奥赛物理试题选

AOSAI WULI SHITI XUAN

舒幼生 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

奥赛物理试题选

舒幼生　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

奥赛物理试题选/舒幼生编著. —北京：北京大学出版社，2017.7

ISBN 978-7-301-28501-5

Ⅰ.①奥…　Ⅱ.①舒…　Ⅲ.①中学物理课—高中—习题集　Ⅳ.①G634.75

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第153749号

书　　名	奥赛物理试题选 AOSAI WULI SHITIXUAN
著作责任者	舒幼生　编著
责任编辑	顾卫宇
标准书号	ISBN 978-7-301-28501-5
出版发行	北京大学出版社
地　　址	北京市海淀区成府路205号　100871
网　　址	http://www.pup.cn
电子信箱	zpup@pup.cn
新浪微博	@北京大学出版社
电　　话	邮购部62752015　发行部62750672　编辑部62754271
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	787毫米×1092毫米　16开本　23.5印张　585千字
	2017年7月第1版　2017年7月第1次印刷
定　　价	49.00元

前　　言

多年前开始参与假期物理竞赛辅导班讲座工作。开班前常将课前准备的大多数题目复印成册，发给每一位学生待课后练习。为提高学生考场应试能力，课前准备一份试题，课间组织一次听课学生间的联谊赛，组织阅卷、评奖后，举行颁奖仪式，活跃讲座氛围。这两部分内容，分别构成“假期辅导班题选”和“假期辅导班联谊赛试题”，合成一本书《奥赛物理题选》，由北京大学出版社于 2013 年 6 月出版。

早先，经教育部首肯，各大学渐渐兴起自主招生热潮。此举对大学选招具有学科特长的本科生利多弊少，已被教学界多数舆论所认可。自然界的物种会进化，自主招生也会有进步。进步中派生出了例如物理类的夏令营、科学营、金秋营、冬令营等品牌性的各类选优活动。活动中也有考试，试题内容、结构与难度属于奥赛物理试题范畴。

近年，北大曾承担国家物理奥赛集训队的培训，以及选拔国际赛、亚洲赛代表队的工作。其中选拔考试的试题内容、结构与难度更应属于奥赛物理试题范畴。

现将原《奥赛物理题选》（第二版）内，试题性的“假期辅导班联谊赛试题”从中取出。余下原练习题性的“假期辅导班题选”，单一构成《奥赛物理题选》（第三版）书。

再将 2009～2016 年的全部联谊赛试题，组合成新的“假期辅导班联谊赛试题”。又从物理科学营、金秋营、集训队选拔考试中，适当地选出若干试题，组合成“择优选拔考试试题选”。将这两部分合成新书《奥赛物理试题选》，交由北京大学出版社出版。

舒幼生

2017 年 5 月

目　　录

第一部分

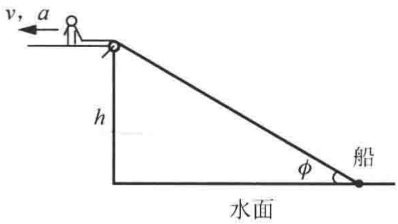
假期辅导班联谊赛试题

2008 年 1 月寒假班试题

总分：140 分　　时间：3 小时

一、(15 分)

人在岸上用轻绳拉小船，如图所示. 岸高 h、船质量 m，绳与水面夹角为 ϕ 时，人左行速度和加速度为 v 和 a.



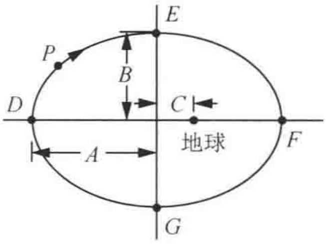
(1) 不计水的水平阻力，假设船未离开水面，试求人施于绳端力提供的功率 P.

(2) 若 $a=0$，$v=v_0$(常量)，ϕ 从较小倾角开始，达何值时，船有离开水面趋势？

二、(15 分)

如图所示，航天飞机 P 开始时沿 $A\neq B$ 的椭圆轨道绕地球巡航.

(1) P 在轨道任一位置均可通过短时间点火喷气来改变速度大小和方向，使其进入圆轨道航行. 规定将速率增大简称为“加速”，将速率减小简称为“减速”. 试问 P 在图中哪些位置需要通过点火喷气“加速”进入圆轨道，在哪些位置需要通过点火喷气“减速”进入圆轨道？为什么？



(2) 再设航天飞机主体携带一个太空探测器在偏心率 $e=\sqrt{3}/2$(偏心率 $e=C/A$，C 为椭圆半焦距，A 为椭圆半长轴)的椭圆轨道上航行到图中 D 位置时，因为朝后发射探测器而使航天飞机主体进入圆轨道航行，探测器相对地球恰好沿抛物线轨道远去，试求航天飞机主体质量 m_1 与探测器质量 m_2 的比值 γ ($\gamma=m_1:m_2$).

三、(20 分)

在两块相距为 h，水平放置的大平板之间的空隙中充满空气. 下板温度 T_1 维持不变，上板温度 T_2 ($T_2<T_1$) 也维持不变. 可以认为空气是理想气体，假设板间空气层中出现了对流，对流中上升气团经历的过程为绝热过程，未发生对流的区域中温度按线性规律分布，试确定温差量 T_1-T_2 的取值范围. 空气的(平均)摩尔质量 μ 和摩尔定容热容量 $C_{V,\mathrm{m}}$ 设为已知量.

——富阳中学王栩老师提供

四、(20 分)

由恒压电源 V_0 和电阻构成的直流电路以及将要讨论的相关电压量，已在图 1 中示出.

(1) 试证电压 V_{n+1}，V_n 和 V_{n-1} 之间有下述关系：

$$V_{n+1}-2V_n+V_{n-1}=\left(\frac{R_A}{R_B}\right)V_n.$$

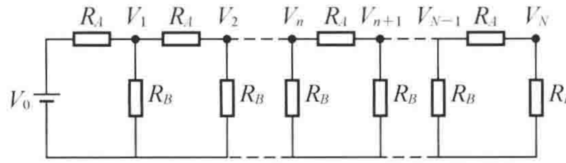


图 1

(2) 从图 1 中可以看 V_n 应随 n 的增大而递减，因此可尝试检查 $V_n=V_0e^{-n\alpha}$ 是否满足(1)问中的关系式. 若是，求出 α 值.

(3) 唾腺或肾小管的单层上皮细胞的结构如图 2 所示. 单一细胞的电阻为 R_B，两相邻细胞间的接触面电阻为 R_A，细胞截面的形状约为每边长 $10\mu m$ 的正方形. 用电极在第一个细胞和其外的细胞液之间施加电压 $V_0=30mV$，然后依次测量各个细胞和其外细胞液之间的电压 $V(x)$，所得对数实验曲线如图 3 所示. 据此，求出 R_A 对 R_B 的比值.

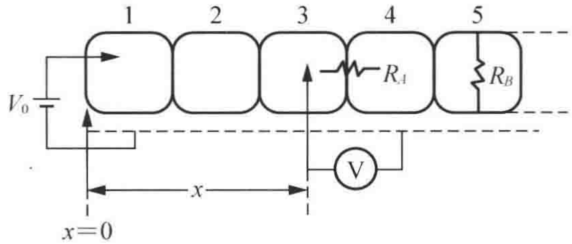


图 2

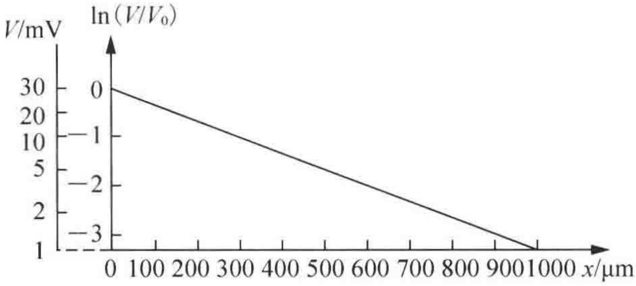
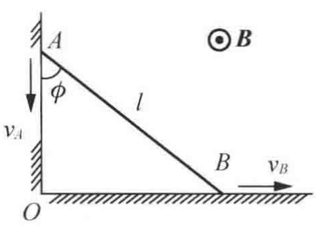


图 3

五、(25 分)

长 l、电阻 R 的匀质细杆，其 A 端约束在竖直光滑轨道上运动，B 端约束在水平光滑轨道上运动，导轨电阻可略. 设空间有如图所示方向的匀强磁场，开始时细杆方位角 $\phi=0$. 细杆从静止状态开始自由释放后，随即滑倒，方位角达到 ϕ 时，A 端下行速度大小测得为 v_A.



(1) 求出细杆 A，B 端之间的电动势 $\mathscr{E}_{AB}$ 大小，并确定哪端电势高.

(2) 验证此时安培力提供的负功率大小，恰好等于细杆电阻消耗的电功率.

(3) 计算 $\phi=45°$时，细杆转动角加速度 β.

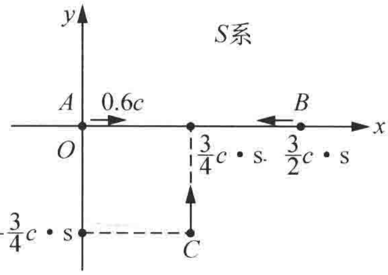
六、(20 分)

在内半径为 r、外半径为 R 的中空柱形玻璃管(壁厚即为 $R-r$)中装满一种发光液体. 对于所发出的光，玻璃的折射率为 n_1，液体的折射率为 n_2. 假设除了液体发出的光之外，

液体外或者说管外还存在其他光源发出的“背景光”，“背景光”远弱于液体所发出的光，但单独存在时，却不可忽略. 今从远处正面看玻璃管，管壁厚度像是零，试问此时 r/R 须满足什么条件？

七、(25 分)

惯性系 S 中三个静质量同为 m_0 的质点 A，B，C，某时刻的位置和匀速度或匀速度方向如图所示. 在 S 系中 A，B，C 将在 $\left(\frac{3}{4}c\cdot\mathrm{s},\ 0\right)$ 处碰撞，碰撞过程中无任何形式的能量释放，且碰后成为一个新质点，记作 P.



（1）在 S 系中试求 P 的质量 M 和速度大小 u.

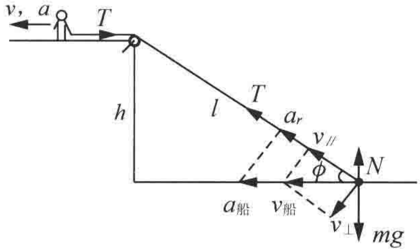
（2）质点 A 在图示位置时，认为质点 C 与其相距多远？

（3）设置相对 S 系沿 x 轴以 $0.6c$ 匀速运动的 S'系和相对 S 系沿 x 轴负方向以 $0.6c$ 匀速运动的 S''系，计算 P 在 S'系和 S''系中的质量 M' 和 M''.

解答与评分标准（参考）

一、(15 分)

参考题解图，$\boldsymbol{v}_{船}$ 分解为 $v_{/\!/}$ 和 $v_{\perp}$，$\boldsymbol{a}_{船}$ 沿绳方向分量记为 a_r，绳中张力大小记为 T.



题解图

（1）人对绳的拉力水平，大小也为 T，故所求功率为

$$P=Tv. \qquad (2\text{ 分})$$

船在水平方向的动力学方程为

$$T\cos\phi=ma_{船}=ma_r/\cos\phi. \qquad (2\text{ 分})$$

由运动关联方程

$$a_r=\frac{\mathrm{d}v_{/\!/}}{\mathrm{d}t}+\frac{v_{\perp}^2}{l},$$

$$v_{/\!/}=v,\ \frac{\mathrm{d}v_{/\!/}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=a,$$

$$v_{\perp}=v_{/\!/}\tan\phi=v\tan\phi,\ l=h/\sin\phi,$$

得

$$a_r = a + \frac{v^2}{h}\sin\phi\ \tan^2\phi,\quad T = \frac{m}{\cos^2\phi}\left(a + \frac{v^2}{h}\sin\phi\ \tan^2\phi\right),$$

所求量便为

$$P = Tv = \frac{mv}{\cos^2\phi}\left(a + \frac{v^2}{h}\sin\phi\ \tan^2\phi\right).\qquad (5\text{ 分})$$

(2) 船在竖直方向无运动，应有

$$N = mg - T\sin\phi,\qquad (2\text{ 分})$$

$a=0$，$v=v_0$ 对应

$$N = mg - \frac{mv_0^2}{h}\tan^4\phi,\qquad (2\text{ 分})$$

可见 N 随 ϕ 增大而减小. 船有离开水面趋势时，应有 $N=0$，倾角便为

$$\phi = \arctan\sqrt[4]{gh/v_0^2}.\qquad (2\text{ 分})$$

二、(15 分)

(1) 椭圆轨道能量

$$E = -GMm/2A,\qquad (2\text{ 分})$$

式中 M，m 分别为地球、航天飞机质量. P 在与地球相距 r 处进入圆轨道，轨道能量为

$$E_r = -GMm/2r.$$

点火喷气前、后，P 在 r 处势能相同，可得下述结论.

$r>A$ 区域(题图中 E，G 两点左侧区域)各位置处：

因 $E_r>E_A$，r 处圆轨道动能必须大于 r 处原椭圆轨道动能，故为

需要“加速”区域；　(2 分)

$r<A$ 区域(题图中 E，G 两点右侧区域)各位置处：

因 $E_r<E_A$，r 处圆轨道动能必须小于 r 处原椭圆轨道动能，故为

需要“减速”区域.　(2 分)

题图中 E，G 两处为“加速”、“减速”区域转换点.

(2) 在 D 处航天飞机主体和探测器原速度大小同为

$$v_0 = \frac{A-C}{B}\sqrt{\frac{GM}{A}}.\qquad (2\text{ 分})$$

主体与探测器分离时各自的速度大小分别记为 v_1 与 v_2，则应有

$$\text{圆运动},\quad \Rightarrow\quad v_1 = \sqrt{GM/(A+C)},$$

$$\text{抛物线轨道运动},\ \frac{1}{2}m_2v_2^2 - G\frac{Mm_2}{A+C} = 0,\quad \Rightarrow\quad v_2 = \sqrt{2GM/(A+C)}.\qquad (2\text{ 分})$$

由分离过程动量守恒方程

$$m_1v_1 - m_2v_2 = (m_1+m_2)v_0,\quad m_1 = \gamma m_2,\qquad (2\text{ 分})$$

得

$$\gamma = (v_2+v_0)/(v_1-v_0),$$

即

$$\gamma=\frac{\sqrt{\dfrac{2}{A+C}}+\dfrac{A-C}{B\sqrt{A}}}{\sqrt{\dfrac{1}{A+C}}-\dfrac{A-C}{B\sqrt{A}}},$$

由 $e=\sqrt{3}/2$，得

$$C=\frac{\sqrt{3}}{2}A，\ B=\frac{1}{2}A；或\ A=2B，\ C=\sqrt{3}B，$$

代入上式，得

$$\gamma=\frac{2+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=2.808. \qquad (3\text{ 分})$$

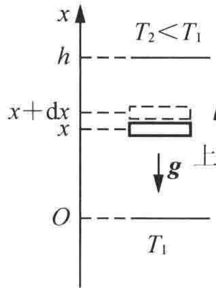
三、(20 分)

如题解图所示，设置竖直向上的 x 轴，对流中上升气团处于 x 位置处的密度记为 $\rho(x)$，压强记为 $p(x)$，温度记为 $T(x)$. $\mathrm{d}x$ 薄层压强随 x 的增量为

$$\mathrm{d}p=-\rho(x)g\,\mathrm{d}x. \qquad (3\text{ 分})$$

据题文，气团上升的过程按绝热过程处理，有

$$p^{1-\gamma}T^{\gamma}=常量. \qquad (2\text{ 分})$$



题解图

将 $T(x)$ 随 x 的增量记为 $\mathrm{d}T$，则有

$$p^{1-\gamma}T^{\gamma}=(p+\mathrm{d}p)^{1-\gamma}(T+\mathrm{d}T)^{\gamma}=p^{1-\gamma}\left(1+\frac{\mathrm{d}p}{p}\right)^{1-\gamma}T^{\gamma}\left(1+\frac{\mathrm{d}T}{T}\right)^{\gamma}$$

$$=p^{1-\gamma}T^{\gamma}\left[1+(1-\gamma)\frac{\mathrm{d}p}{p}\right]\left[1+\gamma\frac{\mathrm{d}T}{T}\right],$$

$$\Rightarrow\quad 1+(1-\gamma)\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{1}{1+\gamma\dfrac{\mathrm{d}T}{T}}=1-\gamma\frac{\mathrm{d}T}{T},$$

$$\Rightarrow\quad \gamma\frac{\mathrm{d}T}{T}=(\gamma-1)\frac{\mathrm{d}p}{p}=-(\gamma-1)\frac{\rho g\,\mathrm{d}x}{p}.$$

将

$$p=\frac{\rho}{\mu}RT,\quad\Rightarrow\quad \frac{\rho}{p}=\mu/RT$$

代入，得

$$\gamma\frac{\mathrm{d}T}{T}=-(\gamma-1)\frac{\mu g\,\mathrm{d}x}{RT},\quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}T=\frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{\mu g}{R}\mathrm{d}x. \qquad (4\text{ 分})$$

将

$$\gamma=\frac{C_{V,\mathrm{m}}+R}{C_{V,\mathrm{m}}},\quad\Rightarrow\quad 1-\gamma=\frac{-R}{C_{V,\mathrm{m}}} \qquad (2\text{ 分})$$

代入，得

$$\mathrm{d}T=-\frac{\mu g}{C_{V,\mathrm{m}}+R}\mathrm{d}x.$$

若要使对流发生，只需要微扰后上升气团所受浮力大于所受重力，即只需其密度

$$\rho(x)=p(x)\mu/RT(x)$$

小于周围气体密度，即

$$\rho(x)<\rho_0(x)=p_0(x)\mu/RT_0(x). \quad (3\text{ 分})$$

因

$$p(x)=p_0(x), \quad (1\text{ 分})$$

故要求

$$T(x)>T_0(x).$$

因

$$T(x=0)=T_0(x=0)>T_1,$$

故要求而后恒有

$$\mathrm{d}T(x)>\mathrm{d}T_0(x)=\frac{T_2-T_1}{h}\mathrm{d}x$$

(注意，$\mathrm{d}T$，$\mathrm{d}T_0$均取负)，即

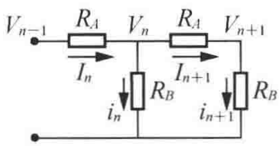
$$-\frac{\mu g}{C_{V,\mathrm{m}}+R}\mathrm{d}x>\frac{T_2-T_1}{h}\mathrm{d}x=-\frac{T_1-T_2}{h}\mathrm{d}x.$$

故发生对流的条件为温差量取值范围如下：

$$T_1-T_2>\mu gh/(C_{V,\mathrm{m}}+R). \quad (5\text{ 分})$$

四、(20 分)

(1) 参考题解图，有



题解图

$$I_n=i_n+I_{n+1},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_{n-1}-V_n}{R_A}=\frac{V_n-0}{R_B}+\frac{V_n-V_{n+1}}{R_A},$$

即得

$$V_{n+1}-2V_n+V_{n-1}=\left(\frac{R_A}{R_B}\right)V_n. \quad (5\text{ 分})$$

(2) 将 $V_n=V_0\mathrm{e}^{-n\alpha}$代入上式，得

$$V_0\mathrm{e}^{-(n+1)\alpha}-2V_0\mathrm{e}^{-n\alpha}+V_0\mathrm{e}^{-(n-1)\alpha}=\left(\frac{R_A}{R_B}\right)V_0\mathrm{e}^{-n\alpha},$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\alpha}+\mathrm{e}^{-\alpha}=2+\frac{R_A}{R_B},$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\alpha}=\frac{1}{2}\left[\left(2+\frac{R_A}{R_B}\right)\pm\sqrt{\left(2+\frac{R_A}{R_B}\right)^2-4}\right].$$

因 α 需为正值，$\mathrm{e}^{\alpha}>1$，故应取＋号，得

$$\alpha=\ln\left\{\frac{1}{2}\left[\left(2+\frac{R_A}{R_B}\right)+\sqrt{\left(2+\frac{R_A}{R_B}\right)^2-4}\right]\right\}. \quad (6\text{ 分})$$

(3) 题文中图 3 所示 $\ln\left(\frac{V}{V_0}\right)\sim x$ 曲线为一直线，故得

$$\left(\ln\frac{V(x)}{V_0}-0\right)\Big/(x-0)=\left(\ln\frac{1}{V_0}-0\right)\Big/(1000-0),$$

$$\Rightarrow \quad V(x)=V_0 e^{-\left(\frac{\ln V_0}{1000}\right)x}.$$

又因题文图 2 中电路结构与图 1 相同，故第 n 个细胞的电压应为

$$V_n=V_0 e^{-n\alpha},\quad n=\frac{x}{10},$$

即得

$$V_n=V(x)\big|_{x=10n}=V_0 e^{-\left(\frac{\ln V_0}{1000}\right)\cdot 10n}=V_0 e^{-\left(\frac{\ln V_0}{100}\right)\cdot n},$$
$$\Rightarrow \quad \alpha=\ln V_0/100=\ln 30/100=0.034.$$

将其代入 $e^{\alpha}+e^{-\alpha}=2+\dfrac{R_A}{R_B}$，得

$$\frac{R_A}{R_B}=e^{\alpha}+e^{-\alpha}-2=1.2\times10^{-3}. \qquad (9\text{ 分})$$

五、(25 分)

(1) 取 $ABOA$ 回路，垂直图平面朝里的磁通量为

$$\Phi=-B\cdot\frac{1}{2}(l\cos\phi)(l\sin\phi)=-\frac{1}{4}Bl^2\sin 2\phi,$$

即有

$$\mathscr{E}_{AB}=\mathscr{E}_{ABOA}=-\frac{d\Phi}{dt}=\frac{1}{2}Bl^2\cos 2\phi\cdot\omega,\quad \omega=\frac{d\phi}{dt}.$$

由刚体平面平行运动知识，导得

$$v_A=(l\sin\phi)\omega,\qquad \Rightarrow \quad \omega=v_A/l\sin\phi,$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{E}_{AB}=\frac{1}{2}Blv_A\cos 2\phi/\sin\phi \quad \begin{cases}>0, & 当\ 45^\circ>\phi>0,\\ =0, & 当\ \phi=45^\circ,\\ <0, & 当\ 90^\circ>\phi>45^\circ.\end{cases} \qquad (6\text{ 分})$$

(2) A 到 B 的电流

$$I_{AB}=\frac{\mathscr{E}_{AB}}{R}=\frac{Bl}{2R}v_A\frac{\cos 2\phi}{\sin\phi}\quad \begin{cases}I_{AB}>0：电流从\ A\ 到\ B,\\ I_{AB}=0：电流为零,\\ I_{AB}<0：电流从\ B\ 到\ A.\end{cases}$$

AB 杆所受安培力 $\boldsymbol{F}$，其正方向的方向矢量 $\boldsymbol{e}$ 如题解图所示，有

$$\boldsymbol{F}=F\boldsymbol{e},\quad F=I_{AB}Bl=\frac{B^2l^2}{2R}v_A\frac{\cos 2\phi}{\sin\phi},$$

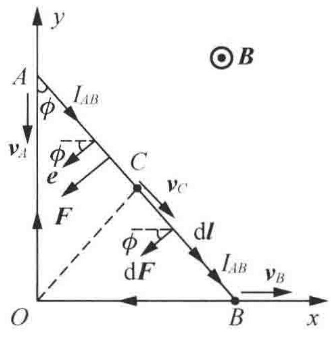
$$F_x=-F\cos\phi,\quad F_y=-F\sin\phi.$$

AB 杆中 $d\boldsymbol{l}$ 段所受安培力为

$$d\boldsymbol{F}=dF\boldsymbol{e}=I_{AB}B\,dl\,\boldsymbol{e},$$

dl 段的速度记为 $\boldsymbol{v}_{dl}$，则 $d\boldsymbol{F}$ 提供的功率为

$$dP=d\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_{dl}=I_{AB}B\,dl\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_{dl},$$



题解图

引入质量线密度常量 λ，dl 段质量为 $dm=\lambda dl$，则有

$$dP=\frac{1}{\lambda}I_{AB}B\,dm\,\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_{dl}=\frac{1}{\lambda}I_{AB}B\boldsymbol{e}\cdot(dm\boldsymbol{v}_{dl}).$$

安培力 $\boldsymbol{F}$ 为 AB 段提供的总功率为

$$P_F=\int_l \mathrm{d}P=\frac{1}{\lambda}I_{AB}B\boldsymbol{e}\cdot\int_0^l \mathrm{d}m\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}l}.$$

因

$$\int_0^l \mathrm{d}m\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}l}=m\boldsymbol{v}_C,\qquad m=\lambda l\text{：细杆质量，}\boldsymbol{v}_C\text{：质心速度}$$

便得

$$P_F=\frac{m}{\lambda}I_{AB}B\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_C=lI_{AB}B\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}_C,$$

即安培力提供的功率等效于安培力全部作用于质心 C 处，为质心提供的功率.

因

$$\boldsymbol{v}_C=v_{Cx}\boldsymbol{i}+v_{Cy}\boldsymbol{j},\qquad \begin{cases} v_{Cx}=\dfrac{1}{2}v_B=\dfrac{1}{2}v_A\dfrac{\cos\phi}{\sin\phi},\\ v_{Cy}=-\dfrac{1}{2}v_A,\text{（注意 }v_A>0\text{）}\end{cases}$$

得

$$\begin{aligned}P_F&=F_xv_{Cx}+F_yv_{Cy}=-F\cos\phi\cdot\frac{1}{2}v_A\frac{\cos\phi}{\sin\phi}+F\sin\phi\cdot\frac{1}{2}v_A\\&=-\frac{1}{2}Fv_A\left(\frac{\cos^2\phi}{\sin\phi}-\sin\phi\right)=-\frac{1}{2}Fv_A\cos2\phi/\sin\phi.\end{aligned}$$

将 F 表述式代入，得

$$P_F=-\frac{B^2l^2}{4R}v_A^2\frac{\cos^2 2\phi}{\sin^2\phi}.$$

又：细杆电阻消耗的电功率为

$$P_I=I_{AB}^2R=\frac{B^2l^2}{4R}v_A^2\frac{\cos^2 2\phi}{\sin^2\phi}=-P_F,\tag{10 分}$$

即安培力提供的负功率大小，恰好等于细杆电阻消耗的电功率.

(3) 因导轨法向作用力(未知量)对质心力矩不为零，故不采用质心转轴转动定理求解 β，改用能量方法导出 β 满足的关系式.

ϕ 角位置时，细杆动能为

$$E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}I_M\omega^2=\frac{1}{6}ml^2\omega^2,\qquad\text{（瞬时轴 }I_M=\frac{1}{3}ml^2\text{）}$$

$t\sim t+\mathrm{d}t$ 时间间隔对应 $\phi\sim\phi+\mathrm{d}\phi$，有

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k}=\frac{1}{3}ml^2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\frac{1}{3}ml^2\beta\mathrm{d}\phi.\qquad(\omega\mathrm{d}t=\mathrm{d}\phi)$$

重力势能减少量　$-\mathrm{d}W_g=\mathrm{d}\left[mg\dfrac{l}{2}(1-\cos\phi)\right]=mg\dfrac{l}{2}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi.$

电阻上消耗能量　$\mathrm{d}W_I=P_I\mathrm{d}t=\dfrac{B^2l^2}{4R}v_A^2\dfrac{\cos^2 2\phi}{\sin^2\phi}\mathrm{d}t\qquad(v_A=\omega l\sin\phi)$

$$=\frac{B^2l^2}{4R}\omega^2l^2\cos^2 2\phi\cdot\mathrm{d}t\qquad(\omega\mathrm{d}t=\mathrm{d}\phi)$$

$$=\frac{B^2l^4}{4R}\omega\cos^2 2\phi \cdot \mathrm{d}\phi.$$

由功能关系

$$\mathrm{d}E_\mathrm{k}=-\mathrm{d}W_g-\mathrm{d}W_I,$$

得

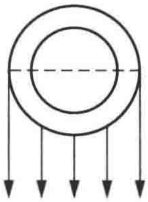
$$\frac{1}{3}ml^2\beta=mg\ \frac{l}{2}\sin\phi-\frac{B^2l^4}{4R}\omega\ \cos^2 2\phi,$$

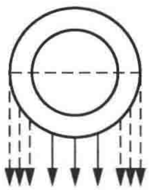
$\phi=45°$时，$\cos^2 2\phi=0$，即得

$$\beta=\frac{3g}{2l}\sin\phi=\frac{3\sqrt{2}}{4l}g. \quad (9\text{ 分})$$

六、(20 分)

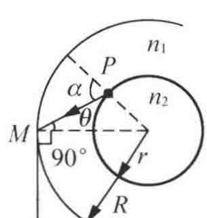
液体发出的光经玻璃两次折射后射出. 从远处看，只能接收平行光线. 正面看，管的厚度消失，意味着经管的外表面射向远处的平行光线已占据玻璃管外直径的全部区域，如题解图 1 所示. 否则如题解图 2 所示，用虚线代表的源自其他光源发出的“背景光”，尽管较弱，却不可忽略，仍会在视觉上产生有部分管壁“厚度”的感觉. (2 分)


题解图 1


题解图 2

管壁厚度消失时，表面 M 点出射光中必须存在切向光线 MN，如题解图 3 所示，管壁中对应的光线为 PM. 因 PM 光线对应的外折射角趋于 90°，故 PM 入射光线对应的入射角 $\theta\to$全反射临界角 θ_c，即有

$$\sin\theta\to\sin\theta_c=\frac{1}{n_1}. \quad (3\text{ 分})$$



题解图 3

PM 光线是从液体表面 P 点射出的，对应的从液体到玻璃的折射角为 α. 据正弦定理有

$$\frac{r}{\sin\theta}=\frac{R}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{R}{\sin\alpha},$$

得

$$\sin\alpha=\frac{R}{r}\sin\theta, \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{r}\sin\theta_c=\frac{R}{n_1 r}.$$

因 $\sin\alpha\leqslant 1$，故要求

$$\frac{r}{R}\geqslant\frac{1}{n_1}. \quad (1)$$

P 是液体与玻璃间折射点，α 为折射角，对应的入射角记为 i(题解图 3 中未画出)，则有

$$n_2\sin i=n_1\sin\alpha. \quad (7\text{ 分})$$

（ⅰ）若 $n_1 \leqslant n_2$，则

$$\sin i=\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha \geqslant \frac{n_1}{n_2}\frac{R}{n_1 r}=\frac{R}{n_2 r}.$$

为使 $i(i\leqslant 90^\circ)$有解，要求

$$\frac{r}{R}\geqslant\frac{1}{n_2}. \tag{2}$$

在 $n_1\leqslant n_2$ 时，为使(1)、(2)式都成立，要求

$$\frac{r}{R}\geqslant\frac{1}{n_1}. \qquad (4 分)$$

（ⅱ）若 $n_1\geqslant n_2$，则

$$\sin i=\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha，\ i\leqslant 90^\circ，$$

$$\Rightarrow\quad \sin\alpha\leqslant\frac{n_2}{n_1}，\quad\Rightarrow\quad \frac{R}{n_1 r}\leqslant\frac{n_2}{n_1}，$$

即要求

$$\frac{r}{R}\geqslant\frac{1}{n_2}， \tag{3}$$

在 $n_1\geqslant n_2$ 时，为使(1)、(3)式都成立，要求

$$\frac{r}{R}\geqslant\frac{1}{n_2}. \qquad (4 分)$$

综上所述，$\frac{r}{R}$须满足的条件为

$$\frac{r}{R}\begin{cases}\geqslant\dfrac{1}{n_1}，& 当\ n_1\leqslant n_2，\\[2ex] \geqslant\dfrac{1}{n_2}，& 当\ n_1\geqslant n_2.\end{cases}$$

七、(25 分)

(1) S 系中很易判定，B，C 速度大小与 A 速度大小相同，均为 $0.6c$，有

$$m_A=m_B=m_C=\left.\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\right|_{\beta=0.6}=\frac{5}{4}m_0. \qquad (3 分)$$

将碰撞后形成的大质点质量记为 M，则由动量守恒方程和能量守恒方程

$$Mu=m_C u_{Cy}\big|_{u_{Cy}=0.6c}，\ Mc^2=(m_A+m_B+m_C)c^2， \qquad (4 分)$$

解得

$$u=\frac{1}{5}c. \qquad (2 分)$$