“十三五”普通高等教育本科规划教材
高等院校电气信息类专业“互联网+”创新规划教材

信号与系统

（第2版）

主编 | 李云红

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

“十三五”普通高等教育本科规划教材
高等院校电气信息类专业“互联网+ ”创新规划教材

信号与系统

(第2版)

主　编　李云红
副主编　廉继红　陈锦妮

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

内 容 简 介

本书是根据国家教委颁布的高等工业学校《信号与系统课程教学基本要求》，结合普通高等学校的实际情况，在编者多年教学实践的基础上编写而成的。全书共7章，系统地论述了信号与系统的基本理论、基本概念和基本分析方法。本书以通信和控制工程为应用背景，从时域、频域、变换域三大域深入浅出地展开课程内容，先连续后离散，先周期后非周期。主要内容包括：信号与系统的基本概念，系统的时域分析，傅里叶变换与系统的频域分析，连续时间系统的复频域分析，系统函数，线性时不变系统的z 域分析，系统的状态变量分析。 每章设置二维码进行相关内容的深入展开，每章末均设置了习题。

本书可作为高等院校电子信息、通信工程、自动化、计算机、信息工程、信号检测、电气工程及其自动化等专业本科生的教材，也可供其他相关专业的学生和工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/李云红主编．—2版．—北京： 北京大学出版社， 2018.8

(高等院校电气信息类专业“互联网+ ”创新规划教材)

ISBN 978-7-301-29590-8

Ⅰ.①信… Ⅱ.①李… Ⅲ.①信号系统—高等学校—教材 Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 117577 号

书　　名 信号与系统（第2版）
XINHAO YU XITONG

著作责任者 李云红 主编

策划编辑 程志强

责任编辑 李婷婷

数字编辑 刘 蓉

标准书号 ISBN 978-7-301-29590-8

出版发行 北京大学出版社

地　　址 北京市海淀区成府路205号 100871

网　　址 http://www.pup.cn 新浪微博：@北京大学出版社

电子信箱 pup_6@163.com

电　　话 邮购部62752015 发行部62750672 编辑部62750667

印 刷 者 河北滦县鑫华书刊印刷厂

经 销 者 新华书店

787毫米×1092毫米 16开本 17印张 387千字

2012年5月第1版

2018年8月第2版 2018年8月第1次印刷

定　　价 42.00元

第 2 版前言

信号与系统课程是电子信息、通信工程、计算机、自动化、信息工程等专业重要的技术基础课程之一。它主要研究信号与系统分析的基本理论和方法，在教学计划中起着承前启后的作用。

自本书第 1 版 2012 年 5 月出版以来，本学科领域的理论与实践研究迅速发展，分析方法不断更新，技术应用范围日益扩展，对配套教材的内容更新和结构体系的进一步完善都提出了更高的要求。针对这一情况，编者结合教学实践，在广泛听取从事本课程教学和研究的教师与学术专家意见的基础上，逐步明确了第 2 版的追求目标：在相对稳定中力求变革，处理好经典分析方法与最新技术的相互融合，同时充分利用二维码等数字资源。在这样的指导思想下，编者对第 1 版进行了修订、补充和更新。

第 2 版以工程数学和电路分析为基础，以系统对信号的响应为主线，介绍信号与系统分析的相关理论、原理、方法等知识，为学生学习后续课程（如数字信号处理、通信原理、数字通信、自动控制等）打下良好的理论基础。同时信号与系统课程也是学生合理知识结构中的重要组成部分，在对学生智力发展、能力和素质培养方面，均起着非常重要的作用。

与第 1 版相比，第 2 版基本上保持了第 1 版的风貌，认真修订了第 1 版中的错误和疏漏，增加了离散信号与系统的内容。为配合教师教学，帮助学生学习，提高学生学习兴趣，本书首先从课程设置、选用教材、课程特点、学习方法、参考书目等方面对课程做了总体介绍；对信号的分析采用先连续后离散，先周期后非周期，先时域后频域复频域的顺序，以对偶和类比的方式逐章展开，完全并行地讲述连续时间和离散时间信号与系统的一系列基本概念、理论和方法，以及它们在通信、信号处理等领域中的主要应用；最后还讲述了数字信号处理和系统的状态变量描述的基本概念和方法，形成了一个“系统分析和综合”与“信号分析和处理”两方面知识并重、较为完整的、具有鲜明特色的信号与系统课程内容体系。同时，每章针对信号与系统的名词术语、具体问题、分析方法都嵌入了二维码等数字资源，二维码里包括了大量文本、图片、动画等资源。学生可以通过扫描二维码获得更多的知识和学习内容，更好地理解和掌握信号与系统的分析方法。各章都有足够数量的精选例题，兼顾基本练习和解题的分析技巧；章末配有数量丰富的习题，供学生练习使用。

本书由李云红担任主编并负责统稿，廉继红和陈锦妮担任副主编，李云红和陈锦妮进行了最终校稿。具体编写分工：第 1、4、5 章，测试题及习题答案由李云红编写；第 2 章、附录及参考文献由顾梅花编写；第 3 章由廉继红、陈锦妮编写；第 6 章由潘杨编写；第 7 章由廉继红编写。陈锦妮、成中豪、梁思程、李欢、钟晓妮、黄梦龙、袁巧宁等参加了书中图形的部分绘制工作以及二维码信息的收集整理。在本书编写过程中，编者参考了

大量的文献，在此对这些文献的编者表示真诚的感谢。

本书的编写得到了西安工程大学的大力支持，编者在此表示衷心感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请读者批评指正。

为配合教学和学生自学，本书配套出版了《信号与系统习题解析》，以方便学生更好地学习和理解所学知识。

编　者

2017 年 10 月

第 1 版前言

信号与系统课程是电子信息、通信工程、计算机、自动化、信息工程等专业重要的技术基础课之一，它主要研究信号与系统分析的基本理论和方法，在教学计划中起着承前启后的作用。它以工程数学和电路分析为基础，以系统对信号的响应为主线，介绍信号与系统分析相关的理论、原理、方法等方面的知识，为学生学习后续课程（如数字信号处理、通信原理、数字通信、自动控制等）打下良好的理论基础，同时也是学生合理知识结构的重要组成部分，在智力发展、能力和素质培养方面均起着非常重要的作用。

近些年来，信息技术在各学科领域的应用更加广泛，本学科领域的理论和实践发展迅速，但就大学本科信号与系统课程而言，其基本内容和范围大体相对稳定。随着当前信息和通信技术的发展，为了适应当前学科发展的需要和教学内容改革的要求，编者编写了本书。同时，在教学实践中征求和听取了教师和学生对本书的意见，认为基本满足当前的教学需要。本书按照 56 学时授课，这里给出参考学时数：第 1 章 6 学时，第 2 章 14 学时，第 3 章 16 学时，第 4 章 12 学时，第 5 章 4 学时，第 6 章 4 学时。

为配合教师教学、帮助学生学习、提高学习兴趣，本书首先从课程位置、选用教材、课程特点、学习方法、参考书目等方面对课程做了总体介绍。对信号的分析采用先连续后离散、先周期后非周期、先时域后频域复频域的顺序，以对偶和类比的方式逐章展开，完全并行地讲述了连续时间和离散时间信号与系统的一系列基本概念、理论和方法，以及它们在通信、信号处理等领域中的主要应用，最后还讲述了数字信号处理和系统的状态变量描述的基本概念和方法，形成了一个“系统分析和综合”与“信号分析和处理”两方面知识并重的、较为完整的、具有鲜明特色的信号与系统课程内容体系。各章均有足够数量的精选例题，兼顾基本练习和解题的分析技巧；章末配有数量丰富的习题，供学生练习使用。

本书由李云红担任主编并负责统稿，第 1、4、5 章部分内容由李云红编写，第 2 章由顾梅花编写，第 3 章由孟繁杰编写，第 6 章部分内容由薛谦编写，廉继红编写了第 5 章的部分内容，陈锦妮编写了第 6 章的部分内容，李子琳、伊欣、王瑞华、梁高鸣、李尧、闫志轩参加了书中部分图形的绘制工作。在本书的编写过程中，编者参考了大量的书籍、文献，在此对这些书籍、文献的作者表示真诚的感谢！本书的编写得到了西安工程大学、西安电子科技大学的大力支持，编者在此表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者
2011 年 12 月

目　　录

第1章 信号与系统的基本概念

本章介绍了信号与系统的概念及分类方法；同时讨论了线性时不变(Linear Time - Invariant，LTI)系统的特性；介绍了线性时不变系统的描述方法和分析方法；深入研究了在线性时不变系统分析中占有十分重要地位的阶跃函数、冲激函数，以及它们的特性。

教学要求

了解信号与系统的分类；掌握信号的运算方法；深入研究阶跃函数、冲激函数及其特性。

重点与难点

1. 信号的描述与运算

(1) 信号的分类。

(2) 信号的运算(难点是对信号进行平移、反转和尺度变换的综合运算)。

(3) 冲激函数和阶跃函数。

2. 系统的描述与性质

(1) 系统的分类。

(2) 线性系统、时不变系统、因果系统的定义及判别方法。

(3) 用仿真框图表示系统或由框图写出该系统方程。

1.1 序　　言

信号与系统的概念已经深入人们的生活和社会的各个方面。手机、电视机、通信网、计算机网等已成为人们常用的工具和设备，这些工具和设备都可以看成系统，而各种设备传送的语音、音乐、图像、文字等都可以看成信号。

那么，什么是信号？什么是系统？为什么将这两个概念连在一起？信号是信息的一种表示方式，通过信号传递信息。信号的概念与系统的概念是紧密相连的。信号在系统中按一定的规律运动、变化，系统在输入信号的驱动下对它进行“加工”“处理”并发送输出信号，如图 1.1 所示。输入信号常称为激励，输出信号常称为响应。

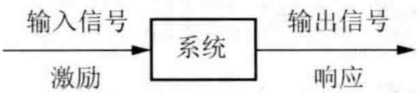


图 1.1　信号与系统

1.2 信号的概念

【典型信号举例】

信号常可以表示为时间函数(或序列)，该函数的图像称为信号的波形。在讨论信号的有关问题时，“信号”与“函数(或序列)”两个词常互相混用，不予区分。

1.2.1 信号的定义

信息(information)是人类感官所能感知的一切反映客观事物运动状态、特征及其变化的东西。它们是抽象的，只能借助一定的物理方式予以表达。

消息(message)是信息的物理表达方式，诸如语言、文字、图像、数据或者事先约定的符号等。消息中都包含一定的信息。

消息一般难以高效、可靠地进行远距离传输，为此需要将它们转换为随时间和空间变化的某种物理量，这就是信号(signal)。因此，信号是消息的表现形式和运载工具，消息是信号的内容。

信号对人们来说并不陌生。例如，上课的铃声——声信号，表示该上课了；十字路口的红绿灯——光信号，指挥交通；电视机天线接收的电视信息——电信号；广告牌上的文字、图像信号；等等。

信号可以是多种多样的，若信号表现为电压、电流、电荷、磁链或空间电磁波时，则称为电信号。电信号因其易于存储、传输、处理和再现，且非电信号又极易转换为电信号，因而电信号是现代技术中应用最广的信号。

为了对信号进行分析和研究，必须建立信号的数学模型，以便用数学语言对信号进行描述，这就是信号的数学表达式，即信号的函数形式。

本课程只讨论电信号。就集总参数电系统而言，电信号是只随时间变化的单变量信号 $u(t)$ 和 $i(t)$，它们随时间变化的函数曲线称为信号的波形，它是信号的图形表示。

1.2.2　信号的分类

1. 确定信号和随机信号(按信号随时间的变化规律分类)

【随机信号举例】

确定信号中的信号是自变量的确定函数，在任意给定时刻或位置，信号都具有确定的数值及分布，信号所含信息的不同体现在其分布值随时间或空间的变化规律上。随机信号中的信号不能用自变量的确定函数去描述；自变量给定时，信号值具有不可预知的不确定性，只能通过大量试验或以统计数学为工具去获取在给定自变量下信号为某一数值的概率(信号的统计特性)。

2. 连续时间信号和离散时间信号(按信号自变量的定义域分类)

【连续时间信号和离散时间信号的关系】

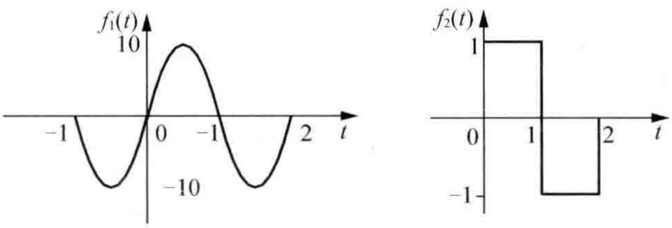
连续时间信号中信号的自变量取值是连续的。也就是说，信号自变量(时间)的定义域是连续的，除若干不连续的点外，信号都有确定值与自变量对应。图 1.2(a)中的信号

$$f_1(t)=10\sin(\omega t),\quad -\infty<t<\infty \tag{1-1}$$

其定义域$(-\infty,\ \infty)$和值域$[-10,\ 10]$都是连续的。图 1.2(b)中的信号

$$f_2(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\leqslant t<1\\ -1, & 1\leqslant t<2\\ 0, & t>2\end{cases} \tag{1-2}$$

其定义域$(-\infty,\ \infty)$是连续的，但其函数值只取-1、0、1 三个离散的数值。



(a) 值域连续　　(b) 值域不连续

图 1.2　连续时间信号

【采样量化编码】

而离散时间信号中的信号的自变量取值是离散的。就是说，信号只在自变量的离散瞬间才有定义。这里“离散”指信号的定义域——时间(或其他量)是离散的，它只取某些规定的值。所以，信号自变量的定义域是不连续的。

图 1.3 所示为离散时间序列，其中

$$f(k)=\begin{cases}0, & k<0\\ e^{-\alpha k}, & k\geqslant 0,\ \alpha>0\end{cases} \tag{1-3}$$

对于不同的 α，其值域$[0,\ 1]$是连续的。

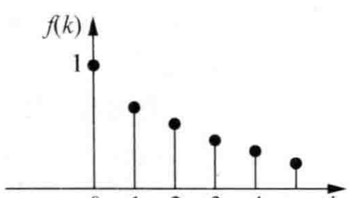
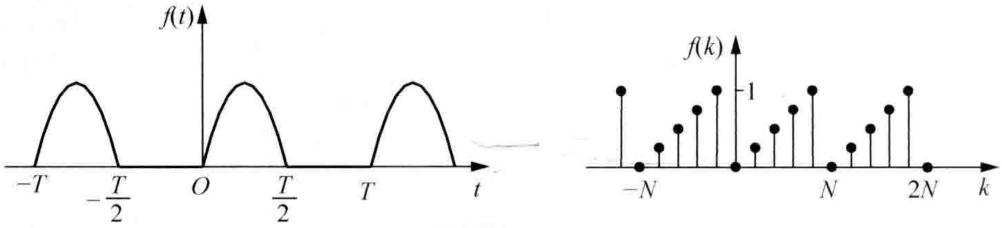


图 1.3　离散时间信号

【离散信号采样及其频谱特征】

3. 周期信号和非周期信号（按信号变化的重复性分类）

周期信号是信号随自变量连续变化且重复某一变化规律的信号，即定义在$(-\infty, \infty)$区间，每隔一定时间T（或整数N），按相同规律重复变化的信号，如图 1.4 所示。



(a) 连续周期信号　　(b) 离散周期序列

图 1.4　周期信号

连续周期信号$f(t)$满足

$$f(t)=f(t+nT),\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1-4}$$

离散周期信号$f(k)$满足

$$f(k)=f(k+mN),\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{1-5}$$

使式(1-4)成立的最小T值称为信号$f(t)$的周期，使式(1-5)成立的最小N值称为信号$f(k)$的周期。不具有周期性的信号称为非周期信号。周期信号的特点如下。

(1) 无始无终，定义域为$(-\infty, +\infty)$。

(2) 变化规律具有周期性，各周期内的信号波形完全相同。

(3) 周期比为整数比的周期信号之和仍是周期信号，其周期是子信号周期的公倍数。

例 1.1　判断下列信号是否为周期信号，若是，确定其周期。

(1) $f_1(t)=\sin 2t+\cos 3t$

(2) $f_2(t)=\cos 2t+\sin \pi t$

分析　两个周期信号$x(t)$，$y(t)$的周期分别为T_1和T_2，若其周期之比T_1/T_2为有理数，则其和信号$x(t)+y(t)$仍然是周期信号，其周期为T_1和T_2的最小公倍数。

解　(1) $\sin 2t$是周期信号，其角频率和周期分别为

$$\omega_1=2\text{rad/s},\ T_1=2\pi/\omega_1=\pi\text{s}$$

$\cos 3t$是周期信号，其角频率和周期分别为

$$\omega_2=3\text{rad/s},\ T_2=2\pi/\omega_2=(2\pi/3)\text{s}$$

由于$T_1/T_2=3/2$为有理数，故$f_1(t)$为周期信号，其周期为T_1和T_2的最小公倍数2π。

(2) $\cos 2t$和$\sin \pi t$的周期分别为$T_1=\pi\text{s}$，$T_2=2\text{s}$，由于T_1/T_2为无理数，故$f_2(t)$为非周期信号。

例 1.2　判断正弦序列$f(k)=\sin \beta k$是否为周期信号，若是，确定其周期。

解
$$\begin{aligned} f(k)&=\sin \beta k=\sin(\beta k+2m\pi),\ m=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \\ &=\sin\left[\beta\left(k+m\frac{2\pi}{\beta}\right)\right]=\sin\left[\beta(k+mN)\right] \end{aligned}$$

式中，β 称为数字角频率，单位为 rad。由上式可得以下结论。

仅当 $2\pi/\beta$ 为整数时，正弦序列才具有周期 $N=2\pi/\beta$。

当 $2\pi/\beta$ 为有理数时，正弦序列仍为具有周期性，但其周期为 $N=M(2\pi/\beta)$，M 取使 N 为整数的最小整数。

当 $2\pi/\beta$ 为无理数时，正弦序列为非周期序列。

例 1.3 判断下列序列是否为周期信号，若是，确定其周期。

(1) $f_1(k)=\sin(3\pi k/4)+\cos(0.5\pi k)$

(2) $f_2(k)=\sin 2k$

解 (1) $\sin(3\pi k/4)$ 和 $\cos(0.5\pi k)$ 的数字角频率分别为 $\beta_1=3\pi/4\text{rad}$，$\beta_2=0.5\pi\text{rad}$。

由于 $2\pi/\beta_1=8/3$，$2\pi/\beta_2=4$ 为有理数，故它们的周期分别为 $N_1=8$，$N_2=4$，故 $f_1(k)$ 为周期序列，其周期为 N_1 和 N_2 的最小公倍数 8。

(2) $\sin 2k$ 的数字角频率为 $\beta_1=2\text{rad}$；由于 $2\pi/\beta_1=\pi$ 为无理数，故 $f_2(k)=\sin 2k$ 为非周期序列。

由上面几例可看出：

(1) 连续正弦信号一定是周期信号，而正弦序列不一定是周期序列。

(2) 两连续周期信号之和不一定是周期信号，而两周期序列之和一定是周期序列。

4. 能量信号和功率信号(按信号的能量和功率特点分类)

能量信号的总能量为有限值，而平均功率为零。功率信号的平均功率为有限值，而总能量无穷大，并且信号自变量(时间)的定义域为$(-\infty, +\infty)$。

信号能量定义为在区间$(-\infty, +\infty)$中的信号 $f(t)$ 的能量，用 E 表示，即

$$E=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-6}$$

信号功率定义为在区间$(-\infty, +\infty)$中信号 $f(t)$ 的平均功率，用 P 表示，即

$$P=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a}|f(t)|^2\mathrm{d}t \tag{1-7}$$

若信号 $f(t)$ 的能量有界(即 $0<E<\infty$，这时 $P=0$)，则称其为能量有限信号，简称能量信号。若信号 $f(t)$ 的功率有界(即 $0<P<\infty$，这时 $E=\infty$)，则称其为功率有限信号，简称功率信号。

一般规律如下。

(1) 一般周期信号为功率信号。

(2) 时限信号(仅在有限时间区间不为零的非周期信号)为能量信号。

(3) 还有一些非周期信号，也是非能量信号。如 $\varepsilon(t)$ 是功率信号；而 $t\varepsilon(t)$、e^t 为非功率非能量信号；$\delta(t)$ 是无定义的非功率非能量信号。

5. 实信号和复信号(按信号的值域性质分类)

在任意时刻的取值均为实数，物理上可以实现的信号都是实信号。连续信号的复指数

信号可表示为

$$f(t)=\mathrm{e}^{st},\quad -\infty<t<\infty \tag{1-8}$$

式中，复变量 $s=\sigma+\mathrm{j}\omega$，$\sigma$ 是 s 的实部，记为 $\mathrm{Re}[s]$，ω 是 s 的虚部，记为 $\mathrm{Im}[s]$。根据欧拉公式，式(1－8)可展开为

$$f(t)=\mathrm{e}^{(\sigma+\mathrm{j}\omega)t}=\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t+\mathrm{j}\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t \tag{1-9}$$

可见，一个复指数信号可分解为实、虚两部分，即

$$\mathrm{Re}[f(t)]=\mathrm{e}^{\sigma t}\cos\omega t \tag{1-10}$$

$$\mathrm{Im}[f(t)]=\mathrm{e}^{\sigma t}\sin\omega t \tag{1-11}$$

两者均为实信号，而且是频率相同、振幅随时间变化的正(余)弦振荡。

函数值为复数的信号称为复信号。复信号的值域为复数，物理上不能实现，常用于理论分析。离散时间的复指数序列可表示为

$$f(k)=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\beta)k}=\mathrm{e}^{\alpha k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta k} \tag{1-12}$$

令 $a=\mathrm{e}^{\alpha}$，式(1－12)可展开为

$$f(t)=a^k\cos\beta k+\mathrm{j}a^k\sin\beta k \tag{1-13}$$

其实部、虚部分别为

$$\mathrm{Re}[f(k)]=a^k\cos\beta k \tag{1-14}$$

和

$$\mathrm{Im}[f(k)]=a^k\sin\beta k \tag{1-15}$$

可见，复指数序列的实部和虚部均为幅值随 k 变化的正(余)弦序列。

1.2.3 有关信号的术语

按照信号存在的时间区间还可进行如下分类。

1. 有时限信号和无时限信号

若信号 $f(t)$在有限时间区间 $t_1<t<t_2$ 内 $f(t)\neq 0$，此区间外 $f(t)=0$，即称为有时限信号，否则称为无时限信号。

2. 有始信号和有终信号

若信号 $f(t)$在 $t<t_1$ 时 $f(t)=0$；$t>t_1$ 时 $f(t)\neq 0$，则称为有始信号，$t=t_1$ 为有始信号 $f(t)$的起始时刻。

若信号 $f(t)$在 $t<t_2$ 时 $f(t)\neq 0$；$t>t_2$ 时 $f(t)=0$，则称为有终信号，$t=t_2$ 为有终信号 $f(t)$的终止时刻。

3. 因果信号和反因果信号

如果信号 $f(t)$在 $t<0$ 时 $f(t)=0$；$t>0$ 时 $f(t)\neq 0$，则称为因果信号。显然，因果信号是有始信号的特例，可表示为 $f(t)\varepsilon(t)$。

如果信号 $f(t)$在 $t<0$ 时 $f(t)\neq 0$；$t>0$ 时 $f(t)=0$，则称为反因果信号。显然，反因果信号是有终信号的特例，可表示为 $f(t)\varepsilon(-t)$。

1.3 基本连续时间信号及其时域特性

信号的时域特性是指信号的波形、出现时间的先后、持续时间之长短、变化的快慢和幅度、重复周期的大小等，它包含了信号中的信息内容。本节给出基本连续信号的函数表达式、波形图及其时域性质。

1. 直流(常量)信号

$$f(t)=A,\quad -\infty<t<\infty \tag{1-16}$$

2. 正弦信号

$$f(t)=A\cos(\omega t+\psi),\quad -\infty<t<\infty \tag{1-17}$$

式(1-17)中，振幅 A、角频率 ω 和初相 ψ 均为实常数。

正弦信号有以下特点。

(1) 正弦信号是无时限信号。

(2) 正弦信号是周期信号，周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$。

(3) 正弦信号微分或积分的结果仍为同频正弦信号。

(4) 正弦信号满足二阶微分方程 $f''(t)+\omega^2 f(t)=0$。

3. 单位阶跃信号

$$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geqslant 0\end{cases} \tag{1-18}$$

【单位阶跃信号的MATLAB实现】

称为发生幅度为 1 的阶跃，如图 1.5 所示。

其值域只有 0、1 两个数值。单位阶跃信号的起始作用可使任意非因果信号 $f(t)$ 变为因果信号 $f(t)\varepsilon(t)$。

4. 单位门信号

单位门信号如图 1.6 所示。

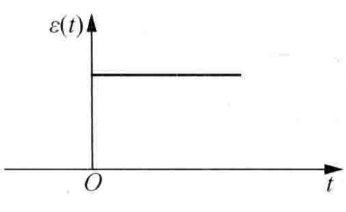


图 1.5 单位阶跃信号

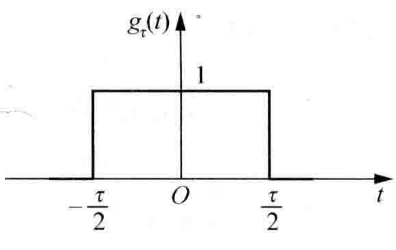


图 1.6 单位门信号

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|\leqslant\dfrac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\dfrac{\tau}{2}\end{cases} \tag{1-19}$$

单位门信号是有时限信号，具有使任意无时限信号 $f(t)$ 变为有时限信号 $f(t)g_\tau(t)$ 的功能。单位门信号可表示为两个延时的单位阶跃信号之差，即

$$g_\tau(t)=\varepsilon\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-\varepsilon\left(t-\frac{\tau}{2}\right) \tag{1-20}$$

5. 单位冲激信号

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases} \quad 且 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=1 \tag{1-21}$$

单位冲激信号又称狄拉克函数或 δ 函数，它和单位阶跃函数都属于奇异函数，如图 1.7 所示。

【单位冲激信号的MATLAB实现】

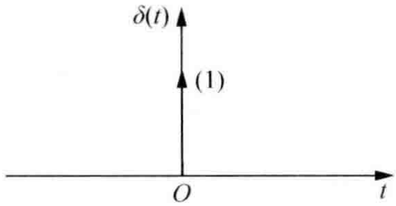


图 1.7 单位冲激信号

【单位冲激函数的定义】

单位冲激信号除原点外处处为零，但具有单位面积(反映信号强度，简称冲激强度)，可视其为门宽 τ，门高 $\frac{1}{\tau}$ 的门信号 $\frac{1}{\tau}G_\tau(t)$ 在 $\tau\to 0$ 时的极限。

单位冲激函数有以下性质。

(1) 采样(筛选)性质：设任意有界函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=t_0$ 时刻连续，则

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t) \tag{1-22}$$

$$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1-23}$$

那么

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(0)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0) \tag{1-24}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}f(t_0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0) \tag{1-25}$$

就是说，任意有界函数 $f(t)$ 与单位冲激函数相乘后，在无穷区间的积分结果等于冲激时刻 $f(t)$ 的函数值 $f(0)$ 或 $f(t_0)$，这就是单位冲激函数的采样(筛选)性质。$f(0)$ 或 $f(t_0)$ 为采样时刻的采样值，$f(t)$ 为被采样函数(信号)。

(2) 单位冲激函数为偶函数。

$$\delta(t)=\delta(-t),\delta(t-t_0)=\delta[-(t-t_0)]=\delta(t_0-t) \tag{1-26}$$

(3) 单位冲激函数的尺度变换性质。

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1-27}$$

a 为大于零的实常数，由此可推出

【单位冲激函数的尺度变换性质证明】

$$\delta(at-t_0)=\frac{1}{a}\delta\left(t-\frac{t_0}{a}\right) \tag{1-28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(at)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}f(0) \tag{1-29}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(at-t_0)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}f\left(\frac{t_0}{a}\right) \tag{1-30}$$

单位冲激函数和单位阶跃函数的关系为

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1-31}$$

延迟的单位冲激函数和单位阶跃函数的关系为

$$\delta(t-t_0)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t-t_0)}{\mathrm{d}t}$$

$$\varepsilon(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau \tag{1-32}$$

6. 单位冲激偶函数

单位冲激信号的一阶导数

$$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1-33}$$

是一对发生在 $t=0(0_-$ 和 $0_+)$ 时刻强度无穷大的正负冲激信号，称为单位冲激偶函数。

单位冲激偶函数有以下的性质。

(1) 单位冲激偶函数是奇函数。

$$\delta'(t)=-\delta'(-t),\ \delta'(t-t_0)=-\delta'(t_0-t) \tag{1-34}$$

(2) 单位冲激偶函数包围的面积为零(正负冲激包围的面积相互抵消)。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0 \tag{1-35}$$

(3) 单位冲激偶函数的积分是单位冲激函数。

$$\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau=\delta(t) \tag{1-36}$$

(4) 根据两函数之积的求导公式和单位冲激函数的性质：

$$[f(t)\delta(t)]'=f(0)\delta'(t)=f'(t)\delta(t)+f(t)\delta'(t)=f'(0)\delta(t)+f(t)\delta'(t)$$

可得

$$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t) \tag{1-37}$$

同理

$$f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1-38}$$

结果有如下推论：

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t=-f'(0) \tag{1-39}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t=-f'(t_0) \tag{1-40}$$

$$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau=f(0)\delta(t)-f'(0)\varepsilon(t) \tag{1-41}$$

$$\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\delta'(\tau-t_0)\mathrm{d}\tau=f(t_0)\delta(t-t_0)-f'(t_0)\varepsilon(t-t_0) \tag{1-42}$$

7. 单位斜坡信号

$$r(t)=t\varepsilon(t)=\begin{cases}t, & t>0\\0, & t<0\end{cases} \tag{1-43}$$