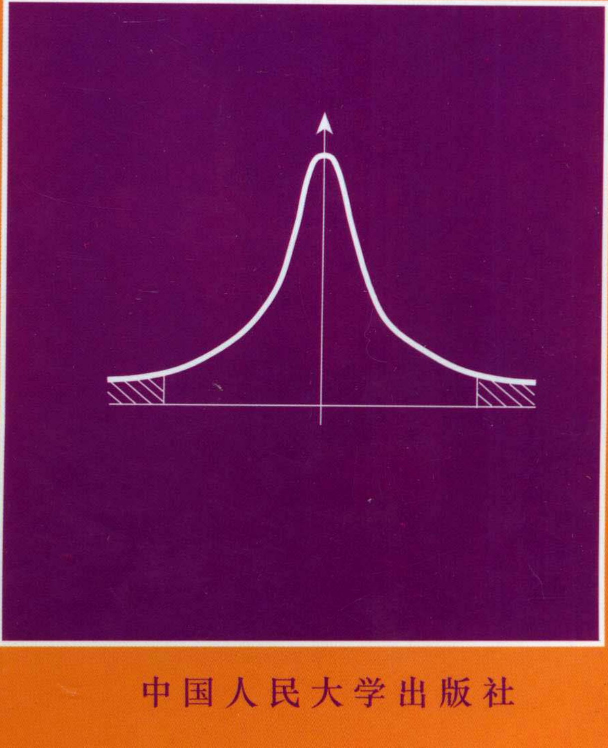
高等学校文科教材

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计

袁荫棠 编　　　　（修订本）



中国人民大学出版社

高等学校文科教材

经济应用数学基础（三）

概率论与数理统计

（修订本）

袁荫棠 编

中国人民大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/袁荫棠编．2版（修订本）
北京：中国人民大学出版社，1985.12（1998.1重印）

ISBN 7-300-00676-0/O·23
Ⅰ．概…
Ⅱ．袁…
Ⅲ．①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材
Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字（98）第01302号

高等学校文科教材
经济应用数学基础（三）
概率论与数理统计
（修订本）
袁荫棠　编

出版发行：中国人民大学出版社
（北京海淀路157号　邮码100080）
经　　销：新华书店
印　　刷：涿州市星河印刷厂

开本：850×1168毫米　1/32　印张：8.875
1985年12月第1版　1990年7月第2版
2004年2月第33次印刷
字数：217 000

定价：13.00元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

再 版 说 明

《概率论与数理统计》是原教育部委托中国人民大学经济信息管理系赵树嫄教授主编的高等学校文科教材《经济应用数学基础》的第三册。它介绍了初等概率论的基本知识及数理统计的一些方法，同时还对马尔可夫链作了简单介绍。

这次修订，对初版编写与排印中的疏漏进行了修正，并对个别章节进行了重写，调整了各章部分习题，还在书后增补了选择题。目录中带有“*”号的章节，不同专业可视教学需要与学时安排略去不讲。

本书第一版由赵树嫄主编，袁荫棠编写，陈家鼎、杨海明、严颖等参加了审阅和校对。第二版仍由袁荫棠编写，赵树嫄主编。参加审阅的还有杨海明和严颖等。

由于我们水平有限，书中难免有不妥之处，欢迎读者批评指正。

编 者

1989 年 12 月

目　录

第一章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件

概率论与数理统计是一门研究随机现象量的规律性的数学学科，是近代数学的重要组成部分，同时也是近代经济理论的应用与研究的重要数学工具。

为了研究随机现象，就要对客观事物进行观察。观察的过程称为试验。概率论里所研究的试验具有下列特点：

(1) 在相同的条件下试验可以重复进行；

(2) 每次试验的结果具有多种可能性，而且在试验之前可以明确试验的所有可能结果；

(3) 在每次试验之前不能准确地预言该次试验将出现哪一种结果。

(一)随机事件的概念

在概率论中，将试验的结果称为事件。

每次试验中，可能发生也可能不发生，而在大量试验中具有某种规律性的事件称为随机事件(或偶然事件)，简称为事件。通常用大写拉丁字母 A、B、C 等表示。在随机事件中，有些可以看成是由某些事件复合而成的，而有些事件则不能分解为其它事件的组合。这种不能分解成其它事件组合的最简单的随机事件称为基本事件。例如，掷一颗骰子的试验中，其出现的点数，“1 点”、“2 点”、…、

“6 点”都是基本事件。“奇数点”也是随机事件，但它不是基本事件。它是由“1 点”、“3 点”、“5 点”这三个基本事件组成的；只要这三个基本事件中的一个发生，“奇数点”这个事件就发生。

每次试验中一定发生的事件称为必然事件，用符号 Ω 表示。每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，用符号 Φ 表示。例如，在上面提到的掷骰子试验中，“点数小于 7”是必然事件。“点数不小于 7”是不可能事件。

应该指出：必然事件与不可能事件有着紧密的联系。如果每次试验中，某一个结果必然发生(如“点数小于 7”)，那么这个结果的反面(即“点数不小于 7”)就一定不发生；不论必然事件、不可能事件，还是随机事件，都是相对于一定的试验条件而言的，如果试验的条件变了，事件的性质也会发生变化。比如，掷两颗骰子时，“点数总和小于 7”是随机事件，而掷 10 颗骰子时，“点数总和小于 7”就是不可能事件。概率论所研究的都是随机事件，为讨论问题方便，将必然事件 Ω 及不可能事件 Φ 作为随机事件的两个极端情况。

(二)事件的集合与图示

研究事件间的关系和运算，应用点集的概念和图示方法比较容易理解，也比较直观。

对于试验的每一个基本事件，用只包含一个元素 ω 的单点集合 $\{\omega\}$ 表示；由若干个基本事件复合而成的事件，用包含若干个相应元素的集合表示；由所有基本事件对应的全部元素组成的集合称为样本空间。由于任何一次试验的结果必然出现全部基本事件之一，这样，样本空间作为一个事件是必然事件，仍以 Ω 表示。每一个基本事件所对应的元素称为样本空间的样本点。因而，可以把随机事件定义为样本点的某个集合。称某事件发生，就是当且仅当属于该集合的某一个样本点在试验中出现。不可能事件就是空集

$\varnothing$。必然事件就是样本空间 Ω。于是事件间的关系和运算就可以用集合论的知识来解释。

为了直观，人们还经常用图形表示事件。一般地，用平面上某一个方(或矩)形区域表示必然事件，该区域内的一个子区域表示事件。

(三)事件间的关系及其运算

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，即属于 A 的每一个样本点也都属于 B，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 含于事件 B。记作

$$B\supset A \quad 或 \quad A\subset B$$

$B\supset A$ 的一个等价说法是：如果 B 不发生，必然导致 A 也不会发生。显然对于任何事件 A，有

$$\Phi\subset A\subset\Omega$$

2. 事件的相等

如果事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，称事件 A 与 B 相等。即 A 与 B 中的样本点完全相同。记作

$$A=B$$

3. 事件的并(和)

两个事件 A、B 中至少有一个发生，即“A 或 B”，是一个事件，称为事件 A 与 B 的并(和)。它是由属于 A 或 B 的所有样本点构成的集合。记作

$$A+B \quad 或 \quad A\cup B$$

n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生，是一个事件，称为事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的和，记作

$$A_1+\cdots+A_n \quad 或 \quad A_1\cup\cdots\cup A_n$$

可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和表示可列个事件 $A_1,A_2,$

$\cdots,A_n,\cdots$的和表示可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一个事件发生,记作

$$\sum_{i=1}^{\infty}A_i \quad 或 \quad \bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$$

4. 事件的交(积)

两个事件 A 与 B 同时发生,即“A 且 B”,是一个事件,称为事件 A 与 B 的交。它是由既属于 A 又属于 B 的所有公共样本点构成的集合。记作

$$AB \quad 或 \quad A\cap B$$

5. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生,是一个事件,称为事件 A 与 B 的差。它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合。记作

$$A-B$$

6. 互不相容事件

如果事件 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\Phi$,称事件 A 与 B 互不相容(或称互斥)。互不相容事件 A 与 B 没有公共的样本点。显然,基本事件间是互不相容的。

7. 对立事件

事件“非 A”称为 A 的对立事件(或逆事件)。它是由样本空间中所有不属于 A 的样本点组成的集合。记作

$$\overline{A}$$

显然,$A\overline{A}=\Phi,A+\overline{A}=\Omega,\overline{A}=\Omega-A,\overline{\overline{A}}=A$。

8. 完备事件组

若事件 $A_1,\cdots,A_n$ 为两两互不相容的事件,并且 $A_1+\cdots+A_n=\Omega$,称 $A_1,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组。

各事件的关系及运算如图 1-1 中图形所示。

例 1　掷一颗骰子的试验,观察出现的点数:事件 A 表示“奇数点”;B 表示“点数小于 5”;C 表示“小于 5 的偶数点”。用集合的

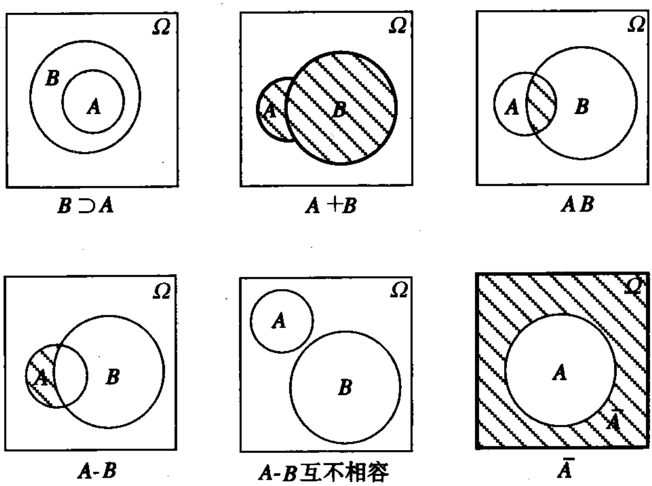


图 1-1

列举表示法表示下列事件：$\Omega, A, B, C, A+B, A-B, B-A, AB, AC, \overline{A}+B$。

解 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ $\qquad A=\{1,3,5\}$

$B=\{1,2,3,4\}$ $\qquad C=\{2,4\}$

$A+B=\{1,2,3,4,5\}$ $\qquad A-B=\{5\}$

$B-A=\{2,4\}$ $\qquad AB=\{1,3\}$

$AC=\Phi$ $\qquad C-A=\{2,4\}$

$\overline{A}+B=\{1,2,3,4,6\}$

例 2 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i=1,2,3$)。试用事件的运算符号表示下列事件：三次都取到了合格品；三次中至少有一次取到合格品；三次中恰有两次取到合格品；三次中最多有一次取到合格品。

解 三次全取到合格品：$A_1A_2A_3$；

三次中至少有一次取到合格品：$A_1+A_2+A_3$；

三次中恰有两次取到合格品：$A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$；

三次中至多有一次取到合格品：$\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$。

例 3　一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标（$i=1,2,3$）。试用文字叙述下列事件：A_1+A_2；$\overline{A}_2$；$A_1+A_2+A_3$；$A_1A_2A_3$；A_3-A_2；$A_3\overline{A}_2$；$\overline{A_1+A_2}$；$\overline{A}_1\overline{A}_2$；$\overline{A}_2+\overline{A}_3$；$\overline{A_2A_3}$；$A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$。

解　A_1+A_2：前两次中至少有一次击中目标；

$\overline{A}_2$：第二次射击未击中目标；

$A_1+A_2+A_3$：三次射击中至少有一次击中目标；

$A_1A_2A_3$：三次射击都击中了目标；

$A_3\overline{A}_2=A_3-A_2$：第三次击中但第二次未击中目标；

$\overline{A_1+A_2}=\overline{A}_1\overline{A}_2$：前两次均未击中目标；

$\overline{A}_2+\overline{A}_3=\overline{A_2A_3}$：后两次中至少有一次未击中目标；

$A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$：三次射击中至少有两次击中目标。

例 4　如果 x 表示一个沿数轴做随机运动的质点的位置，试说明下列各事件的关系。

$A=\{x\mid x\leqslant 20\}$　　$B=\{x\mid x>3\}$

$C=\{x\mid x<9\}$　　$D=\{x\mid x<-5\}$

$E=\{x\mid x\geqslant 9\}$

解　各事件的情况如图 1-2 所示。

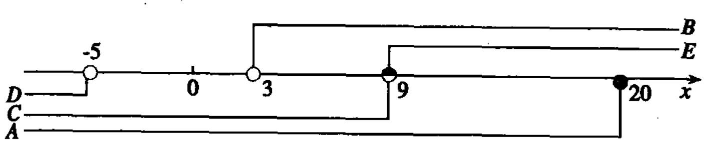


图　1-2

由图可见，$A \supset C \supset D, B \supset E$；

D 与 B，D 与 E 互不相容；

C 与 E 为对立事件；

B 与 C，B 与 A，E 与 A 相容，显然 A 与 C，A 与 D，C 与 D，B 与 E 也是相容的。

§1.2　概率

概率论研究的是随机现象量的规律性。因此仅仅知道试验中可能出现哪些事件是不够的，还必须对事件发生的可能性大小的问题进行量的描述。

（一）概率的统计定义

前面提到随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，但在大量重复试验中，它的发生却具有统计规律性。所以应从大量试验出发来研究它。为此，先看下面的试验：

掷硬币 10 次，“正面”出现 6 次，它与试验总次数之比为 0.6；掷骰子 100 次，“1 点”出现 20 次，与试验总次数之比为 0.2。

可见，仅从事件出现的次数，不能确切地描述它出现的可能性的大小，还应考虑它出现的次数在试验总次数中所占的百分比。

在 n 次重复试验中，若事件 A 发生了 m 次，则 m/n 称为事件 A 发生的频率。同样若事件 B 发生了 k 次，则事件 B 发生的频率为 k/n。如果 A 是必然事件，有 $m=n$，即必然事件的频率是 1。显然，不可能事件的频率一定为 0，而一般事件的频率必在 0 与 1 之间。如果事件 A 与 B 互不相容，那么事件 $A+B$ 的频率为 $(m+k)/n$。它恰好等于两个事件频率的和 $m/n+k/n$。这称之为频率的可加性。前人掷硬币试验的一些结果列于表 1-1。

表 1-1

试验者	抛掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 m/n
德·摩尔根	2 048	1 061	0.518
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8

由表 1-1 看出，出现正面的频率接近 0.5，并且抛掷次数越多，频率越接近 0.5。经验告诉人们，多次重复同一试验时，随机现象呈现出一定的量的规律。具体地说，就是当试验次数 n 很大时，事件 A 的频率具有一种稳定性。它的数值徘徊在某个确定的常数附近。而且一般说来，试验次数越多，事件 A 的频率就越接近那个确定的常数。这种在多次重复试验中，事件频率稳定性的统计规律，便是概率这一概念的经验基础。而所谓某事件发生的可能性大小，就是这个"频率的稳定值"。

定义 1.1　在不变的条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动。且一般说来，n 越大，摆动幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A)$。

数值 p(即 $P(A)$)就是在一次试验中对事件 A 发生的可能性大小的数量描述。例如，用 0.5 来描述掷一枚匀称的硬币"正面"出现的可能性。

如上所述，概率的稳定性是概率的经验基础，但并不是说概率决定于试验。一个事件发生的概率完全决定于事件本身的结构，是先于试验而客观存在的。

概率的统计定义仅仅指出了事件的概率是客观存在的，但并不能用这个定义计算 $P(A)$。实际上，人们是采取一次大量试验的频率或一系列频率的平均值作为 $P(A)$的近似值的。例如，从对一个妇产医院 6 年出生婴儿的调查中(见表 1-2)，可以看到生男孩

的频率是稳定的，可以取 0.515 作为生男孩概率的近似值。

表 1-2

出生年份	新生儿总数 n	新生儿分类数		频率(%)	
		男孩数 m_1	女孩数 m_2	男孩	女孩
1977	3 670	1 883	1 787	51.31	48.69
1978	4 250	2 177	2 073	51.22	48.78
1979	4 055	2 138	1 917	52.73	47.27
1980	5 844	2 955	2 889	50.56	49.44
1981	6 344	3 271	3 073	51.56	48.44
1982	7 231	3 722	3 509	51.47	48.53
6 年总计	31 394	16 146	15 248	51.48	48.52

(二)概率的古典定义

直接计算某一事件的概率有时是非常困难的，甚至是不可能的。仅在某些情况，才可以直接计算事件的概率。请看下面类型的试验：

(1) 抛掷一枚匀称的硬币，可能出现正面与反面两种结果，并且这两种结果出现的可能性是相同的。

(2) 200 个同型号产品中有 6 个废品，从中每次抽取 3 个进行检验，共有 C_{200}^{3} 种不同的可能抽取结果，并且任意 3 个产品被取到的机会相同。

这类试验的共同特点是：每次试验只有有限种可能的试验结果，即组成试验的基本事件总数为有限个；每次试验中，各基本事件出现的可能性完全相同。具有上述特点的试验称为古典概型试验。在古典概型试验中，假定能够知道有利于某一事件 A 的基本事件数，就可以通过这个数与试验的基本事件总数之比计算出概率 $P(A)$。

定义 1.2　若试验结果一共由 n 个基本事件 $E_1,\cdots,E_n$ 组成，并且这些事件的出现具有相同的可能性，而事件 A 由其中某

m 个基本事件 $E_{i_1},\cdots,E_{i_m}$组成，则事件 A 的概率可以用下式计算：

$$P(A)=\frac{\text{有利于 }A\text{ 的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$

这里 $E_1,\cdots,E_n$ 构成一个等概完备事件组。

（三）计算概率的例题

例 1　袋内装有 5 个白球，3 个黑球。从中任取两个球，计算取出的两个球都是白球的概率。

解　组成试验的基本事件总数 $n=C_{5+3}^2$，组成所求事件 A（取到两个白球）的基本事件数 $m=C_5^2$，由公式(1.1)有：

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}\approx 0.357$$

例 2　一批产品共 200 个，有 6 个废品，求：(1)这批产品的废品率；(2)任取 3 个恰有 1 个是废品的概率；(3)任取 3 个全非废品的概率。

解　设 $P(A)$、$P(A_1)$、$P(A_0)$分别表示(1)、(2)、(3)中所求的概率，根据公式(1.1)，有：

(1)　$P(A)=\frac{6}{200}=0.03$

(2)　$P(A_1)=\frac{C_6^1C_{194}^2}{C_{200}^3}\approx 0.0855$

(3)　$P(A_0)=\frac{C_{194}^3}{C_{200}^3}\approx 0.9122$

例 3　两封信随机地向标号为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ的 4 个邮筒投寄，求第二个邮筒恰好被投入 1 封信的概率。

解　设事件 A 表示第二个邮筒只投入 1 封信。两封信随机地投入 4 个邮筒，共有 4^2 种等可能投法，而组成事件 A 的不同投法