Lecture Notes on Exercise Class in Mathematical Analysis

数学分析习题课讲义 3

李傅山　王培合　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

Lecture Notes on Exercise Class in Mathematical Analysis

数学分析习题课讲义 3

李傅山　王培合　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

数学分析习题课讲义．3／李傅山，王培合编著．—北京：北京大学出版社，2018.9

ISBN 978-7-301-29765-0

Ⅰ．①数… Ⅱ．①李… ②王… Ⅲ．①数学分析—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．①O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第179639号

书　　名 数学分析习题课讲义3
SHUXUE FENXI XITIKE JIANGYI 3
著作责任者 李傅山　王培合　编著
责任编辑 曾琬婷
标准书号 ISBN 978-7-301-29765-0
出版发行 北京大学出版社
地　　址 北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址 http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱 zpup@pup.cn
电　　话 邮购部010-62752015　发行部010-62750672　编辑部010-62762021
印 刷 者 北京大学印刷厂
经 销 者 新华书店
880毫米×1230毫米　A5　12.125印张　348千字
2018年10月第1版　2018年10月第1次印刷
定　　价 38.00元

内 容 简 介

本书是与华东师范大学数学系编写的教材《数学分析(第四版)》配套的学习辅导书，内容安排上与教材相一致，是在作者近二十年讲授“数学分析”课程和参与考研辅导以及全国大学生数学竞赛辅导所积累的大量教学资料的基础上多次修订而成的. 本书共分三册，按节进行编写，每节先梳理知识结构，再按照题目的类型和难度对教材中的习题进行重新编排并给予详细解答. 很多题目提供了多种解法并加以分析和备注，有利于学生理解数学知识蕴涵的数学思想，建构知识的内在联系. 本书还选取了一些教材之外的有代表性的习题，以拓宽知识面，也有利于夯实学习后续专业课的基础.

本书可供高等院校数学各专业学生学习“数学分析”课程使用，也可作为考研学生的复习资料，还可作为“数学分析”课程教师的参考书.

作 者 简 介

李傅山 曲阜师范大学数学科学学院教授，研究生导师. 2005 年于复旦大学获理学博士学位. 主要研究方向是偏微分方程及其应用. 主持多项国家级、省部级科研课题；在 *Journal of Differential Equations*，*Nonlinear Analysis: Real World Applications* 等国际权威期刊发表论文多篇. 长期讲授"数学分析""偏微分方程"等课程，主讲数学类专业的考研辅导课和全国大学生数学竞赛辅导课. 出版了著作《数学分析中的问题与方法》；主持省级教学改革项目，并于 2014 年获省级教学成果二等奖.

王培合 曲阜师范大学数学科学学院教授，研究生导师. 2003 年于华东师范大学获理学博士学位. 主要研究方向是几何分析. 主持国家自然科学基金等多项国家级、省部级科研课题；在 *Journal of Functional Analysis*，*Journal of Differential Equations* 等国际权威期刊发表论文多篇. 长期讲授"解析几何""微分几何"等课程，并参与全国大学生数学竞赛辅导工作. 承担省级教学改革项目，并于 2014 年获省级教学成果二等奖.

前　言

"数学分析" 是高等院校数学各专业最重要的一门基础课程. 它是数学各专业学生学习后续专业课程的基础, 也是数学各专业研究生入学考试的必考科目. 华东师范大学数学系编写的《数学分析 (第四版)》是国内 "数学分析" 课程使用最广的教材之一. 本书是与该教材配套的学习辅导书, 可满足高等院校数学各专业学生学习、复习和提高之用, 对该课程教师的教学也有一定的参考价值.

在编写本书时, 我们突出了以下几点:

第一, 按节编写, 简明归纳每节的主要内容, 对理论性较强的部分章节编写了知识结构图.

第二, 对每节的习题按照题目的类型和难度进行重新梳理、归类、排序, 努力使得课后习题的编排更系统、更有条理, 对少部分难度较大的习题标注上星号 "*".

第三, 书中许多题目都给出了多种解法, 有的解法是同类书中所没有的, 便于学生举一反三, 触类旁通.

第四, 在习题解答后面给出分析和备注, 引导学生深刻思考, 梳理并理解问题的本质, 并建构前后知识的内在联系.

第五, 部分章节后面增加了适量的教材之外的习题, 以便初学者适当扩大知识面, 提高解决问题的能力. 对这类题目建议读者先审题思考, 自己写出解答过程, 再参考本书的解答和备注进行比较、归纳和总结, 以达到 "学习 — 消化 — 转化 — 创新" 的目的.

与华东师范大学数学系编写的《数学分析 (第四版)》配套的学习指导书有很多版本, 为学生学习该课程提供了很大的帮助和指导. 在教学实践中, 我们发现某些版本省略或回避了部分有难度的习题的解答, 个别题目解法单一或者不自然, 有些题目缺乏必

要的从数学思想高度上的分析和备注. 所有这些现象, 促使我们编写了此套 "数学分析" 学习辅导书. 本书是李傅山教授在近二十年讲授 "数学分析" 课程和参与考研辅导以及全国大学生数学竞赛辅导所积累的大量教学资料的基础上撰写而成的. 王培合教授对本书做了试用并参与了书稿的修改, 增加了部分问题的新解法.

在本书编写过程中, 得到了曲阜师范大学数学科学学院领导和同事们的大力支持和关心. 本书的出版还得到了曲阜师范大学教材建设基金的资助. 另外, 王前、许文秀、尹清等同学帮助校对了书稿内容. 在此, 一并表示衷心感谢.

限于作者的水平有限, 书中的不足之处在所难免, 恳请读者提出宝贵意见.

编者

2018 年 7 月

目　　录

第十六章　多元函数的极限与连续

§ 16.1　平面点集与多元函数

内容要求　掌握点集的概念 (内点、外点、边界点; 聚点、孤立点; 开集、闭集、有界集、无界集、区域) 及它们的关系; 掌握函数定义域的求法; 理解平面 $\mathbb{R}^2$ 上的四个基本定理及其证明, 并和实数系上的基本定理对比.

例 16-1-1　解答下列各题 (点集的概念):

1. 判断下列平面点集哪些是开集、闭集、有界集或区域, 并分别指出它们的聚点集合与边界:

(1) $[a,b)\times[c,d)$;　　(2) $\{(x,y)|xy\neq 0\}$;

(3) $\{(x,y)|xy=0\}$;　　(4) $\{(x,y)|y>x^2\}$;

(5) $\{(x,y)|x<2,y<2,x+y>2\}$;

(6) $\{(x,y)|xy\geqslant 0\}$;　　*(7) $\left\{(x,y)\middle|y=\sin\dfrac{1}{x},x>0\right\}$;

(8) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)|y=0,0\leqslant x\leqslant 1\}$;

(9) $\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}\cup\{(x,y)|y=0,1\leqslant x\leqslant 2\}$;

(10) $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z}\}$.

解　(1) 此点集为长方形区域除掉右边和上边, 既不是开集也不是闭集, 是有界集, 也是包含部分边界的区域. 它的聚点集合为 $[a,b]\times[c,d]$, 边界为长方形的四条边, 即

$$\begin{aligned}&\{(x,y)|x=a,y\in[c,d]\}\cup\{(x,y)|x=b,y\in[c,d]\}\\&\cup\{(x,y)|y=c,x\in[a,b]\}\cup\{(x,y)|y=d,x\in[a,b]\}.\end{aligned}$$

(2) 此点集为 $\mathbb{R}^2$ 除掉两条坐标轴, 是开集和无界集, 不是区域 (因为不连通). 它的聚点集合为 $\mathbb{R}^2$, 边界为

$$\{(x,y)|xy=0\}.$$

(3) 此点集为两条坐标轴, 是闭集和无界集, 不是区域 (因为每一点都不是内点). 它的聚点集合为 $\{(x,y)|xy=0\}$, 边界为

$$\{(x,y)|xy=0\}.$$

(4) 此点集是抛物线 $\{(x,y)|y=x^2\}$ 上方的点集, 是开集、无界集和开区域. 它的聚点集合为 $\{(x,y)|y\geqslant x^2\}$, 边界为

$$\{(x,y)|y=x^2\}.$$

(5) 此点集是不包含边界的三角形区域, 是开集、有界集和区域. 它的聚点集合为

$$\{(x,y)|x\leqslant 2, y\leqslant 2, x+y\geqslant 2\},$$

边界为三角形的三条边, 即

$$\begin{aligned}&\{(x,y)|x=2,0\leqslant y\leqslant 2\}\cup\{(x,y)|y=2,0\leqslant x\leqslant 2\}\\&\quad\cup\{(x,y)|x+y=2,0\leqslant x\leqslant 2\}.\end{aligned}$$

(6) 此点集为坐标平面中的第一、三象限及坐标轴, 是闭集、无界集和闭区域. 它的聚点集合为 $\{(x,y)|xy\geqslant 0\}$, 边界为

$$\{(x,y)|x=0\}\cup\{(x,y)|y=0\}.$$

(7) 此点集既不是开集也不是闭集, 是无界集 (不要和函数有界混淆), 不是区域 (因为每一点都不是内点). 它的聚点集合为

$$\left\{(x,y)\middle|y=\sin\frac{1}{x},x>0\right\}\cup\{(0,y)|-1\leqslant y\leqslant 1\},$$

边界为

$$\left\{(x,y)\middle|y=\sin\frac{1}{x},x>0\right\}\cup\{(0,y)|-1\leqslant y\leqslant 1\}.$$

(8) 此点集是闭集和有界集, 不是区域 (因为每一点都不是内点). 它的聚点集合为

$$\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)|y=0,0\leqslant x\leqslant 1\},$$

边界为

$$\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)|y=0,0\leqslant x\leqslant 1\}.$$

(9) 此点集是闭集和有界集, 不是区域 (因为 $\{(x,y)|y=0,1\leqslant x\leqslant 2\}$ 中的点不是内点). 它的聚点集合为

$$\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}\cup\{(x,y)|y=0,1\leqslant x\leqslant 2\},$$

边界为

$$\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)|y=0,1\leqslant x\leqslant 2\}.$$

(10) 此点集是闭集和无界集, 不是区域 (因为每一点都不是内点). 它的聚点集合为 $\varnothing$, 边界为 $\{(x,y)|x,y\in\mathbb{Z}\}$.

注 (8) 说明一个点集的聚点集合和边界可能是其自身.

2. 试问: 下面两个集合是否相同?

$$\{(x,y)|0<|x-a|<\delta,0<|y-b|<\delta\},$$
$$\{(x,y)||x-a|<\delta,|y-b|<\delta,(x,y)\neq(a,b)\}.$$

解 不相同. 点集 $E:=\{(x,y)|0<|x-a|<\delta,0<|y-b|<\delta\}$ 是由直线 $x=a\pm\delta,y=b\pm\delta$ 围成的正方形区域除掉直线 $x=a$ 与 $y=b$ 上的点的点集, 而点集 $F:=\{(x,y)||x-a|<\delta,|y-b|<\delta,(x,y)\neq(a,b)\}$ 是该正方形区域仅除掉点 (a,b) 的点集.

注 在定义二元函数极限时用到点集 F, 不要错误地用成 E.

例 16-1-2 解答下列各题 (多元函数的函数值与定义域):

1. 求下列各函数的函数值:

(1) $f(x,y)=\left[\dfrac{\arctan(x+y)}{\arctan(x-y)}\right]^2$, 求 $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$;

(2) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, 求 $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)$;

(3) $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$, 求 $f(tx,ty)(t\neq 0)$.

解 (1) $f\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\dfrac{\arctan 1}{\arctan\sqrt{3}}\right)^2=\left(\dfrac{\pi/4}{\pi/3}\right)^2=\dfrac{9}{16}.$

(2) $f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{2\cdot 1\cdot \dfrac{y}{x}}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=f(x,y)$.

(3) $f(tx,ty)=t^2x^2+t^2y^2-t^2xy\tan\dfrac{x}{y}=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}\right)$
$=t^2f(x,y)$.

注 满足 $f(tx,ty)=t^kf(x,y)(t>0)$ 的函数 $f(x,y)$ 称为 k 次齐次函数. 上述 (3) 中的函数为 2 次齐次函数.

2. 设 $F(x,y)=\ln x\ln y$, 证明: 若 $u>0,v>0$, 则

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证 $F(xy,uv)=\ln(xy)\ln(uv)=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$$=\ln x\ln u+\ln x\ln v+\ln y\ln u+\ln y\ln v$$
$$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

3. 求下列函数的定义域, 并说明这是何种点集 (开集、闭集; 有界集、无界集; 区域):

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;　　(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{2x^2+3y^2}$;

(3) $f(x,y)=\sqrt{xy}$;　　(4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$;

(5) $f(x,y)=\ln x+\ln y$;　　(6) $f(x,y)=\sqrt{\sin(x^2+y^2)}$;

(7) $f(x,y)=\ln(y-x)$;　　(8) $f(x,y)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$;

(9) $f(x,y,z)=\dfrac{z}{x^2+y^2+1}$;

(10) $f(x,y,z)=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$, 其中 $R>r\geqslant 0$.

解 (1) 函数的定义域为 $\{(x,y)|x^2\neq y^2\}=\{(x,y)|y\neq\pm x\}$, 此点集为无界开集, 不是区域 (因为不连通).

(2) 函数的定义域为 $\{(x,y)|(x,y)\neq(0,0)\}$, 此点集为坐标平面除去原点的点集, 是无界开集和开区域.

(3) 函数的定义域为 $\{(x,y)|xy \geqslant 0\}$, 此点集包含坐标轴和第一、三象限中的点, 是无界闭集和闭区域.

(4) 函数的定义域为 $\{(x,y)||x| \leqslant 1, |y| \geqslant 1\}$, 此点集为无界闭集, 不是区域.

(5) 函数的定义域为 $\{(x,y)|x > 0, y > 0\}$, 此点集为无界开集和开区域.

(6) 函数的定义域为 $\{(x,y)|2k\pi \leqslant x^2+y^2 \leqslant (2k+1)\pi, k \in \mathbb{N}\}$, 此点集为无界闭集, 不是区域 (因为不连通).

(7) 函数的定义域为 $\{(x,y)|y > x\}$, 此点集为直线 $y = x$ 上方的点集, 为无界开集和开区域.

(8) 函数的定义域为 $\mathbb{R}^2$, 此点集为无界集, 且既是开集也是闭集, 既是开区域也是闭区域.

(9) 函数的定义域为 $\mathbb{R}^3$, 此点集为无界集, 且既是开集也是闭集, 既是开区域也是闭区域.

(10) 函数的定义域为 $\{(x,y,z)|r^2 < x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}$, 此点集为有界集, 且既不是开集也不是闭集, 是包含部分边界的区域.

例 16-1-3 解答下列各题 (点集的有关证明):

1. 证明: 当且仅当存在各点互不相同的点列 $\{P_n\} \subset E, P_n \neq P_0$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 时, P_0 是 E 的聚点.

证 P_0 为点集 E 的聚点: 对 $\forall\delta > 0, U(P_0;\delta)$ 含有 E 中的无限多个点 $\iff$ 对 $\forall\delta > 0, U^\circ(P_0;\delta)$ 含有 E 中的点 $\iff$ 对 $\forall\delta > 0, U(P_0;\delta)$ 含有 E 中异于 P_0 的点.

"$\Rightarrow$": 由 $\{P_n\} \subset E, P_n \neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ 可知, 对 $\forall\delta > 0, U^\circ(P_0;\delta)$ 含有 E 中的点, 即 P_0 是 E 的聚点.

"$\Leftarrow$": 由聚点的定义有

对 $\delta_1 = 1, \exists P_1 \in U^\circ(P_0;\delta_1) \cap E$;

对 $\delta_2 = \min\left\{\dfrac{1}{2}, \rho(P_0,P_1)\right\}, \exists P_2 \in U^\circ(P_0;\delta_2) \cap E$;

……

对 $\delta_n = \min\left\{\dfrac{1}{n}, \rho(P_0,P_{n-1})\right\}, \exists P_n \in U^\circ(P_0;\delta_n) \cap E$;

显然, $\{P_n\}\subset E$, P_n 互不相同, $P_n\neq P_0$, 且

$$\rho(P_n,P_0)<\delta_n\leqslant\frac{1}{n}\to 0\quad(n\to\infty).$$

2. 证明: 闭区域必为闭集. 反之是否成立? 并说明理由.

证 设 D 为闭区域, 下面证明 D 为闭集, 即证明 D 的聚点都属于 D. 事实上, 因为闭区域 D 是开区域连同其边界所组成的点集, 设 P 为 D 的任意聚点, 则 $P\in\operatorname{int}(D)$ 或 $P\in\partial D$. 若 $P\in\operatorname{int}(D)$, 则由内点的定义可知 $P\in D$. 若 $P\in\partial D$, 则由闭区域的定义可知 $P\in D$.

闭集不一定是闭区域, 例如 $D:=\{(x,y)|y=x\}$ 是闭集 (D 的每个聚点都属于 D), 但没有内点 (不是开集), 因此不是区域, 从而不是闭区域.

3. 证明: 开集与闭集具有对偶性 —— 若 E 为开集, 则 E^c 为闭集; 若 E 为闭集, 则 E^c 为开集.

证 设 E 为开集, 下证 E^c 为闭集, 即证 E^c 的任意聚点都属于 E^c. 事实上, 设 P 为 E^c 的任意聚点, 则 $P\notin E$ (若 $P\in E$, 由 E 是开集知 $\exists\delta>0$, 使得 $U(P;\delta)\subset E$, 即 $U(P;\delta)\cap E^c=\varnothing$. 这与 P 为 E^c 的聚点矛盾), 从而 $P\in E^c$.

设 E 为闭集, 下证 E^c 为开集, 即证 E^c 的任意点为内点. 事实上, 设 $P\in E^c$, 则可证 $\exists\delta>0$, 使得 $U(P;\delta)\subset E^c\Longleftrightarrow U(P;\delta)\cap E=\varnothing$ (若对 $\forall\delta>0, U(P;\delta)\cap E\neq\varnothing$, 则 P 为 E 的聚点. 由 E 为闭集知 $P\in E$. 这与 $P\in E^c$ 矛盾).

4. 证明:

(1) 若 F_1,F_2 为闭集, 则 $F_1\cup F_2$ 与 $F_1\cap F_2$ 都为闭集;

(2) 若 E_1,E_2 为开集, 则 $E_1\cup E_2$ 与 $E_1\cap E_2$ 都为开集;

(3) 若 F 为闭集, E 为开集, 则 $F\backslash E$ 为闭集, $E\backslash F$ 为开集.

证 (1) 设 P 为 $F_1\cup F_2$ 的任意聚点, 下证 $P\in F_1\cup F_2$. 事实上, 由 P 是 $F_1\cup F_2$ 的聚点, 则对 $\forall\delta>0, U(P;\delta)$ 含有 $F_1\cup F_2$ 中的无限多个点, 因此 $U(P;\delta)$ 至少含有 F_1 或 F_2 中的无限多个点. 再由 F_1,F_2 为闭集知 $P\in F_1$ 或 $P\in F_2$, 故 $P\in F_1\cup F_2$.

设 P 为 $F_1 \cap F_2$ 的任意聚点, 下证 $P \in F_1 \cap F_2$. 事实上, 由 P 是 $F_1 \cap F_2$ 的聚点, 则对 $\forall \delta > 0, U(P;\delta)$ 含有 $F_1 \cap F_2$ 中的无限多个点, 因此 $U(P;\delta)$ 既含有 F_1 中的无限多个点又含有 F_2 中的无限多个点. 再由 F_1, F_2 为闭集知 $P \in F_1$ 且 $P \in F_2$, 故 $P \in F_1 \cap F_2$.

(2) 对 $\forall P \in E_1 \cup E_2$, 下证 P 为 $E_1 \cup E_2$ 的内点, 即 $\exists \delta > 0$, 使得 $U(P;\delta) \subset E_1 \cup E_2$. 因为 $P \in E_1 \cup E_2 \Longleftrightarrow P \in E_1$ 或 $P \in E_2$, 又由于 E_1, E_2 为开集, 由开集的定义知 $\exists \delta > 0$, 使得 $U(P;\delta) \subset E_1$ 或 $U(P;\delta) \subset E_2$, 从而 $U(P;\delta) \subset E_1 \cup E_2$, 即 P 为 $E_1 \cup E_2$ 的内点.

对 $\forall P \in E_1 \cap E_2$, 下证 P 为 $E_1 \cap E_2$ 的内点, 即 $\exists \delta > 0$, 使得 $U(P;\delta) \subset E_1 \cap E_2$. 因为 $P \in E_1 \cap E_2 \Longleftrightarrow P \in E_1$ 且 $P \in E_2$, 又由于 E_1, E_2 为开集, 由开集的定义知 $\exists \delta > 0$, 使得 $U(P;\delta) \subset E_1$ 且 $U(P;\delta) \subset E_2$, 从而 $U(P;\delta) \subset E_1 \cap E_2$, 即 P 为 $E_1 \cap E_2$ 的内点.

(3) **法一** (i) 设 P 为 $F \backslash E$ 的任意聚点, 下证 $P \in F \backslash E$. 事实上, 由 P 是 $F \backslash E$ 的聚点, 则对 $\forall \delta > 0, U(P;\delta)$ 含有 $F \backslash E$ 中的无限多个点, 因此 $U(P;\delta)$ 含有 F 中的无限多个点. 再由 F 为闭集知 $P \in F$ 且 $P \notin E$ (若 $P \in E$, 由 E 为开集知 $\exists \delta > 0$, 使得 $U(P;\delta) \subset E$. 这与 P 为 $F \backslash E$ 的聚点矛盾), 所以 $P \in F \backslash E$.

(ii) 对 $\forall P \in E \backslash F$, 下证 P 为 $E \backslash F$ 的内点, 即 $\exists \delta > 0$, 使得 $U(P;\delta) \subset E \backslash F$. 因为 $P \in E \backslash F \Longrightarrow P \in E$ 且 $P \notin F$, 又由于 E 为开集,F 为闭集, 由开集的定义知 $\exists \delta > 0$, 使得 $U(P;\delta) \subset E$ 且 $U(P;\delta) \cap F = \varnothing$ (若对 $\forall \delta > 0, U(P;\delta) \cap F \neq \varnothing$, 由 F 为闭集得 $P \in F$. 这与 $P \in E \backslash F$ 矛盾), 从而 $U(P;\delta) \subset E \backslash F$, 即 P 为 $E \backslash F$ 的内点.

法二 (i) $F \backslash E = F \cap E^c$. 由于 E 为开集, 则 E^c 为闭集 (根据第 3 题). 再由结论 (1) 知 $F \backslash E = F \cap E^c$ 为闭集.

(ii) $E \backslash F = E \cap F^c$. 由于 F 为闭集, 则 F^c 为开集 (根据第 3 题). 再由结论 (2) 知 $E \backslash F = E \cap F^c$ 为开集.

例 16-1-4 解答下列各题 (有关点列的证明):

1. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$, 则

$$f \text{ 在 } D \text{ 上无界} \Longleftrightarrow \exists \{P_n\} \subset D, \text{ 使得 } \lim_{n \to \infty} f(P_n) = \infty.$$

证 必要性 若 f 在 D 上无界, 则对 $\forall M>0, \exists P\in D$, 使得 $|f(P)|>M$. 于是, 对 $M_n=n\ (n=1,2,\cdots), \exists P_n\in D$, 使得 $|f(P_n)|>n$, 即 $\exists\{P_n\}\subset D$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)=\infty$.

充分性 若 $\exists\{P_n\}\subset D$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(P_n)=\infty$ 则对 $\forall M>0, \exists P_{n_0}\in D$, 使得 $|f(P_{n_0})|>M$, 即 f 在 D 上无界.

注 设 $D\subset\mathbb{R}^2$, 则 f 在 D 上无上 (下) 界 $\Longleftrightarrow \exists\{P_n\}\subset D$, 使得 $\lim\limits_{k\to+\infty} f(P_n)=+\infty(-\infty)$.

2. 证明: 点列 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $P_0(x_0,y_0) \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$.

证 必要性 若 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $P_0(x_0,y_0)$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有

$$\rho(P_n,P_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,$$

从而

$$|x_n-x_0|\leqslant\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,$$

且

$$|y_n-y_0|\leqslant\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$.

充分性 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y_0$, 则对 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$, 当 $n>N$ 时, 有

$$|x_n-x_0|<\frac{\varepsilon}{2},\quad |y_n-y_0|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

此时, 有

$$\rho(P_n,P_0)=\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}\leqslant|x_n-x_0|+|y_n-y_0|<\varepsilon,$$

即 $\{P_n(x_n,y_n)\}$ 收敛于 $P_0(x_0,y_0)$.

例 16-1-5 解答下列各题 (基本定理的证明):

1. 闭区域套定理可推广为闭集套定理, 试证明之.