高等数学

GAODENG SHUXUE

钟 韬 王 洋◎主编

西南交通大学出版社

高等数学

主　编　钟　韬　王　洋
副主编　薛　菲　喻无瑕　潘　蕊
参　编　李　敏　方卫东　高敏静

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／钟韬，王洋主编. 一成都：西南交通大学出版社，2015.8

ISBN 978-7-5643-4187-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①钟… ②王… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 192090 号

高等数学

主编 钟 韬 王 洋

责任编辑	孟秀芝
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （四川省成都市金牛区交大路 146 号）
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮政编码	610031
网址	http://www.xnjdcbs.com
印刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印张	14
字数	348 千
版次	2015 年 8 月第 1 版
印次	2015 年 8 月第 1 次
书号	ISBN 978-7-5643-4187-9
定价	35.00 元

课件咨询电话：028-8700533

前　言

高等数学是一门非常重要的基础课程，它内容丰富，应用广泛。不仅为学习后继课程和进一步扩大数学知识面奠定必要的基础，而且在培养学生逻辑推理能力，综合利用所学知识分析问题解决问题的能力，较强的自主学习的能力和创新能力上都具有非常重要的作用。

本教材以培养应用型科学技术人才为主要目标，将数学基本知识和数学实验有机融合，主要有以下两个特点：

（1）按照教育部最新制定的高职高专《高等数学课程教学基本要求》，结合高职高专各专业对数学的基本要求，从高职高专学生的实际出发，结合编者多年的教学实践编写而成。

（2）融入数学实验，通过介绍数学软件 MATLAB，使得数学计算变得轻松，抽象的问题也变得更直观。

本书内容包括：函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用和微分方程。每节后都配有练习题，用于加深对基本概念的理解和基本运算、方法的训练。每章后的单元自测题用于对该章所学知识的巩固和提高，难度有所增加。在附录部分介绍了数学软件 Matlab，并精心设计了五个数学实验。教材在教学内容的深度和广度方面以“必要、够用”为度，特别加强学生应用能力的培养，力求做到易学、易懂。故本书可供高职高专各专业学生使用，也可供工程技术人员参考使用。

本书配有习题与辅导，本书由四川交通职业技术学院的钟韬、王洋主编，参与教材编写的有四川交通职业技术学院方卫东、薛菲、喻无瑕、潘蕊、李敏、高敏静。

由于受作者经验和水平所限，难免出现错误，恳请读者批评指正。

编　者

2015 年 7 月

目　　录

第一章　函数与极限

微积分学以函数为主要研究对象，所使用的研究方法是极限方法，所涉及的主要函数是连续函数. 因此，本章对函数、极限和连续这三个方面的内容进行讨论.

第一节　函　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫作这个函数的定义域. 当 $x_0\in D$ 时，称 $f(x_0)$ 为函数在点 x_0 处的函数值.

函数值全体组成的数集 $W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

【注】 函数的两要素是定义域与对应法则.

例 1　求函数 $y=\dfrac{x-2}{\ln(x+2)}+\sqrt{x^2-1}$ 的定义域.

解　求函数定义域就是寻求使上式有意义的实数 x 的全体. 所以，函数的定义域为 $(-2,-1)\cup[1,+\infty)$.

2. 函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种：公式法、列表法、图示法.

（1）公式法.

用数学式表示函数的方法称为公式法，又称为解析法.

例如，$y=\sqrt{x^3}-2x+1$.

（2）列表法.

若变量 x 与 y 之间有函数关系，将一系列自变量 x 的数值与对应的函数值 y 列成表格表示的方法称为列表法.

例如，中央电视台每天播报天气预报，据统计某地 2012 年 5 月 12 至 20 日每天的最高气温如表 1-1 所示。

表 1-1

日期（5 月）	12	13	14	15	16	17	18	19	20
最高气温/°C	18	17	19	16	22	21	20	20	19

（3）图示法.

用图形表示函数的方法称为图示法.

例如，图 1-1 所示的人的心电图，记录心脏每一心动周期所产生的电活动变化.

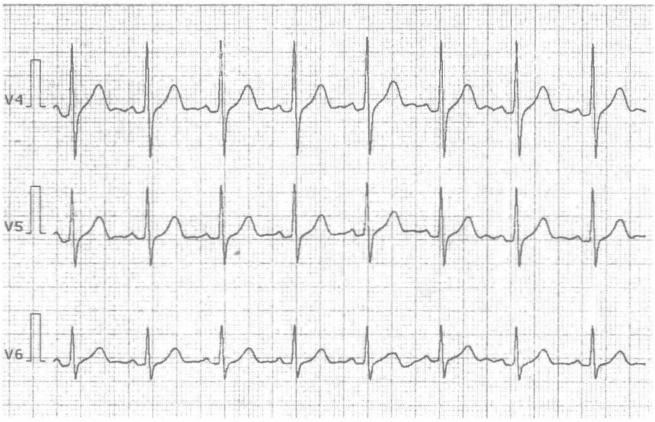


图 1-1　人的心电图

3. 几种特殊函数

（1）符号函数.

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$.

（2）绝对值函数.

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为绝对值函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$.

（3）狄利克雷函数.

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\ 0, & x\text{是无理数}\end{cases}$$

称为狄利克雷函数，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{0,1\}$.

二、函数的基本性质

1. 有界性

定义 2　若 $X\in D$，存在 $M>0$，对任意 $x\in X$，有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，否则称无界.

例如，$y=\sin x$，$y=\arccos x$ 是有界函数. 函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域 D 是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，在这个定义域内函数是无界的，但函数在区间 $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 上是有界的. 因此，函数的有界性不仅与函数的对应法则有关，而且与给定的区间有重要关系.

2. 单调性

定义 3　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的. 如图 1-2、图 1-3 所示.

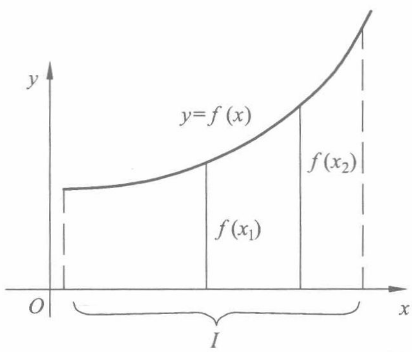


图 1-2

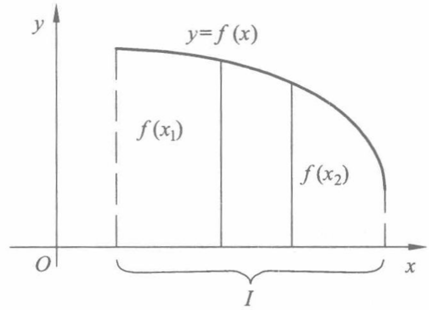


图 1-3

例如，函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加，在 $(-\infty,0]$ 内单调减少.

3. 奇偶性

定义 4　设 D 关于原点对称，对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数；设 D 关于原点对称，对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数.

【注】 函数为奇函数或偶函数的前提是定义域必须关于原点对称. 另外，有许多函数既不是奇函数也不是偶函数，称为非奇非偶函数.

例 2　判断下列函数的奇偶性：

（1）$f(x)=x^2\cdot\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$；

（2）$f(x)=x^2\cdot\sin(\cos x)$.

解　（1）$f(-x)=(-x)^2\cdot\dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x^2\cdot\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$

所以 $f(x)$ 为奇函数.

（2）$f(-x)=(-x)^2\cdot\sin(\cos(-x))=x^2\cdot\sin(\cos x)=f(x)$

所以 $f(x)$ 为偶函数.

4. 周期性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的数 l，使得对任意 $x\in D$，$(x-l,x+l)\in D$，$f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 l 为 $f(x)$ 的周期.

【注】 通常说，周期函数的周期是指其最小正周期.

例 3 设 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in \bar{Q}\end{cases}$，求 $D\left(-\dfrac{7}{5}\right)$，$D(1-\sqrt{2})$. 并讨论 $D(D(x))$ 的性质.

解 $D\left(-\dfrac{7}{5}\right)=1$，$D(1-\sqrt{2})=0$. 故 $D(D(x))\equiv 1$，它是偶函数和周期函数（但是无最小正周期），不是单调函数.

例 4 求函数 $y=|\sin 2x|$ 的周期.

解 $f\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\left|\sin 2\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=|\sin(2x+\pi)|=|\sin 2x|=f(x)$，

所以函数 $y=|\sin 2x|$ 的周期是 $\dfrac{\pi}{2}$.

三、基本初等函数

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数叫作基本初等函数.

熟记下列基本初等函数：

常量函数 $y=C$，C 为常数

幂函数 $y=x^a$，a 为常数

指数函数 $y=a^x$（$a>0,a\neq 1$）

对数函数 $y=\log_a x$ （$a>0,a\neq 1$）

三角函数 正弦函数 $y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$

余弦函数 $y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$

正切函数 $y=\tan x$，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$y\in(-\infty,+\infty)$

余切函数 $y=\cot x$，$x\neq k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，$y\in(-\infty,+\infty)$

反三角函数 反正弦函数 $y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，$y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

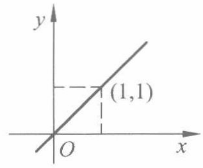
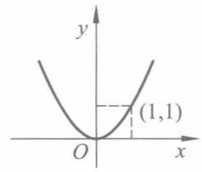
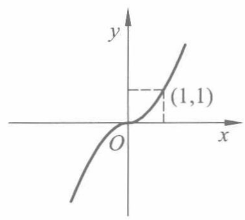
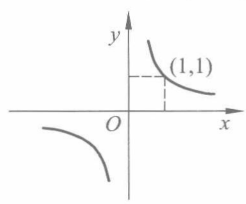
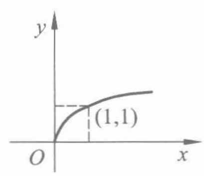
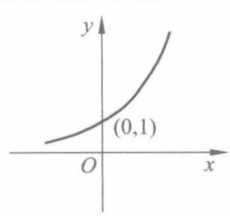
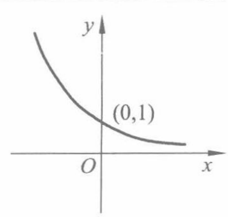
反余弦函数 $y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，$y\in[0,\pi]$

反正切函数 $y=\arctan x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

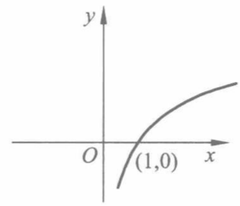
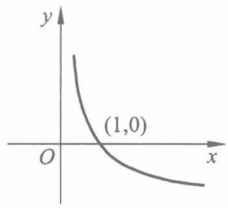
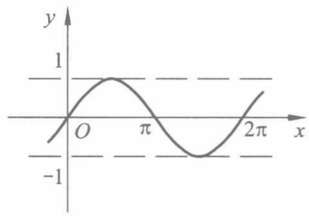
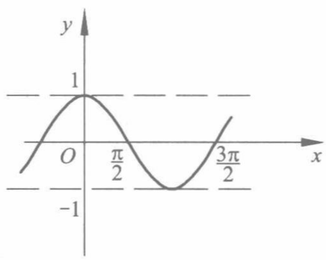
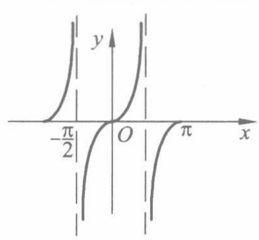
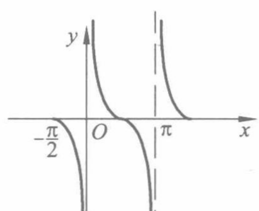
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in(0,\pi)$.

这六种函数统称为基本初等函数. 常用的基本初等函数的图像和性质，如表 1-2 所示.

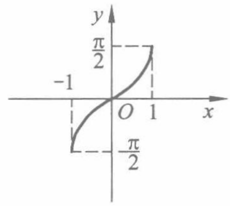
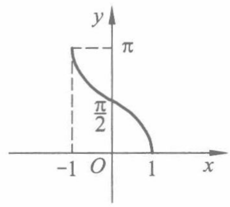
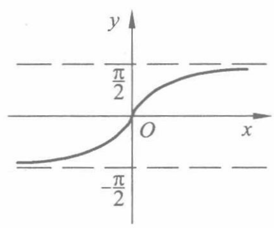
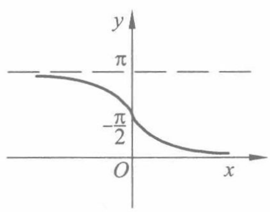
表 1-2

函数	定义域与值域	图像	特性
$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加
$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
$y=\dfrac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
$y=a^x(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

续表

函数	定义域与值域	图像	特性
$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数 周期为 2π 有界
$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数 周期为 2π 有界
$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 周期为 π
$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 周期为 π

续表

函数	定义域与值域	图像	特性
$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数 单调增加 有界
$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界
$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数 单调增加 有界
$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

四、复合函数

定义 6　若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，当 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空时，则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 u 称为中间变量.

例如，$y=\sqrt{u}$，$u=2+\sin x$ 可复合成 $y=\sqrt{2+\sin x}$.

【注】 不是任意两个函数都能复合的. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\sin x-2$ 就不能复合.

例 5　已知函数 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=\mathrm{e}^x$，求 $y=f[\varphi(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=(\varphi(x))^2=(\mathrm{e}^x)^2=\mathrm{e}^{2x}$.

例 6　已知 $f(x)=x^2+\sqrt{x}$，$\varphi(x)=\ln x$，求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$.

解　$f[\varphi(x)]=(\varphi(x))^2+\sqrt{\varphi(x)}=(\ln x)^2+\sqrt{\ln x}$.

定义域为 $[1,+\infty)$.

对于复合函数，除了掌握复合运算之外，还要掌握对复合函数的分解，即已知复合函数 $y=f[\varphi(x)]$，求 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 的表达式.

例 7 分解下列复合函数：

（1）$y=\ln(1+3^x)$；（2）$y=\cos^4 3x$.

解 （1）$y=\ln u$，$u=1+3^x$.

（2）$y=u^4$，$u=\cos v$，$v=3x$.

例 8 已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4x-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$，求函数 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $\dfrac{1}{x}=t$，则 $x=\dfrac{1}{t}$，代入函数表达式得 $f(t)=\dfrac{4}{t}-\sqrt{1+t^2}$，故

$$f(x)=\frac{4}{x}-\sqrt{1+x^2}\,.$$

五、初等函数

定义 7 由基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合运算得到的用一个式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\ln(\sin x+2)$，$y=\mathrm{e}^{3x-5}$ 都是初等函数，但是在工程技术中，非初等函数也会经常遇到，如符号函数就是非初等函数.

六、建立函数关系式举例

用数学方法解决实际问题时，先要建立函数关系式（或称建立数学模型），为此需明确问题中的自变量与函数，然后根据题意建立函数关系式，并根据实际问题的要求，确定函数的定义域.

例 9 要建造一个容积为 V 的无盖长方体水池，它的底为正方形.如果池底的单位面积造价为侧面积造价的 3 倍，试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

解 设底面边长为 x，总造价为 y，侧面单位面积造价为 a. 由已知可得水池深为：$\dfrac{V}{x^2}$，侧面积为：$4x\dfrac{V}{x^2}=\dfrac{4V}{x}$，从而得出

$$y=3ax^2+4a\frac{V}{x}\quad(0<x<+\infty).$$

例 10 生物学中在稳定的理想状态下，细菌的繁殖按指数增长模型 $N(t)=N_0\mathrm{e}^{rt}$（表示 t 分钟后细菌数量）增长的，其中 N_0 表示最初的细菌数量，r 表示增长率. 假设在一定的培养条件下，开始 $(t=0)$ 时有 2 000 个细菌，而 20 分钟后已增加 6 000 个，问一小时后将有多少个细菌？

解 根据题设可知，$N(0)=2\ 000$，则有 $N_0=2\ 000, N(t)=2\ 000\mathrm{e}^{rt}$. 又当 $t=20$ 时，

$N=6\ 000$，从而 $6\ 000=2\ 000\mathrm{e}^{20r}$，$\mathrm{e}^{20r}=3$．于是

$$N(60)=2\ 000\mathrm{e}^{60r}=2\ 000(\mathrm{e}^{20r})^3=2\ 000\times3^3=54\ 000$$

这就是说，1 小时后细菌有 54 000 个．

习题 1-1

1. 若 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x>1\\ 3x-1, x\leqslant1\end{cases}$，求 $f(-1)$，$f(1)$，$f(2)$.

2. 求下列函数的定义域：

（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x^2-9}$；　　（2）$f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}+\sqrt{16-x^2}$；

（3）$f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}-\cos x$.

3. 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,8]$，求 $f(x^2-1)$ 的定义域.

4. 判断下列函数的奇偶性：

（1）$y=2x-3x^3$；　　（2）$y=\tan x+x^4$；

（3）$y=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}$；　　（4）$y=\dfrac{x^2\cos x}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. $y=1+\cos\dfrac{x}{2}$ 是周期函数吗？______（是，不是）．如果是，那么周期为______.

6. 分解下列复合函数.

（1）$y=3^{x^2}$；　　（2）$y=\tan\sqrt{3x-1}$；

（3）$y=\ln\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & x\neq1\\ 0, & x=1\end{cases}$ ______初等函数？（是，不是）

8. 已知 $f[\varphi(x)]=1+\cos x$，$\varphi(x)=\sin\dfrac{x}{2}$，求 $f(x)$.

9. 某公共汽车路线全长为 30 km，票价规定如下：乘坐 5 km 以下（包括 5 km）者收费 1 元；超过 5 km 但在 15 km 以下（包括 15 km）者收费 2 元；其余收费 2 元 5 角．试将票价表示为路程的函数，并作出函数的图形.

10. 要建造一个容积为 V 的无盖长方体水池，它的底为正方形．如果池底的单位面积造价为侧面积造价的 2 倍，试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

11. 我国最新实施的个人所得税税率表中规定，月收入超过 3 500 元为应纳税所得额（见表 1-3）.

表 1-3　个人所得税税率（工资、薪金所得适用）

级数	全月应纳税所得额	税率（%）
1	不超过 1 500 元的	3
2	超过 1 500 元至 4 500 元的部分	10
3	超过 4 500 元至 9 000 元的部分	20
4	超过 9 000 元至 35 000 元的部分	25
5	超过 35 000 元至 55 000 元的部分	30
6	超过 55 000 元至 80 000 元的部分	35
7	超过 80 000 元的部分	45

个人所得税一般在工资中直接扣除. 若某单位所有人的月收入都不超过 9 000 元，请建立月收入与纳税金额之间的函数关系.

第二节　极限的概念

作为微分学基础的极限理论，早在古代已有比较清楚的论述. 比如，我国的庄周所著的《庄子》一书的“天下篇”中，记载“一尺之棰，日取其半，万世不竭”；三国时期的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣”.这些都是朴素的、很典型的极限概念.

一、数列的极限

为了说明数列极限的概念，先说明数列的概念.

定义 1　定义在自然数集 **N** 上的函数 $x_n = f(n)\quad (n=1,2,\cdots)$，并按自然数的顺序排列成的一列数：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

称为数列，简记为 $\{x_n\}$. 数列中的每一个数叫作数列的项，第 n 项 x_n 叫作数列的通项或一般项.

例如：$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$；

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots;$$

$$1,-1,1,\cdots,(-1)^{n+1},\cdots$$

均为数列，它们的一般项依次为 $\{2n\},\left\{\dfrac{1}{n}\right\},\{(-1)^{n+1}\}$.

定义 2　如果当 n 无限增大时(记为 $n\to\infty$)，数列无限接近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 x_n 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 或 $x_n \to A(n\to\infty)$. 如果一个数列有极限 A，就称这个数列是收敛数列，也称这个数列收敛于 A；否则就称它是发散数列.