高等学校试用教材

高 等 数 学

下 册

南京工学院数学教研组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高　等　数　学

下　册

南京工学院数学教研组编

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海群众印刷厂印装

开本 787×1092 1/32　印张 16 2/16　字数 389,000

1978年10月第1版　1979年3月第1次印刷

印数 1—160,000

书号 13012·0143　定价 1.15 元

目　　录

下　　册

第八章 无穷级数

无穷级数是用来表示函数和作数值计算的一种重要的数学工具．在计算某些函数值和求某些微分方程的近似解以及研究周期现象等问题中，无穷级数都起着十分重要的作用．

本章先介绍常数项级数，其中包括无穷级数的某些基本概念，而后着重介绍幂级数和傅里叶级数．

§8-1 常数项级数

1．无穷级数的概念

在初等数学中我们学过等差级数与等比级数，那里着重讲的级数是由有限多项相加而成的．本章要讲的无穷级数却是由无穷多项构成的．我们先通过一个简单的例子来说明为什么要研究无穷级数．

例 1 圆的面积问题．

在第二章中我们曾讨论过圆的面积问题，现在再从另外的角度来讨论圆的面积．

不妨设圆的半径为 1．先在圆内作一个内接正六边形（图 8-1），其面积记为 a_1，它是圆面积的一个近似值．再在这六边形的每一条边上作一个顶点在圆周上的等腰三角形，就得到六个等腰三角形，它们面积的和记为 a_2，则 a_1+a_2 就是圆内接正十二边形的面积．与 a_1 相比，它是圆面积的一个较好的近似值．同样，再在这正十二边形的每一条边上作顶点在圆周上的等腰三角形，就得

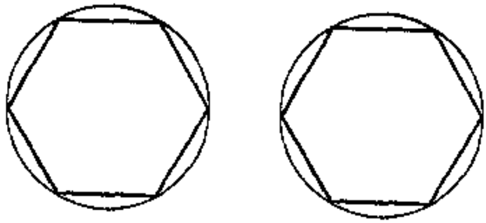

图 8-1

到十二个等腰三角形，它们面积的和记为 a_3，则 $a_1+a_2+a_3$ 就是圆内接正二十四边形的面积. 与 a_1 相比，它是圆面积的一个更好的近似值. 这样继续作下去，可以得到圆内接正 3×2^n 边形，它的面积是下列 n 个数的和:

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

当 $n\to\infty$ 时，内接正 3×2^n 边形的面积就转化为圆的面积，这时，圆面积的表达式记为

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots.$$

这种由无穷多项相"加"而构成的表达式，就是所谓的无穷级数. 现就一般情况给出它的定义.

定义 1 设有一数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，则表达式

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

就称为**无穷级数**，简称级数，并记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

其中 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ 称为级数的项，u_n 称为**一般项**或**公项**.

例如，

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

就是一个级数，其公项为 $u_n=\dfrac{1}{3^n}$，级数简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$.

又如，

$$2+4+8+16+\cdots+2^n+\cdots$$

也是一个级数，其公项为 $u_n=2^n$，级数简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n$.

这里所讨论的级数的每一项都是常数，故又称为**常数项级数**.

2. 无穷级数的收敛性

无穷多项相“加”与有限多项相加是有本质区别的. 我们知道，有限多项常数相加总是有和的，而且和也是一个常数. 而无穷多项常数相“加”的意义是什么还需要进行讨论. 不过，从例1得到一点启发：对于一个无穷级数，可以通过它的前 n 项和来认识. 这就是，先求出无穷级数的前 n 项和 S_n，再讨论当 $n\to\infty$ 时 S_n 的极限，如果 S_n 有极限，自然认为这个极限就是这个无穷级数的“和”. 如例1的那个无穷级数的“和”就是圆面积 π. 从这个观点出发，我们再考察几个例子.

例 2 讨论级数

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots.$$

解 先考察级数前 n 项的和

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}.$$

这是一个公比 $r=\frac{1}{3}$ 的有限项等比级数，其和为

$$S_n=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right),$$

当 $n\to\infty$ 时，显然有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{1}{2}.$$

这样，我们就认为这个无穷级数有"和"，"和"就是 S_n 当 $n\to\infty$ 时的极限值 $\frac{1}{2}$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}=\frac{1}{2}.$$

例 3 讨论级数

$$2+4+8+\cdots+2^n+\cdots.$$

解 级数前 n 项和

$$S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2(2^n-1),$$

当 $n\to\infty$ 时，$S_n\to\infty$. 这时，我们自然就认为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}2^n$ 没有"和".

例 4 讨论级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots.$$

解 级数的前 n 项和

$$S_n=1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}.$$

当 n 为奇数时，$S_n=1$；当 n 为偶数时，$S_n=0$. 可见当 $n\to\infty$ 时，S_n 不趋近于一个确定的常数，这时就认为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 没有"和".

通过上述例题的讨论可知，无穷级数不外乎有两种情况：一是前 n 项的和 S_n 随 $n\to\infty$ 而趋于一个确定的常数 S，即 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$. 二是当 $n\to\infty$ 时，S_n 不趋于一个确定的常数. 由此，我们引进下述定义：

定义 2 设有无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{1}$$

它的前 n 项和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

称为级数的第 n 部分和，如果当 $n\to\infty$ 时，S_n 有极限 S，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

就称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛的，并称 S 为级数的和，即

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

或
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

如果当 $n\to\infty$ 时，S_n 没有极限，就称级数是发散的.

根据定义 2，例 1、2 中的级数是收敛的，有和，其和分别为 π、$\frac{1}{2}$；而例 3、4 中的级数是发散的，没有和．由上述定义可以看出，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛或发散的问题，就是部分和 S_n 有无极限的问题．而 $S_n\ (n=1, 2, \cdots)$ 是一个部分和所成的数列，因此，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛或发散的问题也就是数列 $\{S_n\}$ 有无极限的问题.

例 5 讨论等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 的敛散性.

解 这是以 r 为公比的无穷等比级数，其部分和为

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

现在分三种情况进行讨论:

(1) 当 $|r|<1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right) = \frac{a}{1-r}.$$

这时等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 收敛，且其和为

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

(2) 当 $|r|>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$，所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty.$$

这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 是发散的.

(3) 当 $|r|=1$ 时, 分别讨论如下:

当 $r=1$ 时, $S_n=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{n\text{个}}=na$, 所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\infty.$$

这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ 是发散的.

当 $r=-1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$,

由于 S_n 的极限不存在, 所以级数也是发散的.

归纳以上的讨论, 等比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$: 当 $|r|<1$ 时收敛, 其和 $S=\frac{a}{1-r}$; 当 $|r|\geqslant 1$ 时发散.

例 6 判断级数

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$

是否收敛? 如果收敛, 求它的和.

解 级数的部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),\end{aligned}$$

而

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}.$$

所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 收敛, 它的和是 $\frac{1}{2}$.

由上述定义和例题可知: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则必有和 S, 即

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

这时
$$S-S_n=\sum_{m=n+1}^{\infty}u_m=r_n$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的余式．显然，当 $n\to\infty$ 时，余式 r_n 是一个无穷小量．如果用 S_n 作为 S 的近似值，那么所产生的误差为 $|r_n|$．

研究常数项级数的基本任务在于：一是判断它是否收敛，二是在收敛的情况下求其和 S．在简单情况下，这两个问题往往是同时解决的，如例 1、例 2 和例 6，但在许多情况下，求和 S 并不容易，甚至求不出．但是只要能判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，即使和 S 求不出，也可以求出它的近似值 S_n．所以，判断一个无穷级数收敛与否是我们首先关心的问题．

3．级数的基本性质

根据定义 2，可以推出无穷级数的基本性质：

(1) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛于和 S，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 也收敛，并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}cu_n=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n=cS,$$

其中 c 是不为零的常数．

证 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}cu_n$ 前 n 项的和为

$$S'_n=cu_1+cu_2+\cdots+cu_n=cS_n,$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}S'_n=\lim_{n\to\infty}cS_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=cS.$$

(2) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 分别收敛于 S 与 σ，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$ 也收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n=S\pm\sigma.$$

证 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 前 n 项的部分和为

$$S'_n=(u_1 \pm v_1)+(u_2 \pm v_2)+\cdots+(u_n \pm v_n)=S_n \pm \sigma_n,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} S'_n=\lim_{n\to\infty}(S_n \pm \sigma_n)=\lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \sigma_n=S \pm \sigma.$$

(3) 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 也收敛；反之，如果级数 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛，其中 m 为一定数。

证 设级数 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 的第 k 部分和为 S'_k，即

$$S'_k=u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+k},$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 m 部分和为 S_m，第 $m+k$ 部分和为 S_{m+k}，于是

$$S'_k=S_{m+k}-S_m.$$

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，即

$$\lim_{k\to\infty} S_{m+k}=S,$$

则

$$\lim_{k\to\infty} S'_k=\lim_{k\to\infty}(S_{m+k}-S_m)=S-S_m.$$

所以级数 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 也收敛，而它的和为

$$S'=S-S_m.$$

反之，如果级数 $\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S'，即

$$\lim_{k\to\infty} S'_k=S',$$

则

$$\lim_{k\to\infty} S_{m+k}=\lim_{k\to\infty}(S_m+S'_k)=S_m+S'.$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

这个性质说明：弃去级数前面的有限项或在级数前面加进新的有限项，并不影响级数的敛散性.

(4) 级数收敛的必要条件：

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则当 $n\to\infty$ 时，级数的公项 u_n 必趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

证 因为部分和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1},$$

所以

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，故有 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$，同时有 $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$，所以

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

这个性质告诉我们，如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则公项 u_n 必趋于零（当 $n\to\infty$ 时）．但是，由公项 u_n 趋于零（当 $n\to\infty$ 时），却不能断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是否收敛，此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散．下面举例说明.

例 7 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

称为调和级数．它的公项 $u_n = \frac{1}{n}$，显然有 $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的．因为它的部分和为

$$S_1 = 1,$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_{2^2} = S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{2}{2},$$

$$S_{2^3}=S_8=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+\frac{3}{2},$$

一般有

$$S_{2^n}\geqslant 1+\frac{n}{2}.$$

当 $n\to\infty$ 时，$1+\frac{n}{2}\to\infty$，所以 $S_{2^n}\to\infty$，因此，调和级数是发散的。

由此可见，$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的必要条件而不是充分条件。但是，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则可断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的。例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n$，它的公项为 $u_n=2^n$，当 $n\to\infty$ 时 u_n 不趋于零，所以它是发散的。

仅根据级数收敛性的定义和性质，判断一个级数是否收敛是不容易的，因此，需要进一步研究判断级数收敛的法则。

4. 正项级数及其收敛判别法

级数 $$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

其中 $u_n\geqslant 0(n=1, 2, \cdots)$，称为**正项级数**。关于正项级数的敛散性有下面的定理。

定理 1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界。

证 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n,$$

因为级数的各项 $u_n \geqslant 0 (n=1, 2, \cdots)$，所以

$$S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \cdots \leqslant S_n \leqslant \cdots,$$

即 $\{S_n\}$ 是单调增加的数列．因此，若级数收敛，即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$，则 $\{S_n\}$ 一定有界；反之，若 $\{S_n\}$ 有界，则根据第二章 §2-4 数列极限存在定理，级数一定收敛．

这条定理的重要意义在于：当判断一个正项级数是否收敛时，可以不求部分和 S_n 及其极限，只要能够判断 $\{S_n\}$ 是否有界就可以了．我们来看一个例子．

例 8 判断级数

$$\frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1} + \cdots$$

是否收敛．

解 级数的部分和为

$$S_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \frac{1}{2^3+1} + \cdots + \frac{1}{2^n+1},$$

如果用定义来判断级数的收敛性是较困难的，但因

$$\frac{1}{2^k+1} < \frac{1}{2^k} \quad (k=1, 2, \cdots, n),$$

当 $n \geqslant 1$ 时，有

$$S_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} < 1,$$

所以 $\{S_n\}$ 是有界的，从而级数是收敛的．

上述定理是判别正项级数是否收敛的基本法则，有关正项级数的其它判别法都是以这条定理为基础建立起来的．下面讲几个常用的判别法．

(1) 比较判别法

例 8 的方法启发我们,判断一个正项级数的敛散性,可以用它和一个已知的收敛级数或发散级数相比较的方法来确定. 下面的定理就是比较判别的法则.

定理 2 设有两个正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots. \tag{2}$$

1° 如果已知级数(2)收敛,且有 $u_n \leqslant v_n (n=1, 2, \cdots)$,则级数(1)也收敛;

2° 如果已知级数(2)发散,且有 $u_n \geqslant v_n (n=1, 2, \cdots)$,则级数(1)也发散.

证 设级数(1), (2)的第 n 部分和分别为

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = S_n,$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = S_n^*.$$

1° 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是收敛级数,令其和为 S^*, 又因 $u_n \leqslant v_n$ $(n=1, 2, \cdots)$,故有

$$S_n \leqslant S_n^* \leqslant S^*,$$

即 S_n 有界. 由定理 1 可知级数(1)是收敛的.

2° 因(2)是发散级数, 所以 S_n^* 是无界的, 又因 $u_n \geqslant v_n (n=1, 2, \cdots)$,故有

$$S_n \geqslant S_n^*.$$

所以 S_n 也是无界的,因此级数(1)发散.

例 9 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

的敛散性.

解 此级数称为"p 级数"．当 $p=1$ 时，级数是调和级数，所以它是发散的．当 $p<1$ 时，除第一项外，其余各项都大于调和级数的对应项，所以它也是发散的．当 $p>1$ 时，可将级数写成下面形式：

$$1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right]+\left[\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}\right]$$
$$+\left[\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{15^p}\right]+\cdots,$$

容易看出，p 级数的各项都不超过级数

$$1+\left[\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}\right]+\left[\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}\right]$$
$$+\left[\frac{1}{8^p}+\cdots+\frac{1}{8^p}\right]+\cdots \tag{3}$$

的对应项，而级数(3)当 $p>1$ 时是收敛的等比级数：

$$1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{2^{2(p-1)}}+\frac{1}{2^{3(p-1)}}+\cdots,$$

所以，当 $p>1$ 时"p 级数"收敛．

因此，我们得到结论：p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$，当 $p>1$ 时收敛；当 $p\leqslant 1$ 时发散．

在运用定理 2 时，等比级数与 p 级数常用来和其它级数进行比较．

例 10 判断下列级数是否收敛

$$\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{2}{3\cdot4\cdot5}+\frac{3}{4\cdot5\cdot6}+\cdots+\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\cdots.$$

解 因为这个级数的公项

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}<\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的 p 级数，所以原级数是收敛的．