他们创造使用了另一种有序法——字母表中的字母.

把字母表和记数方法联系起来是很自然的．我们在儿童时代几乎同时被教会使用这两种方法，对外界对象的这两种有次序的方法很自然地趋于吻合．“a, b, c, d…”的序列念起来就同“一,二,三,四…”同样顺口，彼此之间很容易地相互代替.

如果我们使用毫无区别的符号，如 ''''''' 来表示“七”，那么该符号的所有组成部分都是相同的，而且如果该符号的意义仅表示是“七”而无其他别的意义的话，则所有的符号都必须一个不漏地包括进去；另一方面，如果“ABCDEFG”代表“七”(数一下字母就可以知道)，那么，由于每个符号各不相同，只需要写出最后一个字母就行了．你不会弄错 G 是字母表里的第七个字母这个事实，因此它代表“七”．用此方法，只以一个部分组成的符号便可起到由七个部分组成符号的作用．此外，''''''(六)看起来与 '''''''(七)极为相象，而 F(六)看上去却与 G(七)截然不同.

当然，希腊人使用的是他们自己的字母表．这儿，让我们用自己的字母表来作一个完整的演示：A＝一，B＝二，C＝三，D＝四，E＝五，F＝六，G＝七，H＝八，I＝九，J＝十.

我们可以让字母 K 接下去等于“十一”．照这样下去的

话，我们的字母表只能帮助我们数到"二十六"。而希腊人有一个比较好的方法：既然巴比伦人的以十为一组的概念已留下了它的痕迹，如果J＝十，那J除了等于十个客体外，而且也表示以十分成的一个组，那么为什么不继续用以后的字母来表示十位数呢？

换句话说，J＝十，K＝二十，L＝三十，M＝四十，N＝五十，O＝六十，P＝七十，Q＝八十，R＝九十．接着我们可以继续来记写百位数：S＝一百，T＝二百，U＝三百，V＝四百，W＝五百，X＝六百，Y＝七百，Z＝八百．这样就可以很方便地一直记到九百，但我们已把全部字母都用完了．不过，在以前的字母表里，表示"and"的符号"&"有时排在字母表的末尾，因此我们可以说，&＝九百．

再换句话说，最前面的九个字母表示一到九的个位数；接下来的九个字母表示一到九的十位数；最后九个字母表示一到九的百位数（在古希腊的字母表中只有二十四个字母，但总共需要二十七个字母，因此希腊人使用了三个古体字母来凑满该表）．

这个方法与巴比伦人使用的方法相比，有优点也有缺点．优点之一是任何一个千以内的数字均可用三个符号来表示．比如，用刚才以字母表建立起来的方法来表示六百七十五是XPE，八百十六是ZJF．

希腊记数方法的一个缺点是，为了使用一千以内的数字，必须牢牢记住二十七个不同符号的意义；而在巴比伦记数方法中，只须记住三个不同的符号．

况且，希腊的记数方法在字母表中的字母用完时就自然而然地到了尽头．九百九十九（&RI）是在不引进特别的记号来表示千位数、万位数等等时，所能写出的最大的数字．关于

这个问题，将在以后再回过头来加以叙述.

希腊记数方法的一个相当含糊不清的缺点是，相同的一些符号既用于数字又用于单词，这在意义上就很容易使人混淆. 比如，希腊罗马时代的犹太人，采用了希腊表示数字的方法后(当然是使用了希伯来字母表)，很快就陷入困境."十五"这个数字自然能写作"十-五"，然而，在希伯来字母表中，"十-五"恰好表示了上帝的一个应予避讳的名字的简称，犹太人对于亵渎神明是特别犯忌的，就决定不用"十-五"而用"九-六"来表示"十五"这个数.

更糟的是，在希腊-希伯来记数方法中，单词看上去就好象一个数字. 比方说，就用我们自己的字母表来说吧，WRA表示"五百九十一"，在字母表数字方式中，符号的排列次序通常是不严格的. 虽然，正如我们将要看到的，这种情况对同样是字母表式的罗马数字来说是不正确的，而 WAR 同样可以意味着"五百九十一"(如果愿意的话，我们毕竟可以把它说成是"五百一和九十" "five hundred one-and-ninety"). 因此，很容易让人相信，在"五百九十一"这个数字里面，似乎包含着一些有关军事的、尚武的、和预兆不吉祥的涵义①.

犹太人出自虔诚的要求，把神的语言抄录得十分精确，他们对圣经中的每一个音节都细加推敲，因而在所有的单词中都看到了数字. 在新约时代，在圣经内出现了数字之间内在关系的一整套玄秘系统. 这就是犹太人能达到最接近于数学的缘由，他们把这种数字化的单词称为 gematria，这个词系希腊词 geometria(几何学)一词的讹传，我们今天把它称作"数字秘义学(numerology)".

① 英语 WAR 的词义是"战争". 译者注.

甚至直到今天，还有一些可怜虫，把数字与不同的字母相联系，以此来判断哪些名字有福气，哪些名字不吉利，哪个男孩应当娶哪个姑娘，等等．这当然是一种令人可笑的伪科学．

gematria的一部分在后来的历史上留下了影响．gematria的这些遗迹可在新约的最后一册《圣·约翰启示录》中找到，这本书用一种不畏文字狱的隐讳笔调写成．在我看来，文笔欠明晰的原因是十分显然的．《启示录》的作者曾对罗马政府加以抨击，如果他把话说得太明白，那就等于公开给自己加上了一个叛逆罪，便可招致钉死在十字架上的刑罚．因此，他便设法用这样的方式来写，使文章的意义对他的"圈内"读者看来是十分明了，而在罗马当局看来则是毫无意义的．

在第十三章中，作者把群兽说成是残暴的政权，在第十八节中他说道："这儿就是智慧，让懂得的人来算出群兽之数；因为符合群兽之数的人，他的数目等于六百六十六．"

很明显，作这样的安排，并非要把这种 gematria 的伪科学说成是神明的赞许，而仅仅是对该章中隐匿的比喻所指的那个具体的人物作一番含沙射影而已．现在差不多已经弄清，《启示录》写于尼罗(Nero)② 对基督徒实行第一次大迫害后仅仅几十年．如果把尼罗的名字(尼罗·凯撒)用希伯来文来拼写，那么各字母所代表的数字之和恰恰就是六百六十六，即"群兽之数"．

当然，也可能有别种解释．事实上，如果《启示录》在任何时候都被认为与其在写成的特定时代具有同样意义的话，它也可能涉及后来的一些反基督运动．由于这一原因，世代相袭，人们一直试图表明，用适当的语言，在姓氏的拼法上玩弄某些手法，并利用把字母定为适当的数字，就可能使某些私敌

② 尼罗，罗马暴君，公元 37～68 年在位．译者注．

带上群兽之数.

如果基督徒能把这个方法用于尼罗，那么只要犹太人愿意，他们自己也可能在下一个世纪把这个方法轻而易举地用于哈德连 (Hadrian)③. 而在五个世纪之后，这个方法又可(并确已)用于穆罕默德 (Mohammed)④. 在宗教改革时期⑤天主教对马丁·路德 (Martin Luther)⑥的名字作了计算，发现它也符合群兽之数；清教徒也曾以此回敬，对几位教皇作了同样的计算，发现同样情况.

其后，宗教斗争为民族斗争所取代，通过适当的方法，亦曾算出拿破仑·波拿巴(Napoleon Bonaparte)⑦和威廉二世(William II)⑧符合群兽之数. 更有趣的是，用我自己的字母表数字方法，只需几分钟时间，就可算出海尔·阿道尔夫·希特勒(Herr Adolf Hitler)也符合群兽之数，只需在其名字中添加一个1便成⑨.

罗马的记数符号的方法与希腊及巴比伦的方法均有相似之处. 罗马人象希腊人一样使用了字母表里的字母，然而他们并不是按次序来使用它们的，而仅仅使用其中的几个字母，他们把这些字母每当需用时总是重复使用，这正象巴比伦方法一样. 但与巴比伦方法的不同之处在于，罗马人并不每逢数字递增十个就发明一个新的符号，而是(更原始地)数字每

③ 哈德连，罗马皇帝，公元117～138年在位. 译者注.

④ 穆罕默德，阿拉伯先知，伊斯兰教创始人，公元570～632年. 译者注.

⑤ 十六至十八世纪欧洲普遍发生的对旧教的改革运动. 译者注.

⑥ 马丁·路德，德国神学家，宗教改革领袖，公元1483～1546年. 译者注.

⑦ 拿破仑，法国皇帝，公元1804～1815年在位. 译者注.

⑧ 威廉二世，德国皇帝，公元1888～1918年在位. 译者注.

⑨ 希特勒，纳粹党党魁，德国法西斯头子，公元1889～1945年. 其全名为海尔·阿道尔夫·希特勒 (Herr Adolf Hitler)，在 Adolf 中添加一个1就变成 Adollf，便符合群兽之数. 译者注.

增五个就使用一个新的符号.

这样,从头开始,"一"的符号是I,"二"、"三"和"四"的符号便能写成II, III和IIII.

罗马数字

这是伟大的天文学家约翰·刻卜勒(Johann Kepler)[10]为三十年战争期间的帝国将军阿尔勒烈希脱·冯·瓦伦斯坦(Albrecht von Wallenstein)所绘的一张算命天宫图(刻卜勒为谋生而绘天宫图,正如现代一位演员,即使是位优秀演员,也可能兼做点生意一样).

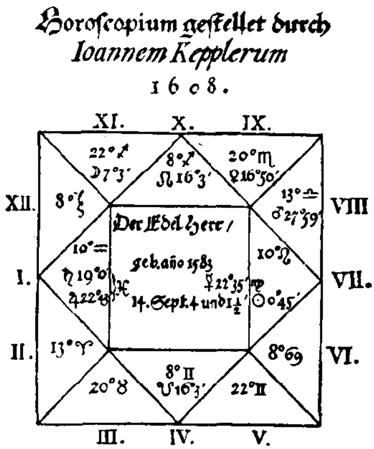

图1 刻卜勒所绘的天宫图

尽管在天宫图上所用数字大多是阿拉伯数字,但十二宫的顺序仍用罗马字体,以获得更为强烈的印象. 罗马数字,在人们认为它们在计算中无用而加以废弃之后,几世纪来,仍然是一种令人肃然起敬的标记.

虽然我们自己熟悉的数系是以10为基数且以10为幂的,罗马数字却以5为基数,对1、5、10、50、100、500和1000都制定了特殊的符号,很明显,这是因为我们每只手有五个指头,两只手共有十个指头的缘故.

在赤脚的社会里,不需一个多大的智力跃进即可确立以二十为基数的数字系统. 中美洲的玛雅人[11]用十和二十来计数,并对20、400(20^2)、8,000(20^3)、160,000(20^4)等数字作出特别的符号.

虽然在西方的传统中并无正式的20进制,但我们仍以"score"(二

[10] 约翰·刻卜勒,德国天文学家,公元1571~1630年. 译者注.

[11] 玛雅人,中美洲古民族,曾有相当高度的文明. 译者注.

十)来计数，当我们说到八十七时，常说"four score and seven"(四个二十加七). 事实上以二十来计数是十分常见的，正象我们在球赛时常讲的"keeping score(记录比赛分数)"并问"What's the score?(比分怎样)"。

十二进制，即使不用专门符号，但在言语中也使用着，因为12可被2、3、4、6除尽，因此我们说到"打"以及"箩"，一箩等于12打，即144个. 至于那个古代苏美尔人曾使用过以60为基数的系统，直至今天我们仍以60秒为一分钟，60分钟为一小时.

然而，"五"的符号不是IIIII而是V. 为何选用这么个特殊的字母作为符号，人们始终以极大的兴趣来穷究其原因，但迄今尚未找到能为大家普遍接受的解释. 然而，当我把手指向上伸出时，如果把外伸的拇指当作V的一条线而把其余四指合并当作另一条线的话，V可能就表示有五个手指的手的本身，这倒也算一种自得其乐的解释. 这样，"六"、"七"、"八"、"九"就分别表示为VI、VII、VIII、VIIII.

用符号X表示"十"，它表示两手腕对腕交叉(有人这么认为). 这样，"二十三"就表示成XXIII，"四十八"就可写成XXXXVIII等等.

"五十"的符号是L，"一百"的符号是C，"五百"是D，"一千"是M. C和M是易于理解的，因为C是*centum*(意为"一百")的起首字母，M是*mille*("一千")的起首字母.

然而，正是因为这个理由，这些符号就令人怀疑. 最初，它们也许用来表示这些数字意义较少的原始符号. 比如，"千"的符号看上去有点儿象(I)这么一个符号. 一千的一半或者"五百"就是该符号的右半边，或I)，以后，这个符号也许就转化成D. 不过为什么要用L来表示五十，我就说不出它的道理了.

现在，我们可以把“一千九百六十四”用罗马数字写成MDCCCCLXIIII.

根据这个方法来记写数字，其优点之一就是数字的记写次序可以不管．如果我把“一千九百六十四”写成CDCLIIMXCICI，那么，如果把每个符号代表的数相加，它仍然表示一千九百六十四．然而，也不是任何人都可以用这样的方法随心所欲地把字母凑合成数．要是把字母按数值大小的严格次序来记写的话，正如我第一次所做的那样，那么，要把字母的数值加起来就要简单得多．而且，事实上这种按数值递减的次序来排列(除特殊情况外)的方法是一直沿用着的.

一旦罗马数字的字母书写顺序成为一种惯例，就可以使用这种固定的次序，如果它有助于简化事情的话．比如，假定我们规定，当数值较小的符号位于数值较大的符号之后时，则两符号的数值相加；而当数值较小的符号位于数值较大的符号之前时，就从后一个减去前一个．这样，VI 就表示“五”加“一”或“六”，而 IV 则表示“五”减“一”或“四”(甚至可以说IIV表示“三”，但惯例是减去的符号不得多于一个)．用同样的方法，LX 表示“六十”而 XL 则表示“四十”，CX 表示“一百十”而 XC 则表示“九十”，MC 表示“一千一百”而 CM 则表示“九百”.

这种“减法法则”的好处在于，二个符号可以起到五个符号的作用．既然可以写成 IX，那么为什么非要写成 VIIII 不可呢？或者，如果可以写成 CM 的话，那就不必写成 DCCCC．年份“一九六四”可以不用 MDCCCCLXIIII(十二个符号)而写成 MCMLXIV(七个符号)．另一方面，一旦给书写顺序赋予意义，那就不再能把它们任意凑合，即使你想这么做也不行．例如，如果 MCMLXIV 被改写成 MMCLXVI，那么它就

变成了"二千一百六十六".

减法法则在古代时兴时废，直到中世纪尚未正式采用. 有一种有趣的理论认为，拖延的原因牵涉到该法则的最简单的使用，即 IV("四"). 它是罗马主神 IVPITER 的最前面两个字母. 罗马人可能对于即使书写这个名字的为首两个字母也有一种忌讳. 甚至直到今天，在标有罗马数字的钟面上，"四"仍以 IIII 表示而不是 IV. 这并不是钟面不接受减法法则，因为"九"是被标成 IX 而不是 VIIII 的.

用已给出的符号，我们可以用罗马数字写出直到"四千九百九十九"这么大的数字：MMMMDCCCCLXXXXVIIII，或者若使用减法法则，可写成 MMMMCMXCIX. 你可能推测它下面的一个数"五千"可以写成 MMMMM 吧，但这种推测并不太正确，严格地说，罗马记数方法是永远不让一个符号重复出现四次以上的. 通常采用一个新的符号来补救：比如 IIIII＝V，XXXXX＝L，CCCCC＝D. 那末，MMMMM 到底用什么表示呢？

没有指定用什么字母来表示"五千". 在古代，日常生活中很少需用这么大的数字. 即使学者或税吏们能偶然遇到较大的数目，但他们的记数方法并不传达到老百姓那里.

记写"五千"或五千以上的数目的办法之一是用一条短横来表示千. 这样，$\overline{\mathrm{V}}$ 就可用来表示五千，而不是五，六万七千四百八十二就可写成 $\overline{\mathrm{LXVII}}$CDLXXXII.

记写大数的另一种方法是回到用原始符号(I)来表示"千". 在此符号的两边加写弧形线，我们可以把数字以十的倍数来递增. 这样，"一万"就可以写成((I))，"十万"就可以写成(((I)))；另外，又如"五百"可写成 I) 或 D 那样，"五千"便可写成 I))，"五万"可写成 I))).