〔挪威〕K．西赛特 著

经济数学分析教程

汪吉有 译

中國展望出版社

经济数学分析教程

[挪威] K.西赛特　著

汪吉有　译

中國展望出版社

一九八五年·北京

内 容 提 要

本书系统介绍了在现代经济学中常用到的数学分析中的若干课题。全书共分七章，主要叙述多变量函数、微分（差分）方程和静态最优化理论及其在经济学中的应用。书中提供了大量例题和习题并附有习题答案。本书可作为我国大专院校经济类和应用数学类专业师生、硕士生的参考书。也可供我国广大经济科研人员和经济管理人员阅读。

本书责任编辑曹　原。

Knut Sydsæter

TOPICS IN MATHEMATICAL ANALYSIS FOR ECONOMISTS

Academic Press(London), 1981

经济数学分析教程

〔挪威〕K.西赛特　著

汪吉有　译

※

中国展望出版社 出版

（北京西城区太平桥大街4号）

郑州大学印刷厂印刷

北京新华书店发行

开本　787×1092毫米1／32印张　19 12／32

420千字　1985年12月第一版第一次印刷

1—6,000册

统一书号：4271·160　定价：3.40元

译 者 的 话

拉法格在《回忆马克思恩格斯》第一册中写道“他（马克思）还以为一种科学只有成功地运用数学时，才算达到了完善的地步。”显然，由于社会上的经济现象所特有的复杂性，把数学成功地应用于经济科学这一想法还远没有实现。从历史上看，前人在这方面做了大量的工作，马克思在《资本论》中成功地应用数学模型或许可以说是对这一工作最早的尝试。本世纪六十年代以来，由于电子计算机技术的飞速发展，经济工作者试图将各种各样的数学方法应用于经济学领域，但正如本书作者所说的那样，经典的数学分析在经济工作者所用的数学方法中仍居支配地位。

本书在选题和内容的编排方面有独到之处，在例题和习题中提供了大量的经济数学模型，这些模型中大多是各国经济工作者的最新研究成果。因此，原书于1981年初版时就有数种译本。尽管我国的社会主义经济和西方资本主义经济有着本质的区别，但书中的基本理论和分析方法对我国广大经济工作者仍具有较大的参考价值。因此本人愿将本书译出奉献给广大读者。由于条件所限，在由英译本翻译时并没有参考其它文本。

河南省社会科学院副院长杨承训研究员、郑州大学裘光明副教授、付廷蕙副教授阅读过原稿或校样并提出许多宝贵意见和建议，在此表示感谢。

由于译者专业水平和外语水平有限，译文中的错误和不当之处在所难免，欢迎广大读者批评指正。

译者　1985.10

序　　言

近些年来，各种各样的数学方法被用来解决经济问题。然而，经典的数学分析（包括它的分支）在经济学家们所用的数学理论中仍居支配地位。

本书试图对经济工作者感兴趣的数学分析中的某些课题给予可靠的介绍。我已尝试打乱详细的数学论述（对数学系学生那种规范论述）和运算法则表之间的平衡，而这种平衡往往是同类书中基本的选材方法。

我抵制了从数学本身的缘故去发展数学这种诱惑，尽管这种诱惑似乎是迷人的。在对课题的选择上我受奥斯陆的经济学家很大影响，在选择例题和习题时广泛参考了挪威经济学家所研究的方程和模型——我决定这样选择并非出于爱国主义而是出于对可靠性的考虑。

本书所讲的是经济工作者所用的数学而不是数理经济学。我仅仅在很少的场合对经济模型的描述超出了概述的界限。而代之的是把某些经济模型中的问题和解答以例题或习题的方式给出。

阅读本书需要予先具备的主要基础是初等微积分。在某些章节中也用得着一点矩阵理论和线性代数中的结果。

我小心地注意了每一章自身的完整性。谨慎地阐述了定理和其它结果。阐述这些内容的方式足以使普通的经济工作者很容易看懂（虽然会有一些读者对较多的纯量积和矩阵公

式感到生疏）。

第一、六、七章研究的是微分方程和差分方程，包括线性和非线性方程。详述了最主要的标准求解方法。由于经济学中所遇到的方程大多不能直接求解，微分方程和差分方程定性理论对于经济工作者来说则显得特别重要，我已讨论到这一理论中的某些内容。

第二章研究复数和代数方程，包括 *Descartes* 符号法则。其中有一节课简单地叙述了方程的近似解法。

第三章讨论方程组理论，这对经济工作者尤为重要。关于函数相关这一凌乱的课题比一般经济学教材中讨论得更为详细。本章还包含其它一些课题，如弹性（*Frisch* 这位挪威籍诺贝尔经济学奖获得者对弹性很感兴趣并发现了其很多性质）、齐次和位似函数以及方向导数。本章对不动点定理也进行了讨论。

第四章是积分学，假设读者已具备了单变量积分的初等理论，因为在第一章的一阶微分方程中已经用到过。本章一开始就提出积分是一种基本方法，因为在求收入分布定理中要用到。对积分中所含的参变量的微分讨论得相当详细，另外也介绍了多重积分问题和求积的变量置换公式。

第五章中，首先相当广泛地叙述了经典的静态最优化理论。此处我讨论得十分详细并对一些结果作了严格的推导，这些推导读者基本上能够看懂。这样做的主要原因就是在这个特殊的领域内有一些错误（还没有被公认是灾难性的）在经济学文献中已经保持了数十年之久。现在，这些错误应该寿终正寝了吧？但从每年出版的新书来看却仍在证实它们并没有躺倒。在本章最后几节讨论非线性规划时加重强调了经

济学上的解释和实例。线性规划是作为非线性规划的特殊情况研究的。

我要感谢以种种方式对本书出版做过贡献的很多人。特别是 *Richard W. Farebrother*, *Hans Chr. Holmsen*, *Leif Johansen*, *Hakon Lundamo*, *Jon Reed*, *Atlc Seierstad*, *Eivind Stensholt* 和*Arne Strφm* . 奥斯陆大学经济研究所的技术人员为本书各种译本的出版付出了持久的努力，对此深表感谢。还要在此记上一笔的是，第三章和第五章最后几节课的选题是受了这一事实的影响，这就是在 1970/71 学年度我曾被特许在耶鲁大学听了*Herbert Scarf*教授所讲的数理经济学。

本书某些部分是以挪威出版在斯堪的那维亚半岛一些经济学系应用多年的两册数学分析为基础的。对于挪威出版者 "*Universitetsforlaget*" （挪威大学版）友好地允许我引用这两册书中某些内容深表谢意。

K.西赛特

1981.3于奥斯陆

目　　录

第一章　一阶微分方程

1　微分方程 $x' = ax$ ……………………………（2）
2　微分方程的分类………………………………（4）
3　可分离变量方程………………………………（9）
4　一阶线性方程…………………………………（21）
5　*Bernoulli* 方程 ………………………………（28）
6　一阶微分方程定性理论………………………（30）

第二章　复数　代数方程

1　引言………………………………………………（42）
2　复数定义…………………………………………（42）
3　复平面　复数除法………………………………（46）
4　复数的三角形式　*De Moivre* 公式…………（51）
5　复指函数…………………………………………（55）
6　代数基本定理……………………………………（60）
7　代数方程的整数解　多重根……………………（64）
8　代数方程的显式解………………………………（69）
9　*Descartes* 符号法则 …………………………（73）
10　方程近似解法……………………………………（78）

第三章 多变量函数理论中的课题

1 链式法则……………………………………………(87)
2 *Taylor*公式……………………………………………(93)
3 隐函数……………………………………………(100)
4 $f(x,y)=0$ 型隐函数定理……………………………(108)
5 方程组……………………………………………(116)
6 线性方程组……………………………………………(125)
7 广义隐函数定理……………………………………(129)
8 从R^n到R^m的变换……………………………………(135)
9 函数相关……………………………………………(143)
10 实变向量函数……………………………………(150)
11 梯度 切平面与方向导数………………………(153)
12 微分……………………………………………(161)
13 齐次函数……………………………………………(172)
14 弹性 置换的弹性………………………………(186)
15 R^n中的拓朴……………………………………(196)
16 凸集……………………………………………(206)
17 不动点定理……………………………………………(215)

第四章 积分

1 积分在收入分布定理中的应用…………………(231)
2 取决于参变量的积分……………………………(239)
3 无界区间上的积分………………………………(246)
4 *Gamma* 函数 *Poisson* 积分公式………………(250)
5 矩形域上的多重积分……………………………(253)

6 非矩形域上的二重积分……………………(265)
7 三重积分……………………………………(273)
8 多重积分的Riemann 定义……………………(277)
9 变量置换……………………………………(282)
10 向无界域和无界函数的开拓………………(295)

第五章 静态最优化理论

1 一些基本定义与结果…………………………(300)
2 单变量最优化理论的复习……………………(306)
3 局部极值必要条件……………………………(315)
4 二次型………………………………………(323)
5 局部极值充分条件……………………………(334)
6 凹函数与凸函数………………………………(341)
7 拟凹函数与拟凸函数…………………………(354)
8 整体最优化…………………………………(361)
9 带有约束条件的最大化和最小化……………(365)
10 Lagrange 定理 ………………………………(376)
11 二阶条件……………………………………(389)
12 情形变化时最优解如何变化…………………(401)
13 非线性规划 引论……………………………(411)
14 R^n中的分离定理…………………………(419)
15 用于凹规划中的 Kuhn—Tucker 定理………(426)
16 用于普通规划中的 Kuhn—Tucker 定理……(440)
17 线性规划……………………………………(447)

第六章　高阶微分方程

1　二阶微分方程…………………………………(459)
2　二阶常系数微分方程…………………………(463)
3　n 阶线性微分方程……………………………(470)
4　n 阶常系数线性方程…………………………(474)
5　微分方程组……………………………………(478)
6　相空间分析……………………………………(485)
7　线性方程稳定性问题…………………………(492)
8　非线性系统的稳定性…………………………(498)
9　一阶偏微分方程………………………………(514)

第七章　差分方程

1　常差分方程……………………………………(521)
2　一类简单的一阶差分方程……………………(525)
3　存在和唯一性定理……………………………(531)
4　线性差分方程组………………………………(535)
5　二阶常系数差分方程…………………………(541)
6　n 阶常系数差分方程…………………………(548)
7　参数变易法……………………………………(551)
8　差分方程组……………………………………(556)
9　差分方程定性理论……………………………(561)
10　方程组近似解法………………………………(568)
11　结束语…………………………………………(572)

参考文献……………………………………………(575)

练习答案……………………………………………(582)

第一章　一阶微分方程

本书要研究的第一个课题属于微分方程理论——一个最引人入胜的数学领域，这一理论还具有重大的实用价值。

什么是微分方程呢？正如它的名字所表明的，它是一个方程，但是其中欲求的未知量并不象代数方程中那样是一个具体的数，而是一个函数。例如，方程

$$\frac{dx}{dt}=ax \tag{1.1}$$

就是一个微分方程的例子，这里a为常量而$x=x(t)$为未知函数。这一问题就是：若函数$x(t)$具有这种性质，即它的变化率$dx(t)/dt$正比于$x(t)$，求$x(t)$的形式。方程（1.1）会在大量的经济学、物理学、生物学等问题中碰到。在第1节中我们将讨论导致形如（1.1）的微分方程的一类问题并展示它的解。

这个例子代表了经常遇到的一类典型问题，在这类问题中我们希望从至少含有一个函数的导数的方程所提供的信息中来求未知函数。这一类重要的方程称为**微分方程**。

微分方程在物理中起着重要的作用，因为很多自然规律（比如，行星运动规律、电磁运动规律、热传导规律）都可以用这种微分方程来描述。在经济理论中，特别是在增长理论中，微分方程日趋重要。

早在十七世纪，*Newton*和*Leibniz*就开始对微分方程进

行了系统的研究，但至今这一课题在数学中仍然是重要的，还须不断进行研究。

1　微分方程$x' = ax$

在试图对微分方程分类进而对这一理论进行系统的论述之前，我们先考察一类普通问题，这类问题导致出一类简单却是重要的微分方程（1.1）。

设某量随时间变化并设$x(t)$为t时刻呈现的值。导数$x'(t)$则为该量对时间t的变化率。（依照习惯，用一撇代表导数是方便的，如$x'(t)=dx/dt$，$x''(t)=d^2x/dt^2$等等。）当然，若$x'(t)$是正的，则该量是增加的；$x'(t)$是负的时该量减小。让我们设任何时刻其变化率都与该时刻所呈现的值成正比：

$$x'(t) = ax(t) \tag{1.2}$$

这种假设大量地出现在某些问题中。世如考察这种情形，其中$x(t)$表示某种群体（比如说细菌群体）中个体的数量。在理想的生长条件下，即这时细菌的再生不受现存个体数量的影响，则有理由假设任一时刻的增长率正比于该时刻呈现的个体数量。（特别是这就相当于假设如果一个群体的细菌数是另一个群体的两倍，则它增长的速率也是第2个群体的两倍。）在这种情况下（1.2）中的a是一个正的常数，其大小决定于群体的生物学特征和生存环境条件。

在其它情形中（1.2）中的a也可能是负的。例如，一块放射性物质任其自由衰变，衰变速率正比于所剩物质的质量。这就导致出形如（1.2）的方程，从实验数据中也确定了这一形式。比例常数a的大小决定衰变材料的种类。

自然会出现的问题是哪一种函数满足方程（1.2）。我们回忆一下，指数函数e^{ax}具有导数ae^{ax}，因而它满足(1.2)*。更一般地，如果$x(t)=Ae^{at}$，其中A为常数，则有$x'(t)=Aae^{at}=ax(t)$，因此由$-10e^{at}$，$3e^{at}$，$360\cdot 12e^{at}$定义的函数皆满足(1.2)，如果我们试图选择其它函数，比如说$x(t)=at^2+1$，$x(t)=ate^{at}$等等，则可以发现它们都不能满足(1.2)。事实上，$x(t)=Ae^{at}$是对于t的所有值皆满足(1.2)的唯一的函数类型。为证明这一论断，我们应用一个小小的技巧：设$g(t)$是满足(1.2)的任意函数，则对于所有t，有$g'(t)=ag(t)$。定义一个新的函数$h(t)=g(t)e^{-at}$。则对于所有t有

$$
\begin{aligned}
h'(t)&=g'(t)e^{-at}+g(t)\ (-ae^{-at})\\
&=e^{-at}\ (g'(t)-ag(t))\ =0
\end{aligned}
$$

由于对于所有t皆有$h'(t)=0$，则h的图象为一“水平线”，以使得对于某常数A，有$h(t)=A$。因此$g(t)e^{-at}=A$，$g(t)=Ae^{at}$。我们已证得了下述等价关系：

(1.3) $x'(t)=ax(t)$，对于所有$t \Longleftrightarrow x(t)=Ae^{at}$，对于某常数$A$。

这一结果告诉我们方程（1.2）的通解在$a>0$时呈指数增长，$a<0$时呈指数下降。

练　　习

1.1.1 求下列微分方程的解：

*回忆，$f(x)=e^x$是自然指数函数。它的底e是一个无理数$e=2.7182818\cdots$。这一函数的重要性在于$f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x$若$u$是一个复合式，有时用$\exp u$代替$e^u$。

(i) $x' = \frac{1}{2}x$ (ii) $2x' = -\frac{3}{2}x$ (iii) $ax' + b = 0(a \neq 0)$

1.1.2在一个稳定的市场中，如果没有推销员的努力而出售一种产品，则该产品的销售额下降比率正比于销售额：

$$S'(t) = -aS(t)$$

这里$S(t)$表示t时刻销售额。若$t = 0$时的销售额为S_0，求$S(t)$的表达式。

2 微分方程的分类

微分方程有两种主要类型：**常微分方程**和**偏微分方程**，常微分方程中的未知函数只取决于一个变量，而偏微方程中的未知函数则是一个多变量函数。第1节中讨论过的方程就是一个常微分方程的例子，而

$$(1.4) \quad \frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_1} + a\frac{\partial U(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0$$

则是一个偏微分方程。（在这种情况下，问题就是要找出对于所有的（x_1, x_2）都满足方程的所有函数$U(x_1, x_2)$。）

经济学里所用到的微分方程中，时间t一般是独立变量。因此我们用t作为独立变量的符号，当然，独立变量有其它解释时，这一理论仍具有完全的正确性。

设x是变量t的一个未知函数，而f为给定的函数。下列形式的方程

$$(1.5) \quad f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \cdots, \frac{d^nx}{dt^n}\right) = 0$$

中所含最高导数项为n阶，这种类型的方程称为n阶微分方程。

若把定义在区间 (a,b) 上的一个函数$x=x(t)$代入方程(1.5)，方程化为(a,b)上的一个恒等式，则称函数$x=x(t)$为方程的一个解。方程的解在tx平面上的图象称为一条积分曲线或解曲线。

例1 考察方程

$$x'=x+t$$

显然这是一个一阶微分方程。但它的解却不容易看出。用试凑法可能偶然发现某些解。比如，对于所有 t，$x=-t-1$和$x=e^t-t-1$都满足方程（请读者证实！）。更一般地，若设$x=Ce^t-t-1$，C为任意常数，有$x'=Ce^t-1$而$C+t=Ce^t-t-1+t=Ce^t-1$，因此，在这一情况下，对于所有t，皆有$x'=x+t$。因之对于常数C的每一个选择，$x=Ce^t-t-1$都是方程在$(-\infty,\infty)$上的一个解。我们是如何得到这个函数的？事实上，我们要用到本章第4节中所建立的方法。正如我们将要看到的，再也没有其它一类函数满足这一方程。的确，如$x=e^{t-1}$，$x=sint$和$x=ln(x+1)$都不是方程的解*。

例2 考察二阶微分方程

$$x''-x=0$$

有一类函数满足这一方程的条件$x''=x$。其实，$x=e^t$和$x=e^{-t}$

---

*我们设lnx表示x的自然对数，因为$e^{lnx}=x$，则lnx对于所有的x皆有定义。回忆一下，$y=lnx\Rightarrow y'=1/x$（很多书中用log代替ln。）

都具有这种性质。更一般地，若取$x = Ae^t + Be^{-t}$，A，B为任意常数，则可以得到$x'' = x$。至此，我们找到的这一函数对于常数A和B的所有值都是给定方程在（$-\infty$，∞）上的解。在第六章第2节中我们将会了解到再没有其它类型的函数满足该方程。

从我们研究的例题中可以很清楚地看出一个微分方程可以有大量的解。一个微分方程所有解的集合称为方程的全解或通解。比如，$x' = ax$的通解为Ce^{at}（对于常数C的每一个值都都是方程的一个解），而$x'' - x = 0$的通解是$x = Ae^t + Be^{-t}$，A，B为任意常数。

事实上，上述两个例子是很典型的一阶和二阶微分方程。一个一阶微分方程具有取决于一个任意常数的通解而二阶方程的通解则决定于两个任意常数。通常，n阶微分方程的通解一般地取决于n个任意常数。（我们用“一般地”来修正这一叙述是因为有的微分方程的全解不能由所述形式表示，见练习1.2.4。）精确的叙述见存在的和唯一性定理（本章第6节和第六章第3节）。

导致一个微分方程的实际问题一般含有并不为微分方程本身所表示的附加条件。这种附加条件称为边界条件。为满足这些边界条件需要确定通解中任意常数的特殊值。例如，在诱导出一个一阶微分方程的经济增长模型中要满足资本贮存的时间轨线，在时间初始点的资本贮存量一般由历史给定并将提供确定方程唯一解的条件。

例3　在方程$x' = ax$的情形中，通解由（1.3）给出。如果我们要求解曲线经过点(t_0, x_0)。则有$x(t_0) = Ae^{at_0} = x_0$，