绪　论

0-1　空气动力学实验的重要性

科学实验，是探索自然规律和改造客观世界的基本手段。空气动力学实验，对于空气动力学的发展和各种飞行器的研制，起着决定性的作用。这主要表现在以下三个方面：

1．空气动力学的发展史表明，没有实验研究，就没有独立的空气动力学这门学科。空气动力学基本现象和基本原理，都是通过实验逐步认识的。空气动力学上的重大突破，都首先是实验上的突破。例如，物体在流体中的阻力特性，附面层的存在及其特性，激波与附面层之间的干扰，紊流结构，升力线理论，面积律，尖峰翼型，超临界翼型，前缘涡的利用和边条翼等，都是在实验研究的基础上发现和发展起来的。

2．跟其他自然科学学科一样，空气动力学理论分析和计算的结果，都应经受实验的检验或验证。在空气动力学理论分析和计算中，难免要引入一些与真实现象有区别的简化和假设。必须借助于实验来检验这些简化和假设的近似程度。空气动力学理论分析和计算的结果得到了实验的验证，方可应用于工程实际。

3．为包括飞机在内的各种飞行器（以下泛称为飞机）的研制提供可靠的空气动力数据。自世界上第一架飞机出现至今，一直沿用风洞实验的方法。尽管当今在研制飞机的过程中数值计算、工程计算与风洞实验相结合的方法，已越来越受到人们的重视，但各种计算方法和计算公式都要以实验为基础，而且，即使是以实验为基础的已有的计算方法和计算公式往往也不能应用到另一种新型飞机上去。可靠的空气动力数据归根到底还是要来自空气动力学实验。在现代新型飞机研制过程中，既要进行大量的计算，又要进行大量的实验，风洞实验时数往往达数千小时，乃至数万小时。有人称"新飞机是从风洞中飞出来的"，这是有道理的。

0-2　空气动力学实验技术发展简史

空气动力学实验技术是研究空气动力学实验的基本原理、基本方法、实验设备以及实验数据修正和处理的一门应用技术性学科。

空气动力学实验技术这门学科，是随着航空航天事业的发展而发展的。20世纪初，出现了最初的飞机。尽管当时风洞十分简陋，但其功绩是不可磨灭的。没有当时的风洞实验，人类飞行的愿望就不可能实现。30年代前后，空气动力学实验方法和实验数据处理方法等都有了长足的进步，利用大型的低速风洞进行了大量的空气动力学实验，从而在很大程度上改善了飞机的空气动力外形，在未大幅度增加动力装置功率的前提下，使飞机的飞行速度从大约50m/s提高到170m/s。正是在这种生产实践的基础上，逐渐形成了空气动力学实验技术这门学科。30年代建成了最初的超音速风洞，40年代又建成了大量的超音速风

洞。随后，飞机在40年代突破了“音障”，50年代突破了“热障”，超音速飞机和人造卫星相继出现。40年代末建成了跨音速风洞，随后出现了性能优越的跨音速飞机。40～50年代其他各类风洞也有了相当大的发展，空气动力学实验技术这门学科的内容得到了充实和提高。近40年来，空气动力学实验技术与现代电子技术、计算机技术、激光技术和制冷技术等密切结合，使空气动力学实验的实验设备、实验方法和实验数据修正、处理方法等日新月异地发展，新的一代风洞，如高雷诺数跨音速风洞、自修正风洞等，相继涌现出来。

早在30年代中期，我国清华大学曾设计了一座中型的低速风洞，并先后在北京、南昌正式兴建。然而，在当时半封建半殖民地社会条件下，这一早期的建设风洞的计划，最终未能实现。直到1949年，我国没有一座可供科研、生产用的大中型风洞。中华人民共和国成立后，随着我国工农业生产和科学技术的发展，空气动力学实验技术取得了巨大进展。50年代，我国首次建成了实验段截面直径为1.5m的低速风洞和实验段截面为0.6m×0.6m的跨、超音速风洞。至今我国各类风洞已初步配套，建成了若干个具有相当规模的空气动力学研究机构，形成了一支具有一定水平的空气动力学实验工作者队伍，科研成果不断涌现，在许多方面与世界先进水平相比并无逊色。

在现代科学技术迅速发展的今天，空气动力学实验技术的发展也进入了一个新的时期。首先，随着电子计算机和数值计算方法的发展，建立在实验基础上的数值计算可以代替一部分实验项目，可以比实验更迅速、更经济地提供必要的空气动力数据。因而，空气动力学实验工作者可以把精力更多地集中到探索空气动力学新领域方面去，促进空气动力学向着更深入的方向发展。但是，计算机永远不可能完全代替实验研究，计算机只能解决物理机理已经通过实验研究弄清楚的不是过于复杂的流动问题，至于流动机理方面的研究以及数值计算结果的验证，仍要靠实验来解决。因此，电子计算机的飞速发展，不仅不会取代实验手段，而且将会促使空气动力学实验技术相应地跃进。其次，近年来飞机的性能越来越先进，需要解决的空气动力学问题越来越复杂，因而对实验的要求越来越高，实验项目和风洞实验时数越来越多。50年代研制一种大型飞机，风洞实验时数达到一万小时，当时是一个十分可观的数字。70年代研制的超音速客机的风洞实验时数达四万小时，80年代航天飞机的风洞实验时数近十万小时。由此可见，实验手段仍是现代飞机研制的重要基础。此外，随着工业空气动力学、环境科学和气象科学等学科的发展，空气动力学实验技术应用的范围已不局限于航空航天方面，已涉及到机械、农业、林业、建筑、桥梁、车辆、舰船、生物、能源、气象、环保、化工和体育等各个领域，出现了汽车风洞、气象风洞、环保风洞、风沙风洞和大气附面层风洞等各种专用风洞，空气动力学实验技术在这些方面的发展也有着广阔的前景。

0-3 空气动力学实验的基本方法

在空气动力学实验中，一般采用模拟方法，即用模型实验来模拟原型的物理现象（例如飞机在空中飞行的物理现象）。所谓模拟，是指在一定条件下，用一个比较容易求得结果的物理现象来研究另一个遵循相同物理规律或数学规律的物理现象的方法。在空气动力学实验中，绕流模型和绕流原型这两个物理现象，虽有数量上的差别，但物理本质相同，遵循相同的物理规律。这种模拟，属于物理模拟。

要进行模型实验，就要求实验的方法和实验的设备满足于一定的条件。空气动力学实验的基本方法和设备，按照模型与空气之间产生相对运动的方式不同，主要有以下三大类：

1. 风洞实验法　安装在风洞中的飞机模型沿飞行方向静止不动，而使空气流过模型。这是一种广为应用的方法。这种风洞实验法的优点是测量方便，气流参数如速度、压强等易于控制，且基本上不受天气变化的影响，实验费用低。其缺点是模型流场受风洞壁面和模型支架等的干扰，一般不能做到模型流场与原型流场完全相似。而且，随速度范围和用途的不同，需建造多座不同的风洞。

2. 飞行试验法　飞机在大气中飞行条件下进行的试验。有动力或无动力的模型在大气中飞行条件下进行试验，也属飞行试验法。与风洞实验法相比，飞行试验法的优点是不存在洞壁和模型支架等的干扰，缺点是试验费用高，试验条件不易控制，测量方法复杂。飞行试验法可用来验证风洞实验的可靠性，解决那些在风洞中难以解决的问题。

3. 携带实验法　将模型固定在以一定速度在大气中运动的携带设备上，使模型与空气之间产生相对运动，携带设备上装有测量仪器，可测出模型的空气动力等数据。携带设备可以是旋臂机、火箭滑橇或飞机。旋臂机的中间是竖立的转轴，旋臂的根部固定在转轴上，模型安装在旋臂的端部，转轴带动旋臂在水平面内旋转，使模型与空气之间产生相对运动。旋臂机上的模型沿圆周运动，不仅与飞机直线飞行情况不同，而且模型总是在自身先前所产生的尾流中运动，流场不均匀。火箭滑橇，又称火箭车，是用火箭产生推力在长达数十千米的轨道上高速运行的滑橇（车）。其速度可超过音速。模型在火箭滑橇上进行实验，受自然风等的影响，测量的精确度一般不高。用飞机或火箭携带模型进行实验，流场比较均匀，但实验费用高，对测量方法和测量仪器的要求也高。

上述三大类方法中，风洞实验法是进行空气动力学实验最经济、效果最好、应用得最广泛的方法，是本书讨论的主要内容。

在风洞中进行的空气动力学实验，又大体上可分为测量和流动显示这两类既有联系又有区别的实验方法。

以确定被测量量值为主要目的的实验，属测量类实验。测量类实验可为科学研究和飞机设计提供定量的依据。测量作用在整个模型或其部件上的空气动力，可用来研究飞机及其部件的性能，验证理论计算的结果。测量模型表面上的压强分布，可得到飞机及其部件强度计算所需的载荷数据，可用积分法算出由压差形成的忽略了切向力的空气动力，还可用来研究绕流状态。测量气流的流速、密度等参数，更是各种实验中不可少的测量项目。

用外加物质、注入能量或投射光束的方法显示出空气绕流模型的整个图形，属于流动显示类实验。由流动显示所获得的图形有助于全面了解流场，有助于直观地理解流动机理，有助于分析测力和测压的定量测量结果，有助于合理地选择飞机的空气动力外形。由于激光技术和图像处理技术的迅速发展，流动显示技术近年来有很大发展，已开始进入可快速地给出整个流场的流动参数的阶段。可以预言，流动显示将会发挥越来越大的作用。

测量和流动显示两类实验具有十分密切的联系，不宜将其截然划分为两类孤立的实验。根据流动显示的结果可以确定某些量的量值，根据测量结果也可得到流动图形。在许多情况下，实验中同时进行测量和流动显示。

本书主要阐述空气动力学常规实验的原理和方法。所谓常规实验，系指传统的、常见的实验。对于某些特殊实验，如投放实验等，本书仅作简单介绍。

0-4 本课程的主要内容

空气动力学实验技术，是空气动力学专业的一门专业课。空气动力学实验的基本理论，空气动力学常规实验的实验设备和实验方法，以及实验数据处理的基本概念和基本原理，是本课程的主要内容。通过本课程，可使初学者了解空气动力学实验技术这门学科的概貌，掌握其中的基本概念和基本方法，为开展实验工作、参加飞机设计工作或进行空气动力学研究工作打下基础。

空气动力学实验研究工作，涉及面很广。对一项典型的实验课题，大致包括以下十个方面的工作：

1. 在调查研究的基础上，论证该项实验研究的目的、必要性和理论根据。
2. 应用相似理论，确定必须模拟的相似准则，确定实验的参数及其量级，确定哪些相似准则可以不模拟而通过其他途径予以处理，确定模型尺寸与原型尺寸之间的比例。
3. 根据实验的需要选用现有的实验设备和仪器，在必要的情况下研制新的实验设备和仪器。
4. 论证实验数据修正的项目和修正的原理，确定修正的方法。
5. 制定实验大纲和实验计划，确定实验的精确度。实验的项目、次数和采集的数据点既要足够，又要尽可能少。数据点的分布密度应适当。
6. 设计模型，提出制造、检验和安装模型的技术要求。
7. 实验前校准和确定仪器设备的性能。
8. 在实验前和实验中分析各种不安全因素，采取必要的防范措施。
9. 实验中及时处理出现的技术问题。
10. 对实验数据进行修正和处理，对实验结果进行分析研究，提出实验研究报告。

空气动力学实验研究工作涉及的范围十分广泛，上述十个方面只是一个纲。掌握这个纲，有助于提高学习本课程的主观能动性。

在有限的学时内，本课程只能涉及上述十个方面中的最基本的内容，它们是：

1. 相似理论。相似理论对实验研究起着指导作用。
2. 空气动力学实验的基本实验设备——风洞的工作原理。
3. 误差理论。误差理论对测量和数据处理起着指导作用。
4. 空气动力和气流参数测量的基本原理和方法，流动显示的原理和基本方法。
5. 各种空气动力学常规实验及其实验数据修正处理的基本原理和基本方法。

本课程的上述内容，都是以相似理论作为基础，并围绕着如何使实验既可靠又经济这个基本问题而展开的。

本课程的特点是实践性强，与相关学科之间的渗透性强。在学习本课程中应理论联系实际，深入实验室，勇于亲自动手，不仅要掌握本学科的基本概念和基本理论，而且要关心相关学科的现状和进展。

本书采用以国际单位制（SI）为基础的法定计量单位。本书中常用的有量纲物理量的符号、单位和量纲，见附录Ⅰ。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第1章 相似理论

现代的空气动力学实验，通常都是在各式各样的风洞中进行模型实验，以取得原型流场（如飞机在大气中飞行）的空气动力数据。要做到这一点须解决两个重要的问题：

1. 在模型实验前和实验中，如何使绕流模型的流场模拟原型流场？

2. 在模型实验后，如何将模型实验的数据正确地转换为原型流场的数据？

解决这两个问题的理论基础是相似理论。

在本章中，阐述相似理论的基本内容，并介绍导出相似准则的量纲分析法，讨论如果不能完全模拟应该模拟的相似准则又该怎么办。

限于本课程的性质和任务，本章中着重于相似理论的应用，而不追求理论上的严格证明。

1-1 相似和相似定理

（一）相似的基本概念

1. 几何相似 几何相似是人们熟知的相似现象。以三角形为例，彼此相似的三角形，其对应边长成比例。若 l_1、l_2、l_3和l'_1、l'_2、l'_3是两个三角形的对应边长，则

$$\frac{l_1}{l'_1}=\frac{l_2}{l'_2}=\frac{l_3}{l'_3}=C_l \tag{1-1}$$

对这两个三角形的所有对应边而言，式（1-1）中的 C_l 是常数，称为相似常数。设有三个相似三角形，第一与第二两个三角形的相似常数为 C_{l1}，第一与第三两个三角形的相似常数为C_{l2}。通常C_{l1}与C_{l2}不相等。通过不同的相似常数来变换相似图像的大小，称为相似变换。

2. 物理现象的相似 物理现象（过程）的相似是以几何相似为前提的，并且是几何相似概念的扩展。

两个属于同一类的物理现象，如果在空间、时间对应点上所有表征现象的对应的物理量都保持各自的固定的比例关系（如果是矢量还包括方向相同），则两个物理现象相似。

两个流场的空间、时间对应点上所有表征流场的对应的物理量都保持各自的固定的比例关系（如果是矢量还包括方向相同），则两个流场相似。

研究两个流场相似，是涉及到各种参数的综合问题。一般情况下，两个流场相似包括以下几个方面互相联系、互为条件的相似：

（1）几何相似 两个物体，如其中一个物体经过均匀变形（每个尺寸都扩大或缩小同一倍数）后能和另一物体完全重合，则称这两个物体几何相似。令 l 和 l'是两个物体的对应长度，则

$$\frac{l}{l'}=C_l\text{（常数）}$$

（2）运动相似　两个流场对应点的速度，如果方向是相同的，大小保持固定的比例关系，则两个流场是运动相似的。若 v 和 v' 是两个流场对应点的速度，则

$$\frac{v}{v'}=C_v\text{（常数）}$$

速度相似也就决定了两个几何相似的流场对应点的加速度相似。运动相似，即速度矢量场和加速度矢量场均保持相似，对应流线谱经均匀变形后可相互重合。

（3）动力相似　如果两个流场对应点上作用在流体微团上的各种力所组成的力多边形是几何相似的，则两个流场是动力相似的。令 F 和 F' 为对应的力，则

$$\frac{F}{F'}=C_F\text{（常数）}$$

反之，如动力相似，则诸作用力的矢量场必保持几何相似。

（4）热相似　若在两个流场对应点上与热现象有关的物理量保持固定的比例关系，则两个流场是热相似的。如 T 和 T' 为对应点的温度，则

$$\frac{T}{T'}=C_T\text{（常数）}$$

（5）质量相似　若在两个流场对应点上密度保持固定的比例关系，则两个流场是质量相似的。如 ρ 和 ρ' 为对应点的密度，则

$$\frac{\rho}{\rho'}=C_\rho\text{（常数）}$$

3. 同类现象和单值条件　物理现象（过程）是有一定规律的，在表征现象的各物理量之间存在着一定的关系，并可用物理方程来描述这一关系。若两个现象服从同一规律，也就是说，可以用同一物理方程描述这两个现象，则称这两个现象为同类现象。

两个现象如相似，则必为同类现象。这是两个现象相似的一个必要条件。

物理方程是对现象的一般描述，它只给出了现象内部的规律性，适用于一系列同类现象。对于一个具体的现象，它除符合物理方程所描述的内部规律外，还与包括现象发生的空间范围、时间范围、现象内部与外界的联系等外部条件有关。也就是说，一个现象有其不同于同类的另一现象的特殊性。能够把一个现象从同类现象中区分出来的条件，称为单值条件。涉及单值条件的物理量，称为单值量。单值条件一般有以下几类：

几何条件：现象的空间几何特征，如物体的几何形状和大小等。

物性条件：描述现象的物理方程中所包含的与物体性质有关的具体物理量的大小，如空气密度、粘性系数等。

边界条件：边界的性质和发生在边界上的流动情况，如远前方来流速度的大小、方向的具体分布情况，非等温固体壁面上的温度分布具体情况，风洞壁面上的速度分布具体情况等。

时间条件：非定常现象的初（起）始条件。

4. 单值条件相似　有了描述现象的物理方程，并给定了单值条件后，对现象的数学描述才是完整的。如果两个现象相似，除了物理方程相同外，单值条件还应保持相似。所谓单值条件相似，是指对单值条件分布的描述相同，且各对应单值量之间保持固定的比

例。

单值条件相似，是现象相似的又一必要条件。这是因为，物理方程仅决定有关物理量之间的变化规律，如果现象的外部条件不相似，例如边界条件不相似，则两个现象也就不相似。前述的几何相似，也包含在单值条件相似之内了。

单值条件相似，对于现象的相似，是十分重要的。仍以三角形相似为例，边长是单值条件，面积不是单值条件。对应边长成比例，是三角形相似的必要条件，而面积之比等于对应边长之比的平方，是三角形相似的结果。又例如，作为同类现象的两个沿管道内的定常绝热流动，如果单值条件，包括几何条件、物性条件和管道进口速度分布等边界条件在内，也是相似的，那么，属于非单值条件的沿两个管道流动的流量之比，也就被决定了。由此可见，在两个相似的现象之间，单值条件的相似是起决定性作用的。

（二）相似准则

两个相似的现象遵守同一物理方程，而且对应的物理量保持各自固定的比例关系。由此可导出有关相似现象的重要性质。

以一个质量为m的物体受到外力F作用而产生加速度这一简单的力学现象为例，其物理方程为

$$F=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \tag{1-2}$$

如果另一物体受力而产生加速度的力学现象与其相似，即

$$F'=m'\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} \tag{1-3}$$

而且

$$\left.\begin{aligned}\frac{F}{F'}=C_F,\quad \frac{m}{m'}=C_m\\ \frac{v}{v'}=C_v,\quad \frac{t}{t'}=C_t\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

式（1-4）称为相似变换式，C_F、C_m、C_v和C_t是相似常数。

将式（1-4）代入式（1-2），得

$$\frac{C_FC_t}{C_mC_v}F'=m'\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t'} \tag{1-5}$$

式（1-5）与式（1-3）相比较，应有制约条件

$$\frac{C_FC_t}{C_mC_v}=1 \tag{1-6}$$

式（1-6）表明，在相似现象中，各物理量的相似常数不能任意选择，而是相互制约的。在上例中只有满足式（1-6），两力学现象的相似才能存在。式（1-6）所示的这种相似常数的组合，称为相似指标。在相似现象中，相似指标必等于1。这是相似现象的重要性质。

将式（1-4）代入式（1-6），可得

$$\frac{Ft}{mv}=\frac{F't'}{m'v'}=常数$$

$Ft/(mv)$是由相似指标等于1这一制约条件导出的、由几个特征物理量组合而成的无量纲量，称为牛顿数，并用符号Ne表示，即

$$Ne=\frac{Ft}{mv} \tag{1-7}$$

当两个力学现象相似时，牛顿数的数值必然相同。用 idem 表示同一数值之意，可写作

$$Ne=\text{idem}$$

牛顿数数值相同，是两个力学现象相似的特征和标志之一。在更复杂的彼此相似的物理现象中，这种数值相同的无量纲量会有若干个，各有不同的名称，牛顿数仅是其中之一。

彼此相似的现象所必具有的数值相同的由若干个特征量组成的同名无量纲量，称为相似准则。

同名相似准则数值相同，是两个现象相似的特征和标志。有些相似准则还是衡量现象相似与否的判据。

相似准则，又称相似准数、相似判据、相似参数或相似模数等。空气动力学中常见的相似准则还有雷诺数Re、马赫数Ma、普朗特数Pr、弗劳德数Fr、斯特劳哈尔数Sr和比热比γ等。以人名命名的相似准则的符号均由两个字母组成，第一个字母大写，第二个字母小写，第二个字母不是第一个字母的下标。当这些双字母符号作为相乘的因子出现在乘积中且容易混淆时，可用乘号或括号隔开，或与其他相乘因子隔开一个间距。

现在先着眼于如何导出这些相似准则，暂不考虑它们的物理意义。上例中由式(1-2)～式（1-7)，由物理方程导出相似准则的方法，称为相似变换法。相似变换法导出相似准则的步骤如下：

1．列出物理方程；
2．列出各物理量成比例的关系式，即相似变换式，并代人物理方程；
3．得出由相似常数组成的相似指标，令其等于1；
4．将相似变换式代入相似指标，整理可得相似准则。

顺便指出，牛顿数在不同的场合又有一些其他的名称。例如空气动力系数，本质上就是牛顿数。如果模型流场与原型流场相似，则两者的空气动力系数的数值相同。模型空气动力学实验的结果通常都整理成空气动力系数（牛顿数），也就不难理解了。

（三）相似定理

相似第一定理：“彼此相似的现象，其同名相似准则的数值相同。”

这一定理指明了相似现象的一个重要的基本性质。由此定理可知，为了应用模型实验的结果，实验中应测量相似准则或相似准则中所包含的物理量。当模型流场与原型流场相似时，只要求出模型流场的相似准则，即获得原型流场的相似准则。

相似第一定理又可表述为：彼此相似的现象的相似指标等于1。这一表述的特点是从数学上指出了相似常数之间的制约条件，即相似指标等于1。相似第一定理的两种表述，具有相同的意义。

相似第二定理：“现象的各物理量之间的关系，可以化为各相似准则之间的关系。”

这一定理陈述了Π定理的重要结论，将在1-2节中详加讨论。

由以上定理可知，应当以相似准则间关系的形式来处理实验结果，以便使实验的结果

用到与之相似的现象上去。

相似第三定理："如两个现象的单值条件相似，而且由单值量组成的同名相似准则数值相同，则这两个现象相似。"

这个定理告诉我们，单值条件相似，以及由单值量组成的同名相似准则的数值相同，是现象相似的必要充分条件。单值条件相似，除了其本身的含义之外，还包括了几何相似这一前提，并且包括了两个现象是同类现象这一条件（这是因为，不可能存在单值条件相似的不同类的物理现象）。因此，单值条件相似是现象相似的必要条件。但是，仅有这一条件还不够，还要满足由单值量组成的同名相似准则数值相同这一条件。在各种相似准则中，由单值量组成的相似准则对于现象相似来说是决定性的相似准则，其他相似准则是非决定性的相似准则。当单值条件相似、同名决定性相似准则数值相同时，就足以使现象相似了。而现象相似了，非决定性相似准则的数值自然会相同。当我们安排实验，使两个现象相似时，要求所有的相似准则数值相同是没有必要的，是多余的。要求那些需由实验确定的相似准则，在实验前满足数值相同，更是不可能的。当我们安排实验时，只要决定性相似准则数值相同，即可判定两个现象相似了。这是判定两个现象是否相似的可行的检查标准。由此可见，相似第三定理对于实验具有重要的指导意义。

由上述相似定理可知，当我们进行模型实验时，首先要使模型流场与原型流场相似，应根据相似的必要充分条件来安排实验。实验中应测量各相似准则或各相似准则中所包含的物理量。实验数据按相似准则进行整理，即可用到原型流场上去。

（四）由基本方程导出相似准则的举例

当现象能够用物理方程描述时，可应用相似变换法由物理方程导出相似准则。上述的导出相似准则的步骤，对于复杂的方程也适用。下面以空气动力学中的纳维-斯托克斯方程和能量方程为例，就一般情况（非定常、可压缩、完全气体流动）导出有关的相似准则。为了节省篇幅，只写出二维 x 向的基本方程，方程中的彻体力 f 按重力处理。

例 1-1 由纳维-斯托克斯方程导出相似准则。

解

1．列出方程

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}+\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+\rho v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\right] \tag{1-8}$$

2．列出相似变换式，即相应物理量成比例的关系式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{l}{l'}=C_l\quad\frac{t}{t'}=C_t\\&\frac{v_x}{v'_x}=\frac{v_y}{v'_y}=\frac{v}{v'}=\frac{C_l}{C_t}=C_v\\&\frac{f_x}{f'_x}=\frac{f_y}{f'_y}=\frac{g}{g'}=C_g\\&\frac{p}{p'}=C_p;\quad\frac{\rho}{\rho'}=C_\rho\quad\frac{\mu}{\mu'}=C_\mu\end{aligned}\right\} \tag{1-9}$$

将式（1-9）代入式（1-8），得

$$\frac{C_\rho C_v}{C_t}\rho'\frac{\partial v'_x}{\partial t'}+\frac{C_\rho C_v^2}{C_l}\left(\rho' v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\rho' v'_y\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\right)$$

$$=C_\rho C_g\rho' f'_x-\frac{C_p}{C_l}\frac{\partial p'}{\partial x'}+\frac{C_v C_\mu}{C_l^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left[2\mu'\frac{\partial v'_x}{\partial x'}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2}{3}\mu'\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y'}\left[\mu'\left(\frac{\partial v'_x}{\partial y'}+\frac{\partial v'_y}{\partial x'}\right)\right]\right\}$$

整理得

$$\frac{C_l}{C_v C_t}\rho'\frac{\partial v'_x}{\partial t'}+\rho' v'_x\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\rho' v'_y\frac{\partial v'_x}{\partial y'}=\frac{C_g C_l}{C_v^2}\rho' f'_x-\frac{C_p}{C_\rho C_v^2}\frac{\partial p'}{\partial x'}$$

$$+\frac{C_\mu}{C_\rho C_v C_l}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left[2\mu'\frac{\partial v'_x}{\partial x'}-\frac{2}{3}\mu'\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y'}\left[\mu'\left(\frac{\partial v'_x}{\partial y'}+\frac{\partial v'_y}{\partial x'}\right)\right]\right\} \tag{1-10}$$

3．两相似现象，式（1-10）和式（1-8）的形式应该相同，式（1-10）中由相似常数组合而成的相似指标应等于1，可得

$$\frac{C_l}{C_v C_t}=1 \tag{1-11}$$

$$\frac{C_g C_l}{C_v^2}=1 \tag{1-12}$$

$$\frac{C_p}{C_\rho C_v^2}=1 \tag{1-13}$$

$$\frac{C_\mu}{C_\rho C_v C_l}=1 \tag{1-14}$$

4．将式（1-9）代入式（1-11）至式（1-14）。由式（1-11）整理可得斯特劳哈尔数

$$Sr=\frac{l}{vt} \tag{1-15}$$

由式（1-12）整理可得弗劳德数

$$Fr=\frac{v}{\sqrt{lg}} \tag{1-16}$$

在式（1-13）中，引用比热比 γ 在两个相似现象中是相同的这一关系，$\gamma=\gamma'$，比热比是定压比热 c_p 与定容比热 c_V 之比

$$\gamma=\frac{c_p}{c_V} \tag{1-17}$$

由式（1-13）整理可得马赫数

$$Ma=\frac{v}{a} \tag{1-18}$$

由式（1-14）整理可得雷诺数

$$Re=\frac{\rho vl}{\mu} \tag{1-19}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

699304

例 1-2　由能量方程导出相似准则

解

1．列出方程

$$
\begin{aligned}
&\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}(c_pT)+v_x\frac{\partial}{\partial x}(c_pT)+v_y\frac{\partial}{\partial y}(c_pT)\right]\\
&=\frac{\partial p}{\partial t}+v_x\frac{\partial p}{\partial x}+v_y\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)\\
&\quad+\mu\left\{-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2+2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2\right]\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2\right\}
\end{aligned}
\tag{1-20}
$$

2．列出相似变换式，即相应物理量成比例的关系式

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{l}{l'}=C_l\quad \frac{v_x}{v'_x}=\frac{v_y}{v'_y}=\frac{v}{v'}=C_v\\
&\frac{p}{p'}=C_p\quad \frac{\rho}{\rho'}=C_\rho\quad \frac{\mu}{\mu'}=C_\mu\quad \frac{t}{t'}=C_t\\
&\frac{c_p}{c'_p}=C_{c_p}\quad \frac{T}{T'}=C_T\quad \frac{\lambda}{\lambda'}=C_\lambda
\end{aligned}
\right\}
\tag{1-21}
$$

式（1-21）代入式（1-20）得

$$
\begin{aligned}
&\frac{C_\rho C_{c_p}C_T}{C_t}\rho'\frac{\partial}{\partial t'}(c'_pT')+\frac{C_\rho C_vC_{c_p}C_T}{C_l}\rho'\left[v'_x\frac{\partial}{\partial x'}(c'_pT')+v'_y\frac{\partial}{\partial y'}(c'_pT')\right]\\
&=\frac{C_p}{C_t}\frac{\partial p'}{\partial t'}+\frac{C_vC_p}{C_l}\left(v'_x\frac{\partial p'}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial p'}{\partial y'}\right)\\
&\quad+\frac{C_\lambda C_T}{C_l^2}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\lambda'\frac{\partial T'}{\partial x'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\lambda'\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)\right]\\
&+\frac{C_\mu C_v^2}{C_l^2}\mu'\left\{-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right)^2 2+\left[\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial v'_y}{\partial x'}+\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

整理得

$$
\begin{aligned}
&\frac{C_\rho C_l^2}{C_\mu C_t}\rho'\frac{\partial}{\partial t'}(c'_pT')+\frac{C_\rho C_vC_l}{C_\mu}\rho'\left[v'_x\frac{\partial}{\partial x'}(c'_pT')+v'_y\frac{\partial}{\partial y'}(c'_pT')\right]\\
&=\frac{C_l^2C_p}{C_{c_p}C_\mu C_TC_t}\frac{\partial p'}{\partial t'}+\frac{C_lC_vC_p}{C_{c_p}C_\mu C_T}\left(v'_x\frac{\partial p'}{\partial x'}+v'_y\frac{\partial p'}{\partial y'}\right)\\
&\quad+\frac{C_\lambda}{C_{c_p}C_\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(\lambda'\frac{\partial T'}{\partial x'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\lambda'\frac{\partial T'}{\partial y'}\right)\right]\\
&\quad+\frac{C_v^2}{C_{c_p}C_T}\mu'\left\{-\frac{2}{3}\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}+\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right)^2+2\left[\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'_y}{\partial y'}\right)^2\right]\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{\partial v'_y}{\partial x'}+\frac{\partial v'_x}{\partial y'}\right)^2\right\}
\end{aligned}
$$

3. 令上式中的相似指标等于1，可得

$$\frac{C_\rho C_v C_l}{C_\mu}=1 \tag{1-22}$$

$$\frac{C_\rho C_l C_v}{C_{c_p} C_\mu C_T}=1 \tag{1-23}$$

$$\frac{C_\lambda}{C_{c_p} C_\mu}=1 \tag{1-24}$$

$$\frac{C_v^2}{C_{c_p} C_T}=1 \tag{1-25}$$

4. 将式（1-21）代入式（1-22）～式（1-25）。由式（1-22）整理可得雷诺数即式（1-19）

$$Re=\frac{\rho v l}{\mu}$$

由式（1-23）得比热比即式（1-17）

$$\gamma=\frac{c_p}{c_V}$$

由式（1-24）得普朗特数

$$Pr=\frac{\mu c_p}{\lambda} \tag{1-26}$$

由式（1-25）得马赫数即式（1-18）

$$Ma=\frac{v}{a}$$

1-2 量纲分析

当现象能够用物理方程描述时，可由物理方程导出相似准则，即上节所述的相似变换法。当现象尚不能用物理方程描述时，如何导出相似准则呢？唯一而且有效的方法是通过量纲分析来导出相似准则，称为量纲分析法。

（一）关于量纲的基本知识

物理量，简称为量，是现象、物体或物质的可定性区别和定量确定的一种属性。人们分析了力学现象中各量之间的关系之后发现，力学中绝大多数量之间都存在着联系，由各种物理定律将它们联系在一起，只要适当地选定三个量，即可根据描述各量之间关系的物理定律和定义将其他的量导出。所选定这三个物理量，称为基本物理量，简称基本量。其他物理量称为导出物理量，简称导出量。在科学的所有领域或某一领域，约定地选取的基本量和相应导出量的特定组合，称为量制。作为量制基础的基本量，是人们通过协商统一选定了的，是人们公认的。在国际单位制所采用的量制中，力学的基本量是：长度、质量和时间。涉及热现象时再增加一个基本量：温度。

除现行的国际单位制外，历史上还有过其他单位制，不同国家和地区也有不同的单位制。在一定的单位制中，对最初选定的基本量规定出它们的测量单位，叫做基本单位。导

出量的测量单位叫做导出单位。在国际单位制中与力学、热学有关的基本单位有：长度单位 m，质量单位 kg，时间单位 s，热力学温度单位 K。

测量单位本身也是一个物理量，且与被测物理量属于同一类量。同一类量，是指从物理意义上说可以相加（减）或相互间可比较大小的量。例如，长度用 m或mm 作为单位，而不会用kg 作为单位。数值与单位的乘积，表示了被测物理量的大小（量值），同时单位也表示了被测物理量的种类。用大小不同的同类单位表达一个量，不会改变这个量的种类和（客观上的）量值。例如，将某一量用另外的同类单位表达时，如果这个单位等于原来单位的R^{-1}倍，则新的数值等于原来数值的 R 倍。因此，量的种类和量值，与同类单位的选择无关。

量纲，是物理量的一种表达形式，用来指明物理量的类别，表示各物理量之间的关系。同一类量，具有相同的量纲。例如，某飞机翼展40m，某圆柱体直径 5cm，它们的数值、单位虽不相同，但它们都属于同一类量——长度。长度的量纲用量纲符号 L表示。

量纲与单位，是两个密切相关而又有区别的概念。量纲只涉及量的本质或特点（种类），而单位除涉及量的本质或特点外，还涉及量的大小。为了方便，通常单位仅限于表达定量关系，而用量纲来表达定性关系。

在一定的量制中，量纲又分为基本量纲和导出量纲，与基本单位和导出单位相对应。基本量纲就是该量制中的基本量。在国际单位制所采用的量制中，力学的三个基本量纲是：长度、质量和时间，相应的量纲符号是：L、M 和 T。涉及热现象时，再增加一个基本量纲：热力学温度，相应的量纲符号是：Θ。L、M、T、Θ四个量纲符号均为正体大写，以便与量的符号（斜体）相区别。导出量纲，即导出量的量纲，可通过物理定律或定义用基本量纲表示出来。也就是说，量纲是用量制中的基本量的幂的乘积表示该物理量的表达式

$$\dim q=\mathrm{L}^{c_1}\mathrm{M}^{c_2}\mathrm{T}^{c_3}\Theta^{c_4} \tag{1-27}$$

在物理量q的前面加上符号 dim（正体），表示这个量的量纲。式（1-27）称为量纲式，又称量纲积。c_1、c_2、c_3和c_4，称为量纲指数。式（1-27）中的等号给出量纲之间的相等关系，只表示性属，不涉及量的大小。顺便指出，量纲式中没有加减运算，这是因为加减运算不会产生新的量纲。

在一定的量制中，任一物理量的量纲，都决定于该物理量的物理本质。因此，可通过有关的物理定律或定义，将量纲式中的量纲指数确定出来。例如，在国际单位制所采用的量制中，速度 v 的量纲 $\dim v=\mathrm{LT^{-1}}$，密度 ρ 的量纲 $\dim \rho=\mathrm{L^{-3}M}$，摩擦应力 τ 的量纲 $\dim\ \tau=\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}$，粘性系数$\mu$的量纲借助于牛顿摩擦定律可确定之

$$\dim\mu=\frac{\dim\tau}{\dim(\mathrm{d}v/\mathrm{d}n)}=\frac{\mathrm{L^{-1}MT^{-2}}}{\mathrm{LT^{-1}/L}}=\mathrm{L^{-1}MT^{-1}}$$

空气动力学中常用的有量纲物理量的量纲，列入附录 I 中。从附录 I 中可以看到，同类量具有相同的量纲，但不同类的量有的也具有相同的量纲。量纲相同的量不一定是同类量，例如，热量和力矩是不同类的量，却具有相同的量纲。

一个量的量纲式中，只要有一个量纲指数不为零，则该量为有量纲量；若所有的量纲指数都为零，则为无量纲量。无量纲量可以是两个同类量的比值，也可以是几个有量纲量的乘除组合。无量纲量不是一个单纯的数字，它具有特定的物理意义，具有量的特征和品

质。有量纲量的数值（即与单位的比值）随所选用的单位制不同而改变，而无量纲量的数值不随所选用的单位制不同而改变。量纲分析的目的之一，就是要把有关的物理量正确地组合成完备的无量纲量。

有了量纲式，不难进一步给出基本量的定义。基本量是选定的彼此独立的可作为其他量基础的一组量的名称。“彼此独立”，是指这组量中任何一个量的量纲式，不能以幂次单项式的形式表示为其他各量量纲式的组合。因此，几个基本量本身不可能相互组合成无量纲量。“作为其他量的基础”，是指由这几个基本量的量纲可导出其他量的量纲。“选定的”，是指人为地选择确定的。也就是说，彼此独立可作为其他量基础的基本量不是只有一组。前面谈到，作为量制基础的基本量，是人们在制定量制时统一选定（约定）的。而在某一具体力学问题中，究竟选哪三个量作为基本量，则应视具体问题的条件而定。在下面的内容中读者将会体会到这一点。

（二）物理方程的量纲一致性原理

在正确反映客观规律的物理方程中，相加减的各项的量纲应该是一致的。此即物理方程的量纲一致性原理。这一原理，也是一个基本常识，因为只有同类量才存在相加减的问题。

物理方程中各项的量纲一致，与各个物理量所共同选用的单位制无关。这是物理方程的又一个重要性质。

可根据物理方程的量纲一致性原理来校核物理方程、经验公式的正确性和完整性，量纲不一致的物理方程和经验公式是有错误的或是不完整的。

由于物理方程中各项的量纲相同，所以，只要用其中任一项通除全式各项，就一定能得到各项都是无量纲的方程。这种方法，在空气动力学中有很多应用实例。

量纲一致性原理也可用来确定某些公式中物理量的指数，并可用来建立物理方程。但这些不属于本课程的内容。

（三）Π定理及其意义

1．量纲矩阵和基本物理量的判别　设有一物理现象，其各物理量之间存在函数关系

$$q_0=f(q_1, q_2, \cdots, q_k, q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_n)$$
$$k\leqslant n \tag{1-28}$$

设这些物理量共包括了 k 个基本量纲：G_1、G_2、G_3、…、G_k，则任一物理量 $q_i(i=0, 1, 2, \cdots, k, k+1, k+2, \cdots, n)$ 的量纲可写为

$$\dim q_i = G_1^{c_{1i}} G_2^{c_{2i}} \cdots G_k^{c_{ki}} \tag{1-29}$$

物理量 q_1、q_2、…、q_n 的量纲可写出如下

$$\left.\begin{array}{l} \dim q_1 = G_1^{c_{11}} G_2^{c_{21}} \cdots G_k^{c_{k1}} \\ \dim q_2 = G_1^{c_{12}} G_2^{c_{22}} \cdots G_k^{c_{k2}} \\ \cdots\cdots \\ \dim q_n = G_1^{c_{1n}} G_2^{c_{2n}} \cdots G_k^{c_{kn}} \end{array}\right\} \tag{1-30}$$

通常将上列量纲式中的量纲指数排列成如下形式

$$\begin{array}{c|cccc} & q_1 & q_2 & \cdots & q_n \\ \hline G_1 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ G_2 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_k & c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{array} \tag{1-31}$$

这种排列形式，叫做量纲矩阵。

在q_0、q_1、q_2、…、q_n这群物理量中，有k个基本量纲，也有k个基本量。设q_1、q_2、…、q_n中的前面k个物理量q_1、q_2、…、q_k是基本物理量，它们应同时满足两个条件：

首先，在q_0、q_1、q_2、…、q_n这群物理量中除q_1、q_2、…、q_k以外的任何物理量q_m的量纲式可写成

$$\dim q_m = \dim(q_1^{\lambda_{1m}} q_2^{\lambda_{2m}} \cdots q_k^{\lambda_{km}}) \tag{1-32}$$

式（1-32）中λ_{1m}、λ_{2m}、…、λ_{km}是待定指数（待定常数），$m=0$，$k+1$，$k+2$，…，n。式（1-32）表明，非基本物理量q_m的量纲等于基本物理量某一组合的量纲。

其次，由于被选作基本物理量的k个物理量是相互独立的，它们本身不可能组合成一个无量纲量，故不可能存在下式

$$\dim(q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \cdots q_k^{\beta_k}) = G_1^0 G_2^0 \cdots G_k^0 \tag{1-33}$$

即无论怎样选择指数β_1、β_2、…、β_k，都不能使式（1-33）中等号右侧的量纲指数皆为零。

根据上述的基本物理量性质，即根据基本物理量应同时满足上述两个条件，可导出判定所选的几个物理量是否可作为基本物理量的具体方法。

将式（1-30）代入式（1-32），按相同量纲归并指数后得到的下式应能成立

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}\lambda_{1m} + c_{12}\lambda_{2m} + \cdots + c_{1k}\lambda_{km} = c_{1m} \\ c_{21}\lambda_{2m} + c_{22}\lambda_{2m} + \cdots + c_{2k}\lambda_{km} = c_{2m} \\ \cdots\cdots \\ c_{k1}\lambda_{1m} + c_{k2}\lambda_{2m} + \cdots + c_{kk}\lambda_{km} = c_{km} \end{array}\right\} \tag{1-34}$$

上式成立，λ_{1m}、λ_{2m}、…、λ_{km}存在解的必要充分条件是

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & & c_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{1-35}$$

式（1-35）中的行列式是量纲矩阵中阶数最高的方阵，此阶数即量纲矩阵的秩。基本物理量的个数与量纲矩阵的秩必相等。

将式（1-30）代入式（1-33），按相同量纲归并指数后得

$$\left.\begin{array}{l} c_{11}\beta_1 + c_{12}\beta_2 + \cdots + c_{1k}\beta_k = 0 \\ c_{21}\beta_1 + c_{22}\beta_2 + \cdots + c_{2k}\beta_k = 0 \\ \cdots\cdots \\ c_{k1}\beta_1 + c_{k2}\beta_2 + \cdots + c_{kk}\beta_k = 0 \end{array}\right\} \tag{1-36}$$

如果式（1-35）成立，则式（1-36）只存在各β的零解。故式（1-35）也是式（1-33）不能成立的条件。

由上可知，式（1-35）存在，是式（1-32）成立同时式（1-33）不成立的必要充分条件。也就是说，式（1-35）是q_1、q_2、…、q_k可作为基本物理量的必要充分条件。例如，

有一群物理量ρ、v、l和μ，其量纲分别为

$$
\begin{aligned}
&\dim \rho = \mathrm{L}^{-3}\mathrm{M}\\
&\dim v = \mathrm{L}\mathrm{T}^{-1}\\
&\dim l = \mathrm{L}\\
&\dim \mu = \mathrm{L}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{T}^{-1}
\end{aligned}
$$

将其排列为量纲矩阵

	ρ	v	l	μ
L	-3	1	1	-1
M	1	0	0	1
T	0	-1	0	-1

在这个量纲矩阵中，ρ、v、l三个物理量的行列式

$$
\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0
$$

即式（1-35）成立，故该行列式的阶数为量纲矩阵的秩。由此可判定ρ、v、l三个物理量可作为ρ、v、l和μ这群物理量的基本物理量。

在一群物理量中符合基本物理量条件的物理量可能不止一组。在空气动力学中，通常选空气密度ρ、流速v和物体的特征长度（如机翼的平均气动弦长等）作为基本物理量。涉及热现象时再增加一个基本物理量，通常选为定压比热c_p。这样，共四个基本物理量。对于绝大多数力学问题，有三个基本量纲同时有三个基本物理量，$k=3$，涉及热现象时$k=4$。但在有些力学问题中，基本物理量只能取二个，这取决于量纲矩阵的秩。

2．Π定理　设有一群有量纲量，其中q_0与q_1、q_2、…、q_n之间存在函数关系

$$
q_0 = f(q_1, q_2, \cdots, q_k, q_{k+1}, \cdots, q_n) \qquad k \ll n \tag{1-37}
$$

并设q_1、q_2、…、q_k是在这群量中选定的基本量，其他是导出量。

现将基本量q_1、q_2、…、q_k的单位分别改变为原来的$1/a_1$、$1/a_2$、…、$1/a_n$，则在新单位制中各量变为

$$
\left.
\begin{aligned}
&q'_1 = a_1 q_1\\
&q'_2 = a_2 q_2\\
&\cdots\cdots\\
&q'_k = a_k q_k\\
&q'_{k+1} = a_1^{\lambda_{1(k+1)}} a_2^{\lambda_{2(k+1)}} \cdots a_k^{\lambda_{k(k+1)}}\, q_{k+1}\\
&\cdots\cdots\\
&q'_n = a_1^{\lambda_{1n}} a_2^{\lambda_{2n}} \cdots a_k^{\lambda_{kn}} q_n\\
&q'_0 = a_1^{\lambda_{10}} a_2^{\lambda_{20}} \cdots a_k^{\lambda_{k0}} q_0
\end{aligned}
\right\} \tag{1-38}
$$

由于单位的改变不会改变各量的物理本质，不会影响各量间物理关系的存在，故

$$
q'_0 = f(q'_1, q'_2, \cdots, q'_k, q'_{k+1}, \cdots, q'_n) \qquad k \leqslant n \tag{1-39}
$$

a_1、a_2、…、a_k可任意选定，若令

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com