高等学校教材

离散数学

方世昌 编

西北电讯工程学院出版社

第一章 数理逻辑

逻辑是研究推理的科学，分为形式逻辑和辩证逻辑。数理逻辑是用数学方法研究形式逻辑的一门科学，也就是用数学方法研究推理的科学。所谓数学方法，主要是指引进一套符号体系的方法，因此数理逻辑又叫符号逻辑。现代数理逻辑有四大分支：证明论、模型论、递归论和公理化集合论。我们介绍它们的共同基础——命题演算和谓词演算，即一般所谓古典数理逻辑。

§1.1 命 题

1.1.1 命题

断言是一陈述语句。一个**命题**是一个或真或假而不能两者都是的断言㊀。如果命题是真，我们说它的**真值**为**真**；如果命题是假，我们说它的真值是**假**。

例 1 下述都是命题：

(*a*) 今天下雪；

(*b*) $3+3=6$；

(*c*) 2 是偶数而 3 是奇数；

(*d*) 陈涉起义那天，杭州下雨；

(*e*) 较大的偶数都可表为二个质数之和。

以上命题，(*a*) 的真值取决于今天的天气，(*b*)和(*c*) 是真，(*d*) 已无法查明它的真值，但它是或真或假的，将它归属于命题。(*e*) 还难以确定真假，但它是有真值的，应归属于命题。

例 2 下述都不是命题：

(*a*) $x+y>4$。　　　　(*c*) 真好啊！

(*b*) $x=3$。　　　　(*d*) 你去哪里？

(*a*)和(*b*)是断言，但不是命题，因为它的真值取决于 x 和 y 的值。(*c*)和(*d*) 都不是断言，所以不是命题。下边我们再看一个例子。

例 3 一个人说："我正在说谎"。

他是在说谎还是在说真话呢？如果他是说谎，那末他说的是假；因为他领认他是说谎，所以他实际上是在说真话，我们得出结论如果他是说谎，那末他是讲真话。另一方面，如果他讲真话，那末他所说的是真，也就是他在说谎。我们得出结论如果他讲真话，那末他是在说谎。

㊀ 在一个系统中，命题的真值必须是真或假，则称系统的逻辑是**二值的**。它的特征"一个命题非真即假，反之亦然"。即是所知的排中律。我们所讨论的是**二值逻辑**，但亦有多于二个真值的逻辑系统。

从以上分析，我们得出他必须既非说谎也不是讲真话。这样，断言“我正在说谎”事实上不能指定它的真假，所以不是命题。这种断言叫**悖论**。

若一个命题已不能分解成更简单的命题，则这个命题叫**原子命题**或**本原命题**。例 1 中 (a)(b)(d)(e) 都是本原命题，但 (c) 不是，因为它可写成“2 是偶数”和“3 是奇数”二个命题。

命题和本原命题常用大写字母 P、Q、R…表示。如用 P 表示“4 是质数”，则记为

P：4 是质数。

1.1.2 命题联结词

命题和原子命题常可通过一些联结词构成新命题，这种新命题叫**复合命题**。例如

P：明天下雪，　　　Q：明天下雨

是两个命题，利用联结词“不”，“并且”，“或”等可分别构成新命题：

“明天不下雪”；

“明天下雪并且明天下雨”；

“明天下雪或者明天下雨”等。

即

“非 P”；

“P 并且 Q”；

“P 或 Q”等。

在代数式 $x+3$ 中，x、3 叫运算对象，$+$ 叫运算符，$x+3$ 表示运算结果。在命题演算中，也用同样术语。联结词就是命题演算中的运算符，叫**逻辑运算符**或叫**逻辑联结词**。常用的有以下五个。

1．否定词 $\neg$

设 P 表示命题，那末“P 不真”是另一命题，表示为 $\neg P$ 叫做 P 的**否定**，读做“非 P”。从排中律知：如果 P 是假，则 $\neg P$ 是真，反之亦然。所以否定词 $\neg$ 可以定义如右：

P	$\neg P$
假	真
真	假

这张表叫**真值表**，定义运算符的真值表，指明如何用运算对象的真值，来决定一个应用运算符的命题的真值。真值表的左边列出运算对象的真值的所有可能组合，结果命题的真值列在最右边的一列。为了便于阅读，我们通常用符号 T(true) 或 1 代表真，符号 F(false) 或 0 代表假。一般在公式中采用 T 和 F，在真值表中采用 1 和 0。这样，以上真值表可写成

P	$\neg P$
0	1
1	0

例 4

(a) P：4 是质数。

$\neg P$：4 不是质数，或 4 是质数，不是这样。

(b) Q：这些都是男同学。

$\neg Q$：这些不都是男同学。（翻译成“这些都不是男同学”是错的。）

2．合取词 $\wedge$

如果 P 和 Q 是命题，那末“P 并且 Q”也是一命题，记为 $P\wedge Q$，称为 P 和 Q 的**合取**，读做

“P与Q”或“P并且Q”。运算符$\wedge$定义如右：

真值表定义$P\wedge Q$是真当且仅当P和Q俱真。

P	Q	$P\wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

例5 P：王华的成绩很好，Q：王华的品德很好。$P\wedge Q$：王华的成绩很好并且品德很好。

3．析取词$\vee$

如果P和Q是命题，则“P或Q”也是一命题，记作$P\vee Q$，称为P和Q的**析取**，读做“P或Q”。运算符$\vee$定义如右：

从真值表可知如果P或Q至少有一为真，则$P\vee Q$为真。

P	Q	$P\vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

例6

(a) P：今晚我写字，Q：今晚我看书。

$P\vee Q$：今晚我写字或看书

“或”字常见的含义有两种，一种是“可兼或”，如上例中的或，它不排除今晚既看书又写字这种情况。一种是“排斥或”，例如“人固有一死，或重于泰山，或轻于鸿毛”中的“或”，它表示非此即彼，不可得兼。运算符$\vee$表示可兼或，排斥或以后用另一符号表达。

(b) P：今年是闰年，Q：今年她生孩子。

$P\vee Q$：今年是闰年或者今年她生孩子。

逻辑运算符可以把两个无关的命题联结成一新命题，作如此规定是因为有关和无关的界线难以划分，而如此规定不会妨碍应用。

4．蕴涵词$\longrightarrow$（涵常简写作含）

如果P和Q是命题，那末“P蕴含Q”也是命题，记为$P\longrightarrow Q$，称为**蕴含式**，读做“P蕴含Q”或“若P则Q”。运算对象P叫做**前提**，**假设**或**前件**，而Q叫做**结论**或**后件**。运算符$\longrightarrow$定义如右：

命题$P\longrightarrow Q$是假，仅当P是真而Q是假。蕴含式$P\longrightarrow Q$可以用多种方式陈述：

P	Q	$P\longrightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

“如果P，那末Q”；　　“P是Q的充分条件”；

“P仅当Q”；　　“Q是P的必要条件”等。

“Q每当P”；

例7

(a) P：天不下雨，Q：草木枯黄。

$P\longrightarrow Q$：如果天不下雨，那末草木枯黄。

(b) R：他是大学生，S：他会一门外语。

$R\longrightarrow S$：如果他是大学生，那末他会一门外语。

(c) T：桔子是紫色的，V：大地是不平的。

$T\longrightarrow V$：如果桔子是紫色的，那末大地是不平的。

在日常生活中用蕴含式来断言前提和结论之间的因果或实质关系，如上例(a)和(b)，这样的蕴含式叫**形式蕴含**。然而，在命题演算中，一个蕴含式的前提并不需要联系到结论，这

样的蕴含式叫**实质蕴含**。如上例(c)，桔子的颜色和大地的外形之间没有因果和实质关系存在，但蕴含式$T\longrightarrow V$是真，因为前提是假而结论是真。采用实质蕴含作定义，是因为前提和结论间有无因果和实质关系难以区分，且后者已包含前者，更便于应用。

给定命题$P\longrightarrow Q$，我们把$Q\longrightarrow P$，$\neg P\longrightarrow\neg Q$，$\neg Q\longrightarrow\neg P$分别叫做命题$P\longrightarrow Q$的**逆命题**，**反命题**，**逆反命题**。

5． 等值词$\longleftrightarrow$

如果P和Q是命题，那末"P等值于Q"也是命题，记为$P\longleftrightarrow Q$，称为**等值式**，读做"P等值于Q"。运算符$\longleftrightarrow$定义如右：

P	Q	$P\longleftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

把蕴含式和等值式的真值表加以比较，易知如果$P\longleftrightarrow Q$是真，那末$P\longrightarrow Q$和$Q\longrightarrow P$俱真；反之如果$P\longrightarrow Q$和$Q\longrightarrow P$俱真，那末$P\longleftrightarrow Q$是真。由于这些理由，$P\longleftrightarrow Q$也读做"P是Q的充要条件"或"P当且仅当Q"。

从以上五个定义可看出，联结词之意义由其真值表唯一确定，而不由命题的含义确定。

使用以上五个联结词，可将一些语句翻译成逻辑符。翻译时为了减少圆括号（一般不用其它括号）的使用，我们作以下约定：

· 运算符结合力的强弱顺序为

$\neg$、$\wedge$、$\vee$、$\longrightarrow$、$\longleftrightarrow$

凡符合此顺序的，括号均可省去。

· 相同的运算符，按从左至右次序计算时，括号可省去。

· 最外层的圆括号可以省去。

例如： $(\neg((P\wedge\neg Q)\vee R)\longrightarrow((R\vee P)\vee Q))$

可写成

$$\neg(P\wedge\neg Q\vee R)\longrightarrow R\vee P\vee Q$$

但有时为了看起来清楚醒目，也可以保留某些原可省去的括号。

例 8

(a) 设P表示"他有理论知识"，Q表示"他有实践经验"，则"他既有理论知识又有实践经验"可译为：$P\wedge Q$。

(b) 设P：明天下雨，Q：明天下雪，R：我去学校。则

(i) "如果明天不是雨夹雪则我去学校"可写成

$$\neg(P\wedge Q)\longrightarrow R$$

(ii) "如果明天不下雨并且不下雪则我去学校"可写成

$$\neg P\wedge\neg Q\longrightarrow R$$

(iii) "如果明天下雨或下雪则我不去学校"可写成

$$P\vee Q\longrightarrow\neg R$$

(iv) "明天，我将雨雪无阻一定去学校"可写成

$$P\wedge Q\wedge R\vee\neg P\wedge Q\wedge R\vee P\wedge\neg Q\wedge R\vee\neg P\wedge\neg Q\wedge R$$

(v) "当且仅当明天不下雪并且不下雨时我才去学校"可写成

$$\neg P \wedge \neg Q \longleftrightarrow R$$

(*c*) 用逻辑符表达"说小学生编不了程序，或说小学生用不了个人计算机，那是不对的"

设 P：小学生会编程序，Q：小学生会用个人计算机。则上句可译为

$$\neg(\neg P \vee \neg Q)$$

(*d*) 用逻辑符表达"若不是他生病或出差了，我是不会同意他不参加学习"。

设 P：他生病了，Q：他出差了，R：我同意他不参加学习，则上句可译为

$$\neg(P \vee Q) \longleftrightarrow \neg R$$

或

$$P \vee Q \longleftrightarrow R$$

翻译时要按逻辑关系翻译，而不能凭字面翻。例如，设 P：林芬做作业，Q：林芳做作业，则"林芬和林芳同时做作业"可译为 $P \wedge Q$，但"林芬和林芳是姐妹"就不能翻译成两个命题的合取，它是一个原子命题。

1.1.3 命题变元和命题公式

通常，如果 P 代表真值未指定的任意命题，我们就称 P 为命题变元；如果 P 代表一个真值已指定的命题，我们就称 P 为命题常元。但由于在命题演算中并不关心具体命题的涵义，只关心其真假值。因此，我们可以形式地定义它们。

以"真"、"假"为其变域的变元，称为**命题变元**；T 和 F 称为**命题常元**。

习惯上把含有命题变元的断言称为命题公式。但这样描述过于表面，它没能指出命题公式的结构。因为不是由命题变元、联结词和一些括号组成的字符串都能成为命题公式。因此在计算机科学中常用以下定义。

单个命题变元和命题常元叫**原子公式**。由以下形成规则生成的公式叫**命题公式**（简称公式）：

1. 单个原子公式是命题公式。
2. 如果 A 和 B 是命题公式，则 $(\neg A)$、$(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \longrightarrow B)$、$(A \longleftrightarrow B)$ 是命题公式。
3. 只有有限步应用条款 1 和 2 生成的公式才是命题公式。

这种定义叫归纳定义，也叫递归定义。由这种定义产生的公式叫**合式公式**。如何构成这种定义，以后再专门叙述。

命题公式的真假值一般是不确定的。当命题公式中所有的命题变元代以命题时，命题公式就变为命题。在不产生混乱时，我们把命题公式也叫做命题。

例 9

(*a*) 说明 $(P \longrightarrow (P \vee Q))$ 是命题公式。

解 (i) P 是命题公式　　根据条款 1

(ii) Q 是命题公式　　根据条款 1

(iii) $(P \vee Q)$ 是命题公式　　根据(i)(ii)和条款 2

(iv) $(P \longrightarrow (P \vee Q))$ 是命题公式　　根据(i)(iii)和条款 2

(*b*) 以下不是命题公式，因为它们不能由形成规则得出。

$$\wedge Q,\ (P\longrightarrow Q,\ P\longrightarrow\wedge Q,\ ((PQ)\wedge R)$$

为了减少圆括号的使用，以后手写命题公式时，可按过去的约定省略。

下面举例说明命题公式真值表的构成方法。

例 10

(*a*) $\neg((P\vee Q)\wedge P)$的真值表如下所示：

P	Q	$P\vee Q$	$(P\vee Q)\wedge P$	$\neg((P\vee Q)\wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

(*b*) 两个命题公式，如果有相同的真值，则称它们是**逻辑等价命题**。证明 $P\longleftrightarrow Q$ 与 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$ 是逻辑等价命题。

证：用真值表

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P\longleftrightarrow Q$	$P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1

因后二列的真假值完全一致，所以它们是逻辑等价命题。

1.1 习 题

1． 设 P 是命题“天下雪”；Q 是命题“我去镇上”；R 是命题“我有时间”。

(*a*) 用逻辑符号写出以下命题。

(i) 如天不下雪和我有时间，那末我去镇上。

(ii) 我去镇上，仅当我有时间。

(iii) 天不下雪。

(iv) 天正在下雪，我也没去镇上。

(*b*) 对下述命题用中文写出语句。

(i) $Q\longleftrightarrow(R\wedge\neg P)$

(ii) $R\wedge Q$

(iii) $(Q\longrightarrow R)\wedge(R\longrightarrow Q)$

(iv) $\neg(R\vee Q)$

2． 否定下列命题。

(*a*) 上海处处清洁。

(*b*) 每一个自然数都是偶数。

3. 说出下述每一命题的逆命题和逆反命题。

(a) 如果天下雨，我将不去。

(b) 仅当你去我将逗留。

(c) 如果 n 是大于 2 的正整数，则方程 $x^n+y^n=z^n$ 无正整数解（这是至今未能证明的费尔马最后定理）。

(d) 如果我不获得更多帮助，我不能完成这个任务。

4. 给 P 和 Q 指派真值 T，给 R 和 S 指派真值 F，求出下列命题的真值。

(a) $P\vee Q\wedge R$

(b) $P\wedge Q\wedge R\vee\neg((P\vee Q)\wedge(R\vee S))$

(c) $(\neg(P\wedge Q)\vee\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\vee\neg R)\wedge S$

(d) $\neg(P\wedge Q)\vee\neg R\vee((Q\longleftrightarrow\neg P)\longrightarrow R\vee\neg S)$

(e) $(P\longleftrightarrow R)\wedge(\neg Q\longrightarrow S)$

(f) $P\vee(Q\longrightarrow R\wedge\neg P)\longleftrightarrow Q\vee\neg S$

5. 构成下列公式的真值表：

(a) $Q\wedge(P\longrightarrow Q)\longrightarrow P$

(b) $\neg(P\vee Q\wedge R)\longleftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

(c) $(P\vee Q\longrightarrow Q\wedge P)\longrightarrow P\wedge\neg R$

(d) $((\neg P\longrightarrow P\wedge\neg Q)\longrightarrow R)\wedge Q\vee\neg R$

6. 证明下列公式的真值与它们的变元值无关。

(a) $P\wedge(P\longrightarrow Q)\longrightarrow Q$

(b) $(P\longrightarrow Q)\longrightarrow(\neg P\vee Q)$

(c) $(P\longrightarrow Q)\wedge(Q\longrightarrow R)\longrightarrow(P\longrightarrow R)$

(d) $(P\longleftrightarrow Q)\longleftrightarrow(P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q)$

7. 用真值表证明如果 $P\longleftrightarrow Q$ 是真，那末 $P\longrightarrow Q$ 和 $Q\longrightarrow P$ 都真。反之，如果 $P\longrightarrow Q$ 和 $Q\longrightarrow P$ 都真，那末 $P\longleftrightarrow Q$ 是真。

8. 对 P 和 Q 的所有值，证明 $P\longrightarrow Q$ 与 $\neg P\vee Q$ 有同样真值。证明 $(P\longrightarrow Q)\longleftrightarrow(\neg P\vee Q)$ 总是真的。

9. 一个有两个运算对象的逻辑运算符，如果颠倒运算对象的次序，产生一逻辑等价命题，则称为可交换的。

(a) 确定下述逻辑运算符哪些是可交换的。$\wedge$、$\vee$、$\longrightarrow$、$\longleftrightarrow$。

(b) 用真值表证明你的断言。

10. 设 $*$ 是具有两个运算对象的逻辑运算符，如果 $(x*y)*z$ 和 $x*(y*z)$ 逻辑等价，那末运算符 $*$ 是可结合的。

(a) 确定逻辑运算符 $\wedge$、$\vee$、$\longrightarrow$、$\longleftrightarrow$ 哪些是可结合的。

(b) 用真值表证明你的断言。

11. 指出以下各式哪些不是命题公式，如果是命题公式，则说明它为什么是的。

(a) $((\neg P\longrightarrow(P\wedge Q))\vee R)$

(b) $(PQ\vee R)$

(c) $P\wedge\vee R$

(d) $((Q\wedge(P\longrightarrow Q))\longrightarrow P)$

*12. 一个形容词如果不具有它所表示的性质，则称为“它谓的”（heterological），例如“单音节”（monosyllabic）就是它谓的形容词，而“多音节”（polysyllabic）就不是它谓的形容词，问“heterological”是它谓的形容词吗？为什么这是悖论？

§1.2 重言式

1.2.1 重言式

对有 n 个命题变元的命题公式 $A(P_1, P_2, \cdots P_n)$，命题变元的真值有 2^n 种不同的组合。每一种组合叫做一种**指派**，一共有 2^n 种指派，这就是说真值表有 2^n 行。对应于每一指派，命题公式得到一确定的值，即命题公式成为具有真假值的命题，于是可能出现以下情况：

1. 对应于所有指派，命题公式均取值真。这种命题公式叫**重言式**，或叫**永真式**。例如 $P\vee\neg P$。

2. 对应于所有指派，命题公式均取值假。这种命题公式叫**矛盾**，或叫**永假式**。例如 $P\wedge\neg P$。

3. 不是永真式，也不是永假式，这种命题公式叫**偶然**。

一个公式如果至少存在一个指派，使其值为真，则称此公式为**可满足的**；一个公式如果至少存在一个指派，使其值为假，则称此公式为**非永真**。

我们着重研究重言式，它最有用，因为它有以下特点。

1. 重言式的否定是矛盾，矛盾的否定是重言式，所以研究其一就可以了。

2. 重言式的合取、析取、蕴含、等值等都是重言式。这样，由简单的重言式可推出复杂的重言式。

3. 由重言式可以产生许多非常有用的恒等式和永真蕴含式。

1.2.2 恒等式

设 A：$A(P_1, P_2, \cdots P_n)$，B：$B(P_1, P_2, \cdots P_n)$ 是两个命题公式，这里 P_i（$i=1$、2、$\cdots n$）不一定在两公式中同时出现。

如果 $A\longleftrightarrow B$ 是重言式，则 A 与 B 对任何指派都有相同的真值。记为 $A\Longleftrightarrow B$，叫做**逻辑恒等式**，读做“A 恒等于 B”。

容易看出，$A\Longleftrightarrow B$ 不过是上节的“A 和 B 逻辑等价”的另一种描述方式而已。所以，$A\Longleftrightarrow B$ 也读做“A 等价于 B”。请注意符号 $\longleftrightarrow$ 与符号 $\Longleftrightarrow$ 意义不同。$\longleftrightarrow$ 是逻辑联结词，而 $\Longleftrightarrow$ 是表示 A 和 B 有逻辑等价这个关系的符号，它的作用相当于代数中的“=”。

常用的逻辑恒等式见表 1.2-1，表中符号 P、Q 和 R 代表任意命题，符号 T 代表真命题，符号 F 代表假命题。

表 1.2-1 逻辑恒等式

E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	双否定
E_2	$P \vee P \Leftrightarrow P$	$\vee$的等幂律
E_3	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	$\wedge$的等幂律
E_4	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	$\vee$的交换律
E_5	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	$\wedge$的交换律
E_6	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	$\vee$的结合律
E_7	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	$\wedge$的结合律
E_8	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow P \wedge Q \vee P \wedge R$	$\wedge$在$\vee$上的分配律
E_9	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$\vee$在$\wedge$上的分配律
E_{10}	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	德摩根定律
E_{11}	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	
E_{12}	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	吸收律
E_{13}	$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	
E_{14}	$(P \longrightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$	蕴含表达式
E_{15}	$(P \longleftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$	等价表达式
E_{16}	$P \vee T \Leftrightarrow T$	
E_{17}	$P \wedge F \Leftrightarrow F$	
E_{18}	$P \vee F \Leftrightarrow P$	
E_{19}	$P \wedge T \Leftrightarrow P$	
E_{20}	$P \vee \neg P \Leftrightarrow T$	
E_{21}	$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$	
△ E_{22}	$(P \wedge Q \longrightarrow R) \Leftrightarrow (P \longrightarrow (Q \longrightarrow R))$	输出律
△ E_{23}	$((P \longrightarrow Q) \wedge (P \longrightarrow \neg Q)) \Leftrightarrow \neg P$	归谬律 ?
E_{24}	$(P \longrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \longrightarrow \neg P)$	逆反律

有些恒等式特别重要，例如 E_{14} 允许蕴含式用析取式表达，E_{10}、E_{11} 允许析取式和合取式互相表达，另外，E_{15}、E_{24} 也是常用的。表中所有公式都可用构造真值表证明。

1.2.3 永真蕴含式

如果 $A \longrightarrow B$ 是一永真式，那末称为**永真蕴含式**，记为 $A \Longrightarrow B$，读做"A 永真蕴含 B"㊀。

常用的永真蕴含式如表 1.2-2 所示。

永真蕴含式也可用真值表证明，但也可用以下办法证明。

△ 1. 假定前件是真，若能推出后件是真，则此蕴含式是真。

△ 2. 假定后件是假，若能推出前件是假，则此蕴含式是真。

例 1 证明 $\neg Q \wedge (P \longrightarrow Q) \Longrightarrow \neg P$

方法 1：设 $\neg Q \wedge (P \longrightarrow Q)$ 是真。则 $\neg Q$、$P \longrightarrow Q$ 是真。所以，Q 是假，P 是假。因而 $\neg P$ 是真。故

㊀ 许多课本中，$\longrightarrow$ 和 $\Longrightarrow$，$\longleftrightarrow$ 和 $\Leftrightarrow$ 采用同一符号，需从前后文看出含义。

表 1.2-2 永真蕴含式

I_1	$P \Longrightarrow P\vee Q$
I_2	$P\wedge Q \Longrightarrow P$
I_3	$P\wedge(P\longrightarrow Q)\Longrightarrow Q$
I_4	$(P\longrightarrow Q)\wedge\neg Q\Longrightarrow\neg P$
I_5	$\neg P\wedge(P\vee Q)\Longrightarrow Q$
I_6	$(P\longrightarrow Q)\wedge(Q\longrightarrow R)\Longrightarrow(P\longrightarrow R)$
I_7	$(P\longrightarrow Q)\Longrightarrow((Q\longrightarrow R)\longrightarrow(P\longrightarrow R))$
I_8	$((P\longrightarrow Q)\wedge(R\longrightarrow S))\Longrightarrow(P\wedge R\longrightarrow Q\wedge S)$
I_9	$((P\longleftrightarrow Q)\wedge(Q\longleftrightarrow R))\Longrightarrow(P\longleftrightarrow R)$

$$\neg Q\wedge(P\longrightarrow Q)\Longrightarrow\neg P$$

方法2：设$\neg P$是假，则P是真。以下分情况讨论。

（i）若Q为真，则$\neg Q$是假，所以$\neg Q\wedge(P\longrightarrow Q)$是假。

（ii）若Q是假，则$P\longrightarrow Q$是假，所以$\neg Q\wedge(P\longrightarrow Q)$是假。

故　$\neg Q\wedge(P\longrightarrow Q)\Longrightarrow\neg P$。

1.2.4 恒等式和永真蕴含式的二个性质

1. 若$A\Longleftrightarrow B$、$B\Longleftrightarrow C$　则$A\Longleftrightarrow C$；若$A\Longrightarrow B$、$B\Longrightarrow C$则$A\Longrightarrow C$。

这一性质也可叙述为：逻辑恒等和永真蕴含都是传递的。前者留给读者自证，现证明后者。

证　$A\longrightarrow B$永真；$B\longrightarrow C$永真，所以

$(A\longrightarrow B)\wedge(B\longrightarrow C)$永真。

由公式I_6得$A\longrightarrow C$永真，即$A\Longrightarrow C$。

2. 若$A\Longrightarrow B$、$A\Longrightarrow C$，则$A\Longrightarrow B\wedge C$。

证　A是真时，B和C都真，所以$B\wedge C$也真。因此$A\longrightarrow B\wedge C$永真，即$A\Longrightarrow B\wedge C$。

1.2.5 代入规则和替换规则

1. 代入规则（rule of substitution）

一重言式中某个命题变元出现的每一处均代入以同一公式后，所得的仍是重言式。

这条规则之所以正确是由于重言式之值不依赖于变元的值的缘故。例如

$P\wedge\neg P\Longleftrightarrow F$，今以$R\wedge Q$代$P$得$(R\wedge Q)\wedge\neg(R\wedge Q)\Longleftrightarrow F$，

仍正确。它的思想就如同在代数中，若

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

则

$$(a+b)^2-(mn)^2=(a+b+mn)(a+b-mn)$$

一样。

对非重言式，也可用以上方法作代入运算，只是结果不能保证是非重言式。例如

B：$P \longrightarrow (Q \wedge P)$，

用 $R \longleftrightarrow S$ 代换 B 中之 P，可得

A：$(R \longleftrightarrow S) \longrightarrow (Q \wedge (R \longleftrightarrow S))$

我们称公式 A 是公式 B 的**代入实例**。

2. **替换规则**（rule of replacement）

设有恒等式 $A \Longleftrightarrow B$，若在公式 C 中出现 A 的地方，替换以 B（**不必每一处**）而得到公式 D，则 $C \Longleftrightarrow D$。

如果 A 是合式公式 C 中完整的一部分，且 A 本身是合式公式，则称 A 是 C 的**子公式**，规则中"公式 C 中出现 A"意指"A 是 C 的子公式"。这条规则的正确性是由于在公式 C 和 D 中，除替换部分外均相同，但对任一指派，A 和 B 的真值相同，所以 C 和 D 的真值也相同，故 $C \Longleftrightarrow D$。

应用这二条规则和已有的重言式可以证明新的重言式。

例如，对公式 E_4：$P \vee Q \Longleftrightarrow Q \vee P$，我们以 $A \wedge B$ 代 P，$\neg A \wedge \neg B$ 代 Q，就得出公式

$$A \wedge B \vee \neg A \wedge \neg B \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B \vee A \wedge B$$

以 $\neg A$ 代 P，$\neg A \wedge B \vee C$ 代 Q，就得出公式

$$\neg A \vee (\neg A \wedge B \vee C) \Longleftrightarrow (\neg A \wedge B \vee C) \vee \neg A$$

……

对公式 E_{19}：$P \wedge T \Longleftrightarrow P$，我们利用公式 $P \vee \neg P \Longleftrightarrow T$，对其中的 T 作替换（注意不是代入，对命题常元不能代入）得公式

$$P \wedge (P \vee \neg P) \Longleftrightarrow P$$

……

因此，我们可以说表 1.2-1 和表 1.2-2 中的字符 P、Q 和 R 不仅代表命题变元，而且可以代表命题公式，T 和 F 不仅代表真命题和假命题，而且可以代表重言式和永假式。用这样的观点看待表中的公式，应用就更方便了。

例 2

(a) 证明 $P \wedge \neg Q \vee Q \Longleftrightarrow P \vee Q$

证 $P \wedge \neg Q \vee Q$

$\Longleftrightarrow Q \vee P \wedge \neg Q$	E_4
$\Longleftrightarrow (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q)$	E_9
$\Longleftrightarrow (Q \vee P) \wedge T$	E_{20} 和替换规则
$\Longleftrightarrow Q \vee P$	E_{19}
$\Longleftrightarrow P \vee Q$	E_4

(b) 证明 $(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (Q \vee R) \Longleftrightarrow P \vee Q \vee R$

证 $(P \longrightarrow Q) \longrightarrow (Q \vee R)$

$\Longleftrightarrow (\neg P \vee Q) \longrightarrow (Q \vee R)$	E_{14} 和替换规则
$\Longleftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee R)$	E_{14}
$\Longleftrightarrow P \wedge \neg Q \vee (Q \vee R)$	E_{10}、E_1 和替换规则

$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \vee Q) \vee R \qquad E_6$$

$$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R \qquad \text{例 2 (a) 和替换规则}$$

(c) 试将语句"情况并非如此：如果他不来，那末我也不去。"化简。

解　设P：他来，Q：我去，则上述语句可翻译为$\neg(\neg P \rightarrow \neg Q)$。简化此公式

$$\begin{aligned} &\neg(\neg P \rightarrow \neg Q) \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg\neg P \vee \neg Q) && E_{14}\text{和替换规则} \\ &\Leftrightarrow \neg\neg\neg P \wedge \neg\neg Q && E_{10} \\ &\Leftrightarrow \neg P \wedge Q && E_1\text{和替换规则} \\ &\Leftrightarrow Q \wedge \neg P && E_5 \end{aligned}$$

化简后的语句是"我去了，而他不来"。

1.2.6 对偶原理

定义 1.2-1 设有公式A，其中仅有联结词$\wedge$、$\vee$、$\neg$。在A中将$\wedge$、$\vee$、T、F分别换以$\vee$、$\wedge$、F、T得公式A^*，则A^*称为A的**对偶公式**。

对A^*采取同样手续，又得A，所以A也是A^*的对偶。因此，对偶是相互的。

例 3

(a) $\neg P \vee (Q \wedge R)$ 和 $\neg P \wedge (Q \vee R)$ 互为对偶。

(b) $P \vee F$ 和 $P \wedge T$ 互为对偶。

定理 1.2-1 设A和A^*是对偶式。$P_1, P_2, \cdots P_n$是出现于A和A^*中的所有命题变元，于是

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots P_n) \Leftrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots \neg P_n)$$

定理 1.2-1 的证明留待学了一般归纳法后再在§2.3给出。但对具体的命题公式，不难连续应用德摩根定律证得。如在例 3 (a) 中，

$$\begin{aligned} &A(P,Q,R) \Leftrightarrow \neg P \vee Q \wedge R \\ &\neg A(P,Q,R) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q \wedge R) \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge \neg(Q \wedge R) \\ &\qquad\qquad \Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \\ &A^*(P,Q,R) \Leftrightarrow \neg P \wedge (Q \vee R) \\ &A^*(\neg P, \neg Q, \neg R) \Leftrightarrow \neg(\neg P) \wedge (\neg Q \vee \neg R) \end{aligned}$$

所以，

$$\neg A(P,Q,R) \Leftrightarrow A^*(\neg P, \neg Q, \neg R)。$$

定理 1.2-2 若$A \Leftrightarrow B$，且A、B为命题变元$P_1, P_2, \cdots P_n$及联结词$\wedge$、$\vee$、$\neg$构成的公式，则$A^* \Leftrightarrow B^*$。

证　$A \Leftrightarrow B$意味着

$$A(P_1, P_2, \cdots P_n) \leftrightarrow B(P_1, P_2, \cdots P_n)\text{永真}$$

所以

$$\neg A(P_1, P_2, \cdots P_n) \leftrightarrow \neg B(P_1, P_2, \cdots P_n)\text{永真}$$

由定理 1.2-1 得

$$A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots \neg P_n) \longleftrightarrow B^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots \neg P_n)\text{永真}$$

因为上式是永真式，可以使用代入规则，以 $\neg P_i$ 代 P_i，$1 \leqslant i \leqslant n$，得

$$A^*(P_1, P_2, \cdots P_n) \longleftrightarrow B^*(P_1, P_2, \cdots P_n)\text{永真}$$

所以，$A^* \Longleftrightarrow B^*$。证毕。

本定理常称为**对偶原理**。

例 4 若 $(P \wedge Q) \vee (\neg P \vee (\neg P \vee Q)) \Longleftrightarrow \neg P \vee Q$，则由对偶原理得

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \wedge (\neg P \wedge Q)) \Longleftrightarrow \neg P \wedge Q$$

定理 1.2-3 如果 $A \Longrightarrow B$，且 A、B 为命题变元 $P_1, P_2 \cdots P_n$ 及联结词 $\wedge$、$\vee$、$\neg$ 构成的公式，则 $B^* \Longrightarrow A^*$。

证 $A \Longrightarrow B$ 意味着

$$A(P_1, P_2, \cdots P_n) \longrightarrow B(P_1, P_2, \cdots P_n)\text{永真},$$

$$\neg B(P_1, P_2, \cdots P_n) \longrightarrow \neg A(P_1, P_2, \cdots P_n)\text{永真}。$$

由定理 1.2-1 得

$$B^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots \neg P_n) \longrightarrow A^*(\neg P_1, \neg P_2, \cdots \neg P_n)\text{永真}$$

因为上式是永真式，可以使用代入规则，以 $\neg P_i$ 代 P_i，$1 \leqslant i \leqslant n$，得

$$B^* \Longrightarrow A^*。\qquad\qquad \text{证毕。}$$

1.2 习 题

1. 指出下列命题哪些是重言式、偶然和矛盾。

(a) $P \vee \neg P$

(b) $P \wedge \neg P$

(c) $P \longrightarrow \neg(\neg P)$

(d) $\neg(P \wedge Q) \longleftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

(e) $\neg(P \vee Q) \longleftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

(f) $(P \longrightarrow Q) \longleftrightarrow (\neg Q \longrightarrow \neg P)$

(g) $(P \longrightarrow Q) \wedge (Q \longrightarrow P)$

(h) $P \wedge (Q \vee R) \longrightarrow (P \wedge Q \vee P \wedge R)$

(i) $P \wedge \neg P \longrightarrow Q$

(j) $P \vee \neg Q \longrightarrow Q$

(k) $P \longrightarrow P \vee Q$

(l) $P \wedge Q \longrightarrow P$

(m) $(P \wedge Q \longleftrightarrow P) \longleftrightarrow (P \longleftrightarrow Q)$

(n) $((P \longrightarrow Q) \vee (R \longrightarrow S)) \longrightarrow ((P \vee R) \longrightarrow (Q \vee S))$

2. 对下述每一表达式，用恒等式找出仅用 $\wedge$ 和 $\neg$ 的等价表达式，并尽可能简单。

(a) $P \vee Q \vee \neg R$

(b) $P \vee (\neg Q \wedge R \longrightarrow P)$

(c) $P \longrightarrow (Q \longrightarrow P)$

对下述每一表达式，用恒等式找出仅用$\vee$和$\neg$的等价表达式，并尽可能简单。

(d) $(P\wedge Q)\wedge\neg P$

(e) $(P\longrightarrow(Q\vee\neg R))\wedge\neg P\wedge Q$

(f) $\neg P\wedge\neg Q\wedge(\neg R\longrightarrow P)$

3. 用化简左边成右边的方法，证明以下重言式。

(a) $((P\wedge Q)\longrightarrow P)\longleftrightarrow T$

(b) $\neg(\neg(P\vee Q)\longrightarrow\neg P)\longleftrightarrow F$

(c) $(Q\longrightarrow P)\wedge(\neg P\longrightarrow Q)\wedge(Q\longleftrightarrow Q)\longleftrightarrow P$

(d) $(P\longrightarrow\neg P)\wedge(\neg P\longrightarrow P)\longleftrightarrow F$

4. 证明下列等价关系。

(a) $P\longrightarrow(Q\longrightarrow P)\Longleftrightarrow\neg P\longrightarrow(P\longrightarrow Q)$

(b) $(P\longrightarrow Q)\wedge(R\longrightarrow Q)\Longleftrightarrow(P\vee R\longrightarrow Q)$

(c) $\neg(P\longleftrightarrow Q)\Longleftrightarrow(P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q)\Longleftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee(\neg P\wedge Q)$

(d) $\neg(P\longrightarrow Q)\Longleftrightarrow P\wedge\neg Q$

5. 使用恒等式证明下列各式，并写出与它们对偶的公式。

(a) $(\neg(\neg P\vee\neg Q)\vee\neg(\neg P\vee Q))\Longleftrightarrow P$

(b) $(P\vee\neg Q)\wedge(P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q)\Longleftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)$

(c) $Q\vee\neg((\neg P\vee Q)\wedge P)\Longleftrightarrow T$

6. 求出下列公式的最简等价式。

(a) $((P\longrightarrow Q)\longleftrightarrow(\neg Q\longrightarrow\neg P))\wedge R$

(b) $P\vee\neg P\vee(Q\wedge\neg Q)$

(c) $(P\wedge(Q\wedge S))\vee(\neg P\wedge(Q\wedge S))$

7. 证明下列蕴含式。

(a) $P\wedge Q\Longrightarrow(P\longrightarrow Q)$

(b) $P\Longrightarrow(Q\longrightarrow P)$

(c) $(P\longrightarrow(Q\longrightarrow R))\Longrightarrow(P\longrightarrow Q)\longrightarrow(P\longrightarrow R)$

8. 不构成真值表而证明下列蕴含式。

(a) $P\longrightarrow Q\Longrightarrow P\longrightarrow P\wedge Q$

(b) $(P\longrightarrow Q)\longrightarrow Q\Longrightarrow P\vee Q$

(c) $((P\vee\neg P)\longrightarrow Q)\longrightarrow((P\vee\neg P)\longrightarrow R)\Longrightarrow(Q\longrightarrow R)$

(d) $(Q\longrightarrow(P\wedge\neg P))\longrightarrow(R\longrightarrow(P\wedge\neg P))\Longrightarrow(R\longrightarrow Q)$

9. (a) 与非运算符（又叫悉非（Sheffer）记号）用下述真值表定义

$P\uparrow Q\Longleftrightarrow\neg(P\wedge Q)$，试证明

P	Q	$P\uparrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

(i) $P\uparrow P\Longleftrightarrow\neg P$

(ii) $(P\uparrow P)\uparrow(Q\uparrow Q)\Longleftrightarrow P\vee Q$

(iii) $(P\uparrow Q)\uparrow(P\uparrow Q)\Longleftrightarrow P\wedge Q$

(b) 或非运算符（又叫皮尔斯（Peirce）箭头）用下述真值表定义

它与$\neg(P\vee Q)$逻辑等价。对下述每一式，找出仅用$\downarrow$表示的等价式。

(i) $\neg P$；(ii) $P\vee Q$；(iii) $P\wedge Q$。

P	Q	$P\downarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

10．$\Box$和$*$是具有两个运算对象的逻辑运算符，如果$P\Box(Q*R)$和$(P\Box Q)*(P\Box R)$逻辑等价，那末说$\Box$在$*$上可分配。

(a) 用真值表证明$\wedge$和$\vee$互相可分配。

(b) $\wedge$、$\vee$和$\longrightarrow$对自己可分配吗？

(c) 数的加法和乘法对自己可分配吗？

11．证明"从假的前提出发，能证明任意命题"。提示：考虑$\longrightarrow$的真值表。

12．对一个重言式使用代入规则后仍得重言式，对一个偶然和矛盾，使用代入规则后，结果如何？

对一个重言式，使用替换规则后是否仍得重言式？对一个偶然和矛盾，使用替换规则后，结果如何？

13．求出下列各式的代入实例

(a) $(((P\longrightarrow Q)\longrightarrow P)\longrightarrow P)$；用$P\longrightarrow Q$代$P$，用$((P\longrightarrow Q)\longrightarrow R)$代$Q$。

(b) $((P\longrightarrow Q)\longrightarrow(Q\longrightarrow P))$；用$Q$代$P$，用$P\wedge\neg P$代$Q$。

§1.3 范　　式

命题公式千变万化，这对研究其性质和应用带来困难。为此，我们有必要研究如何将命题公式转化为逻辑等价的标准形式问题，以简化研究工作并方便应用。这种标准形式就称为范式。

1.3.1 析取范式和合取范式

为叙述方便，我们把合取式称呼为积，析取式称呼为和。

定义 1.3-1 命题公式中的一些命题变元和一些命题变元的否定之积，称为**基本积**；一些命题变元和一些命题变元的否定之和，称为**基本和**。

例如，给定命题变元P和Q，则P、$\neg P\wedge Q$、$P\wedge Q$、$\neg P\wedge P$、$\neg Q\wedge P\wedge Q$等都是基本积；Q、$\neg Q\vee P$、$P\vee Q$、$P\vee\neg P$、$P\vee Q\vee\neg Q$等都是基本和。

基本积（和）中的子公式称为此基本积（和）的因子。

定理 1.3-1 一个基本积是永假式，当且仅当它含有P、$\neg P$形式的两个因子。

证　充分性　$P\wedge\neg P$是永假式，而$Q\wedge F\Leftrightarrow F$，所以含有$P$和$\neg P$形式的两个因子时，此基本积是永假式。

必要性　用反证法。设基本积永假但不含P和$\neg P$形式的两个因子，则给这个基本积中的命题变元指派真值T，带有否定符的命题变元指派真值F，得基本积的真值是T，但这与假设矛盾。证毕。

定理 1.3-2 一个基本和是永真式，当且仅当它含有P、$\neg P$形式的两个因子。

证明留给读者作练习。

定义 1.3-2 一个由基本积之和组成的公式，如果与给定的命题公式A等价，则称它是A的**析取范式**，记为

$$A \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n, \qquad n \geqslant 1$$

这里A_1，A_2，$\cdots A_n$是基本积。

任何一个命题公式都可求得它的析取范式，这是因为命题公式中出现的$\longrightarrow$和$\longleftrightarrow$可用$\wedge$、$\vee$和$\neg$表达，括号可通过德摩根定律和$\wedge$在$\vee$上的分配律消去。但一个命题公式的析取范式不是唯一的，我们把其中运算符最少的称为**最简析取范式**。

如果给定的公式的析取范式中每个基本积都是永假式，则该式也必定是永假式。

例 1

(*a*) 求$P \wedge (P \longrightarrow Q)$的析取范式

解 $P \wedge (P \longrightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q)$

$$\Leftrightarrow P \wedge \neg P \vee P \wedge Q \qquad (1)$$

$P \wedge (P \longrightarrow Q)$不是永假式，因为其析取范式中，后一个基本积非永假。

如果需要求出最简的析取范式。那末(1)式还可化简成

$$P \wedge (P \longrightarrow Q) \Leftrightarrow F \vee P \wedge Q$$
$$\Leftrightarrow P \wedge Q$$

$P \wedge Q$是$P \wedge (P \longrightarrow Q)$的最简析取范式。求最简析取范式的方法有卡诺图法和奎因－麦克劳斯基方法等，详见《数字逻辑》课，这里不多叙述。

(*b*) 求$\neg(P \vee Q) \longleftrightarrow (P \wedge Q)$的最简析取范式。

解 $\neg(P \vee Q) \longleftrightarrow (P \wedge Q)$

$$\Leftrightarrow (\neg(P \vee Q) \wedge (P \wedge Q)) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q))$$
$$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge P \wedge Q) \vee ((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q))$$
$$\Leftrightarrow Q \wedge \neg P \vee P \wedge \neg Q$$

定义1.3-3 一个由基本和之积组成的公式，如果与给定的命题公式A等价，则称它是A的**合取范式**，记为$A \Leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$，　　$n \geqslant 1$

这里$A_1, A_2, \cdots A_n$是基本和。

任何一个命题公式都可求得它的合取范式，这是因为命题公式中出现的$\longrightarrow$和$\longleftrightarrow$可用$\wedge$、$\vee$和$\neg$表达，否定号可通过德摩根定律深入到变元上，再利用$\vee$在$\wedge$上的分配律可化成合取范式。一个公式的合取范式也不是唯一的，其中运算符最少的称为**最简合取范式**，也可利用卡诺图等方法求得最简合取范式。

如果给定的公式的合取范式中每个基本和都是永真式，则该式也必定是永真式。

例 2

(*a*) 证明$Q \vee P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge \neg Q$是永真式。

解 $Q \vee P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge \neg Q$

$$\Leftrightarrow Q \vee (P \vee \neg P) \wedge \neg Q$$
$$\Leftrightarrow (Q \vee P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)$$

在$Q \vee P \wedge \neg Q \vee \neg P \wedge \neg Q$的合取范式中，每一个基本和都是永真式，所以它是永真