博雅

北京大学力学学科规划教材

数学物理方法

Methods of Mathematical Physics

邹光远　符策基　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

数学物理方法

Methods of Mathematical Physics

邹光远　符策基　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法 / 邹光远，符策基编著. —北京：北京大学出版社，2018. 10
（北京大学力学学科规划教材）
ISBN 978-7-301-29900-5

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①邹…　②符…　Ⅲ. ①数学物理方法－高等学校－教材
Ⅳ. ①O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 210352 号

书　　名　数学物理方法
　　　　　SHUXUE WULI FANGFA
著作责任者　邹光远　符策基　编著
责任编辑　尹照原
标准书号　ISBN 978-7-301-29900-5
出版发行　北京大学出版社
地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址　http://www.pup.cn　新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱　zpup@pup.cn
电　　话　邮购部 010-62752015　发行部 010-62750672　编辑部 010-62752021
印 刷 者　涿州市星河印刷有限公司
经 销 者　新华书店
　　　　　730 毫米 × 980 毫米　16 开本　22.5 印张　429 千字
　　　　　2018 年 10 月第 1 版　2018 年 10 月第 1 次印刷
定　　价　72.00 元

前　　言

随着时代的发展和教学计划的变化,“数学物理方法”课程的教学内容也需要适当地改变。以北京大学工学院的力学与工程科学系为例,同上世纪九十年代初相比,本门课程的学时几乎缩减了一半。因此,急需一本与此变化相适应的教材。本教材是作者以在北京大学力学与工程科学系多年从事“数学物理方法”教学所编讲义为基础改编而成,适合当前教学的需要。

本教材内容包括:复变函数、函数空间与相应函数空间上的广义函数、正交函数族展开、特殊函数、积分变换、变分法、偏微分方程的基础理论与解法等。

近年来,由于高速电子计算机计算速度的飞速提高,在解决实际问题中,数值计算与实验和理论分析相结合,起着越来越重要的作用。由于大量的实际问题都具有较复杂的边界形状和非线性效应,极少能通过求解析解的方法来解决。那么,学习本课程是否就意义不大呢?事实并非如此。

事实上,一切数值方法,都必须以一个适定的数学提法为前提。建立在不适定的数学提法上的一切计算方法都是无效的,只能得到错误的结果,或根本得不到任何结果。因此,给出问题的正确数学提法,是做任何数值计算前必须解决的。另外,许多数值计算方法与课程中偏微分方程的解法有不可分的关系:如贴体坐标法以保角变换为基础;谱方法的理论基础是分离变量法;格林函数法是边界元法的出发点;正是由于有了变分法,才出现了有限元法。当然,没有傅里叶变换,就不可能有快速傅里叶变换法。而解双曲型方程的一切数值方法,则完全避不开特征线(面)及由此确定的影响区、依赖区等基本概念。

正确认识数值解法与本课程间的关系是十分必要的。在本书的相关章节中,都对此做了必要的说明。

我们所见到的已有教材,在讲傅里叶变换时,提到的基本定理是限制极严的落后的内容,没有多少实用价值。这对傅里叶变换的应用是不利的。为了改变这种状况,在本教材中,采用了近代数学的结果,在速降函数空间中讲傅里叶变换,指出速降函数空间上的一切广义函数都可做傅里叶变换和相应的逆变换。这就使傅里叶变换法有了一个有效的理论基础,避免了旧基本定理在使用中带来的困惑。

根据多年的教学经验，为了使学生更有效地接受所讲内容，我们在章节顺序编排上作了一些新的尝试。例如，没有在讲完复变函数的其他内容后，立即接着讲保角变换，而是将此内容后移，放在偏微分方程的一些基础性理论后再讲。因为保角变换法是解二维拉普拉斯方程的有效方法，如果在讲偏微分方程的基础理论前讲这一应用，学生由于缺乏有关偏微分方程的基础知识，在听课时，常常会有些茫然。

以上几点，也许可以说是本教材的主要创新之处。

杜珣教授与唐世敏教授所编的《数学物理方法》，对北京大学力学与工程科学系的相关教学工作起了很重要的作用，也是本系该课程长期以来的主要教学参考书。自然，这本教材也是我们编写教材的主要参考书，它使我们受益匪浅。谨在此对他们表示衷心的感谢！北京大学出版社使本教材得以出版，在此，我们也要对北京大学出版社和相关的编辑人员表示感谢！

限于水平，书中难免有错误与不当之处，敬请读者批评指正。

邹光远　符策基

2018 年 7 月于北京大学

目　　录

第一章　复变量函数

§1.1　复数和复数的四则运算

1. 复数及其几何描述

在实数域的范围内解二阶以上的代数方程时，常常得不到它的全部的根，甚至完全没有根. 例如对二阶代数方程 $x^2+1=0$，它的解为 $\pm\sqrt{-1}$，这在实数域的范围内是没有解的. 引入复数的概念后，则在复数域的范围内，任一 n 阶的代数方程都有 n 个根(任一 k 重根当作 k 个根).

记 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$，称 i 为单位虚数. $x^2+1=0$ 的两个根就是 $\pm\mathrm{i}$.

设 x 和 y 为两个实数，称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为复数. 记 $x=\mathrm{Re}z$，称为 z 的实部；$y=\mathrm{Im}z$，称为 z 的虚部. 若 $y=0$，就是实数；若 $x=0$，则称为纯虚数. 称复数 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 为 z 的共轭复数. 显然，z 和 $\bar{z}$ 是互为共轭的，即有

$$\overline{(\bar{z})}=z. \tag{1.1.1}$$

对于实数，可以用一条直线上的点来给出它的几何表示. 而对复数，由于应分别给出它的实部和虚部，故需用一个平面上的点来给出它的几何表示. 这样的平面称为复平面.

在复平面上建立一个直角坐标系：以水平轴表示实轴 x，垂直轴表示虚轴 y，则可如图 1.1.1 所示，给出复数的几何表示. 这样一来，就将复数与复平面上的点之间建立了一一对应的关系. 以后我们用 **C** 表示全体复数的集合.

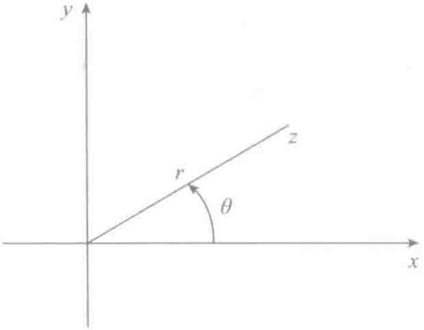

图 1.1.1　复数的几何表示

令

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.1.2}$$

称 r 为复数 z 的模或绝对值，而 θ 为 z 的辐角，$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$，分别记作

$$r = |z| = \operatorname{mod} z, \quad \theta = \arg z. \tag{1.1.3}$$

这时，我们也可通过复平面上的极坐标系来表示复数，有

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta). \tag{1.1.4}$$

这表明，对任意整数 k，θ 增加 $2k\pi$ 时 z 之值不变. 通常称 $-\pi < \theta \leqslant \pi$ 的辐角值为 $\arg z$ 的主值.

复数的几何表示法与平面向量的几何表示法类似. 向量不能比较大小. 对两个复数 z_1 和 z_2，除了二者均为实数外，是不能说 $z_1 < z_2$ 或 $z_1 > z_2$ 的. 复数本身无大小之分，它们的模才有大小之分. 若 $z_1 = z_2$，则它们的实部和虚部均应分别相等.

2. 复数的四则运算

虽然复数在几何表示上与一个平面向量类似，但复数并不是向量，而是一个数，可作数的四则运算.

给定两个复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，并设 $z = x + \mathrm{i}y$. 下面说明对 z_1 和 z_2 作四则运算的规则.

(1) 复数的加(减)：

$$z = z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2), \tag{1.1.5}$$

即实部与实部相加(减)，虚部与虚部相加(减)，有 $x = x_1 \pm x_2$，$y = y_1 \pm y_2$. 这与向量的加、减法类似.

(2) 复数的积：

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 + (\mathrm{i}y_1)(\mathrm{i}y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1), \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

即 $x = x_1x_2 - y_1y_2$，$y = x_1y_2 + x_2y_1$. 这既不同于向量的矢量积，也不同于向量的标量积.

由此可知，对 $|z| = r$，有 $r^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}$.

(3) 复数的商：

向量是不能相除的，而复数是可以相除的，即

$$z = \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} = \frac{1}{x_1^2 + y_1^2}[(x_1x_2 + y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 - x_2y_1)], \tag{1.1.7}$$

其中

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y = \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

当然，这里要求 $z_1 \neq 0$，即 x_1 和 y_1 不能同时为 0.

3. 欧拉(Euler) 公式和复数的指数形式

设 $f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$，把它作为一个实变量 θ 的复值函数看待，将其对 θ 求导得

$$f'(\theta) = -\sin\theta + \mathrm{i}\cos\theta = \mathrm{i}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = \mathrm{i}f(\theta).$$

由此有 $f(\theta) = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. 由 $f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$，即有

$$f(\theta) = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.1.8}$$

把(1.1.8) 式中的 θ 换成 $-\theta$，即得

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta.$$

由此有

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}), \\ \sin\theta = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}). \end{cases} \tag{1.1.9}$$

(1.1.8) 式也可利用泰勒(Taylor) 展开的方法得到

$$\mathrm{e}^t = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}t^m,$$

$$\cos\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\theta^{2m} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!}(\mathrm{i}\theta)^{2m},$$

$$\mathrm{i}\sin\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}(-1)^m}{(2m+1)!}\theta^{2m+1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)!}(\mathrm{i}\theta)^{2m+1}.$$

当取 $t = \mathrm{i}\theta$ 时，有

$$\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(\mathrm{i}\theta)^m = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

利用(1.1.8) 式，可以给出复数的指数表示形式

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}. \tag{1.1.10}$$

对 r 为有限值的点，称为复平面上的有限点.

利用复数的指数形式，作复数的乘、除运算就很方便，有

$$\begin{cases} z_1 z_2 = r_1 r_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_1+\theta_2)}, \\ \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{r_2}{r_1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta_2-\theta_1)}. \end{cases} \tag{1.1.11}$$

§ 1.2　复变量函数

1. 一些相关概念与定理

对复变量 $z = x + \mathrm{i}y$，它的复函数 w 之值也是一个复数，有

$$w = w(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y),$$

其中 u 和 v 为两个实值的二元函数. 把复平面同 $x-y$ 实平面相对应,同二元实变函数对照,复变函数可看成是一对二元函数的组合. 因此,许多与二元函数有关的概念,以及相关定理和证明,几乎都可照搬过来. 例如:点集、邻域、聚点、孤立点、边界点、内点、开集、闭集、区域(开域)、闭区域(闭域)、单连通区域、复(多)连通区域、序列、极限、连续、一致连续及相关定理都可照搬过来,这里不再专门论述和证明. 在后面用到时,我们将把相关定理直接引用过来.

同二元函数完全类似,复变函数 $w(z)$ 是由复 z 平面上的区域 G 到复 w 平面上的区域 D 的一个映射. G 为 $w(z)$ 的定义域,D 为 $w(z)$ 的值域.

最简单的函数之一是倒数函数,即

$$w(z) = \frac{1}{z}.$$

利用复数的指数形式 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,有

$$w = R\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}, \quad R = \frac{1}{r}.$$

不难看出,倒数函数是将 z 平面上除 0 点外的所有有限点一对一地映射到 w 平面上除 0 点外的所有有限点的一个单值映射:在 z 平面上,$r < 1$ 的单位圆域内除 0 点外的全部点,被一对一地映射到 w 平面上 $R > 1$ 的单位圆外区域内的全部有限点;z 平面上 $r = 1$ 的单位圆周上的全部点,被一对一地映射到 w 平面上 $R = 1$ 的整个单位圆周上;而 z 平面上 $r > 1$ 的全部有限点,则被一对一地映射到 w 平面上 $R < 1$ 的除 0 点外的单位圆域内的所有点.

这里 $z = 0$ 是一个特殊的点,它的模 $r = 0$. 在复平面中引入无穷远点的概念,即认为是 $r = \infty$ 的点,记作 $z = \infty$,这是复平面上唯一的非有限点. 对倒数函数而言,可以认为 0 点和无穷远点构成了对应. 这时,倒数函数就将 z 平面上的全部点与 w 平面上的全部点构成了一一对应. 在这样的意义下,可以认为,倒数函数的定义域和值域都是整个复平面.

对 0 点而言,辐角已没有明显的含意. 同样地,无穷远点作为复平面上的一个点,对它而言,辐角也同样没有明显的含意. 是复平面上两个具有某种特殊性质的点.

在引入了无穷远点的概念后,有时也将聚点、邻域和极限的概念加以推广:对 $M > 0$,把 $r = |z| > M$ 称为点 ∞ 的 M 邻域;对无界的无穷序列 $\{z_n\}$,点 ∞ 被看作是此序列的一个聚点;若对任意 $M > 0$,存在 N,当 $n > N$ 时,均有 $|z_n| > M$,则称此序列是以 ∞ 为极限,记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

这样一来,只要 $\{z_n\}$ 是无穷序列,则不管它是否有界,都至少有一个聚点.

2. 一些常见的初等函数

所有在数学分析中的一元常见函数，只需将对应的实变量换成复变量，就可得到相应的复变量函数. 故这里不去一一列举，仅列举几种常见的初等函数，并作相应的说明. 从这里可以看出，复变量函数虽是实变量函数从实数域到复数域的延拓，但并不是实变量函数的简单复制，它们常常会显现出与对应的实变量函数所不同的特性，例如：是否有界，是否存在 0 点，是否具备周期性等等. 因此，在学习和运用复变函数时，千万不要不加区分地把它们对应的实变函数的某些性质照搬过来，以免造成错误.

(1) 指数函数：

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{1.2.1}$$

这是对 y 以 2π 为周期的函数，即对任意整数 k，有

$$\begin{aligned} e^{z+2k\pi i} &= e^{x+i(y+2k\pi)} = e^x[\cos(y+2k\pi) + i\sin(y+2k\pi)] \\ &= e^x(\cos y + i\sin y) = e^z. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

这种周期性是实指数函数所不具备的，实指数函数是单调的.

在振动与波的研究中，常常会用到复指数函数 $e^{\lambda t}$，这里 t 代表时间，$\lambda = a + ib$ 为复本征值，有 $e^{\lambda t} = e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$. 可以看出，$\lambda$ 的虚部 b 代表振型或波型(振动或波的圆频率)，而其实部 a 则表示了振动或波的振幅随时间的变化速度，当 $a > 0$ 时发散，当 $a < 0$ 时衰减.

对于具有正实部的本征值对应的振(波)型，由于其振幅会随时间无限放大，对于建筑结构或是运动的物体常常会具有极大的危险性. a 越大，危险性也越大. 对建筑结构而言，这样的振动如果发生，就可能使之受到损毁. 因此，在设计时，要充分研究周围的环境因素，避免这类振动的发生. 而对在轨道上运行的人造卫星，由于其燃料箱中燃料晃动的影响，会引起卫星的晃动. 如果出现发散振型，就必须根据这类振型中发散最快的速度，确定每运行多长时间间隔后，对卫星的运行状态进行调控，使卫星保持在一个正常的可控制的运行状态下.

这里列举几个复函数实际应用的例子，是为了说明引入复数和研究复变函数并不是一种单纯的数学表述，而是有它明确的物理和实际应用背景的，用以帮助我们理解为什么要学习复变函数.

对于两个指数函数的乘积，与实函数一样，有

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[(\cos y_1\cos y_2 - \sin y_1\sin y_2) + i(\sin y_1\cos y_2 + \cos y_1\sin y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

周期函数按定义是多叶函数，即将多个不相重叠的定义域映射到同一个值域的函数. 故多叶函数的反函数为多值函数.

(2) 对数函数：

对数函数是指数函数的反函数，即若 $z = e^w$，则有

$$w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{1.2.4}$$

在复变函数中，如果将 ∞ 点也看作是对数函数的定义域和值域中的一个点，则对数函数的定义域是整个复平面. 即使是在实轴上，也可不限制在正半轴上. 在负半轴上，复对数函数也是有意义的. 例如：

$$\ln(-1) = \ln e^{(2k+1)\pi i} = (2k+1)\pi i.$$

在实变函数中，$\ln x$ 是 x 的单值函数. 而在复变函数中，作为多叶函数 e^w 的反函数，$w = \ln z$ 是 z 的多值函数. 对应一个 z，可以有无穷多个 w. 对于任一个整数 k，w 仅在每一个带形区域 $k\pi + \alpha \leqslant \mathrm{Im}w < (k+2)\pi + \alpha$ 内是单值的，这里的 α 为任一给定的实数. 对 $\mathrm{Im}w$ 在 $\alpha = 0$ 和 $k = 0$ 的区域内时之 w 值称为 $w = \ln z$ 的主值.

(3) 三角函数与双曲函数：

在实数域的范围内，三角函数与双曲函数可以说是两类毫无关系的函数. 而在复数域上，二者间有着十分密切的联系，相互间可用对方对应的函数简单地表出. 从复变函数的角度来看，二者基本上没什么差别. 这时，$\sin z$ 和 $\cos z$ 是无界的；而 $\mathrm{sh}z$ 和 $\mathrm{ch}z$ 等双曲函数均具有周期性，且均有无穷多个零点.

在复数域上，不仅双曲函数，而且三角函数都是通过适当的指数函数的组合来定义的. 由(1.1.9)式，将实变量 θ 换成复变量 z，就可给出相应的复变量的三角函数；而双曲函数则只需将实变函数中的定义搬过来，自变量则由实变量换成复变量即可. 由此，有

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = -i\,\mathrm{sh}(iz), \tag{1.2.5}$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \mathrm{ch}(iz). \tag{1.2.6}$$

反之，有

$$\mathrm{sh}z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}) = \frac{i}{2i}(e^{-i(iz)} - e^{i(iz)}) = -i\sin(iz), \tag{1.2.7}$$

$$\mathrm{ch}z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) = \frac{1}{2}(e^{-i(iz)} + e^{i(iz)}) = \cos(iz). \tag{1.2.8}$$

利用上面的结果，知其余的三角函数与相应双曲函数间有如下的关系：

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{-i\,\mathrm{sh}(iz)}{\mathrm{ch}(iz)} = -i\,\mathrm{th}(iz), \tag{1.2.9}$$

$$\mathrm{th}z = \frac{\mathrm{sh}z}{\mathrm{ch}z} = \frac{-i\sin(iz)}{\cos(iz)} = -i\tan(iz), \tag{1.2.10}$$

$$\cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{1}{-i\,\mathrm{th}(iz)} = i\,\mathrm{coth}(iz), \tag{1.2.11}$$

$$\coth z=\frac{1}{\operatorname{th} z}=\frac{1}{-\mathrm{i}\tan(\mathrm{i}z)}=\mathrm{i}\cot(\mathrm{i}z),\tag{1.2.12}$$

$$\sec z=\frac{1}{\cos z}=\frac{1}{\operatorname{ch}(\mathrm{i}z)}=\operatorname{sech}(\mathrm{i}z),\tag{1.2.13}$$

$$\operatorname{sech} z=\frac{1}{\operatorname{ch} z}=\frac{1}{\cos(\mathrm{i}z)}=\sec(\mathrm{i}z),\tag{1.2.14}$$

$$\csc z=\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{-\mathrm{i}\operatorname{sh}(\mathrm{i}z)}=\mathrm{i}\operatorname{csch}(\mathrm{i}z),\tag{1.2.15}$$

$$\operatorname{csch} z=\frac{1}{\operatorname{sh} z}=\frac{1}{-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z)}=\mathrm{i}\csc(\mathrm{i}z).\tag{1.2.16}$$

直接通过上述定义，不难验证原来关于三角函数和双曲函数间的各种运算公式仍然成立. 例如，有

$$\cos^2 z+\sin^2 z=1,\quad \operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1,\tag{1.2.17}$$

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2,\tag{1.2.18}$$

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2,\tag{1.2.19}$$

$$\operatorname{ch}(z_1\pm z_2)=\operatorname{ch} z_1\operatorname{ch} z_2\pm\operatorname{sh} z_1\operatorname{sh} z_2,\tag{1.2.20}$$

$$\operatorname{sh}(z_1\pm z_2)=\operatorname{sh} z_1\operatorname{ch} z_2\pm\operatorname{ch} z_1\operatorname{sh} z_2,\tag{1.2.21}$$

等等. 这里就不一一列举了.

利用指数函数是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为周期的(1.2.2)式，很容易验证：$\sin z$ 和 $\cos z$ 等仍有实周期 2π，$\operatorname{ch} z$ 和 $\operatorname{sh} z$ 等则有纯虚周期 $2\pi\mathrm{i}$.

(4) 反三角函数与反双曲函数：

由于复变数的三角函数和双曲函数一样，也是通过指数函数来定义的，故反三角函数也和反双曲函数一样，可用某种对数函数的形式表示. 作为例子，下面仅给出其中的部分反函数. 余下的，可由读者自己导出.

在下面的反函数的表达式中，会含有根式函数 $\sqrt{1-z^2}$ 或 $\sqrt{z^2-1}$. 在复数域中，$\sqrt{1-z^2}$ 和 $\sqrt{z^2-1}$ 都是多值函数，不在前面另加"±"号. 如果不加特别说明，则可取其两个分支中的任意一支. 关于多值函数，将在下一节中作专门讲述.

设 $z=\cos w$，则 $\sin w=\sqrt{1-z^2}$，有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=\cos w+\mathrm{i}\sin w=z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2}=z+\sqrt{z^2-1},$$

得

$$w=\cos^{-1}z\equiv\arccos z=-\mathrm{i}\ln(z+\sqrt{z^2-1}).\tag{1.2.22}$$

若 $z=\sin w$，则 $\cos w=\sqrt{1-z^2}$，$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w}=\sqrt{1-z^2}+\mathrm{i}z$，得

$$w=\sin^{-1}z\equiv\arcsin z=-\mathrm{i}\ln(\sqrt{1-z^2}+\mathrm{i}z).\tag{1.2.23}$$

若 $z=\tan w$，有

$$z=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{i(e^{iw}+e^{-iw})}=\frac{e^{2iw}-1}{i(e^{2iw}+1)}.$$

由此得 $e^{2iw}=\dfrac{i-z}{i+z}$,

$$w=\tan^{-1}z\equiv\arctan z=-\frac{i}{2}\ln\frac{i-z}{i+z}=\frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}. \tag{1.2.24}$$

对于反双曲函数,同样可以从它们的定义出发,作与上面类似的推导,得到相应的表达式.推导过程和所得的表达式,除了将实变量换成复变量外,与实变量时完全相同.故这里就不再推导,而只将相应的表达式直接如下给出:

$$w=\mathrm{ch}^{-1}z=\ln(z+\sqrt{z^2-1}), \tag{1.2.25}$$

$$w=\mathrm{sh}^{-1}z=\ln(z+\sqrt{z^2+1}), \tag{1.2.26}$$

$$w=\mathrm{th}^{-1}z=\frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}. \tag{1.2.27}$$

前面我们已经知道,在复数域中,对数函数是多值函数,有无穷多个值,故不仅反三角函数有无穷多个值,而且反双曲函数也有无穷多个值.这是与实数域中的情况不同的.故不论是反三角函数还是反双曲函数,只有规定了适当的取值范围后(例如规定对数函数取主值),才能保证其单值性.

(5) 多项式:

对于任一非负整数和任意 $n+1$ 个复常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$,其中 $a_n\neq 0$,则称

$$p(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k \tag{1.2.28}$$

为 n 阶多项式.零阶多项式就是常值函数.

(6) 有理函数:

设 $P(z)$ 为 m 阶多项式,$Q(z)$ 为 n 阶多项式,称此二多项式之商

$$w(z)=\frac{P(z)}{Q(z)} \tag{1.2.29}$$

为有理函数.若 $n>m$,则称 $w(z)$ 为有理真分式.显然,若 $m\geqslant n$,则可将 $w(z)$ 改写为

$$w(z)=P_1(z)+R(z), \tag{1.2.30}$$

其中 $P_1(z)$ 为 $m-n$ 阶多项式,$R(z)$ 为有理真分式.若 $n=0$,$w(z)$ 就是 m 阶多项式.

(7) 任意指数的幂函数:

对任意常数 s,称按如下形式定义的函数

$$w(z)=z^s=e^{s\ln z} \tag{1.2.31}$$

为指数是 s 的幂函数.这一定义与实变函数相似.

由定义和对数函数的多值性知应有