GEOMETRY TREASURE

500 FAMOUS QUESTIONS AND 1000 THEOREMS IN PLANE GEOMETRY

几何瑰宝

平面几何500名题暨1000条定理

（上）

沈文选 杨清桃 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

GEOMETRY TREASURE

500 FAMOUS QUESTIONS AND 1000 THEOREMS IN PLANE GEOMETRY

几何瑰宝

平面几何500名题暨1000条定理（上）

沈文选 杨清桃 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书共有三角形、几何变换，三角形、圆，四边形、圆，多边形、圆，以及最值，作图，轨迹，完全四边形，平面闭折线，圆的推广十个专题，对平面几何中的500余颗璀璨夺目的珍珠进行了系统地、全方位地介绍，其中也包括了近年来我国广大初等几何研究者的丰硕成果.

本书中的1 000余条定理可以广阔地拓展读者的视野，极大地丰厚读者的几何知识，可以多途径地引领数学爱好者进行平面几何学的奇异旅游，欣赏平面几何中的精巧、深刻、迷人、有趣的历史名题及最新成果.

该书适合于广大数学爱好者及初、高中数学竞赛选手，初、高中数学教师和数学奥林匹克教练员使用，也可作为高等师范院校数学专业开设“竞赛数学”，“中学几何研究”等课程的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

几何瑰宝：平面几何500名题暨1000条定理.上/沈文选，杨清桃编著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2010.7

ISBN 978-7-5603-3012-9

Ⅰ.①几… Ⅱ.①沈…②杨… Ⅲ.①平面几何-习题②平面几何-定理(数学) Ⅳ.①O123.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第078574号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　唐　蕾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张73.25　字数1 315千字
版　　次　2010年7月第1版　2010年7月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3012-9
印　　数　1~3 000册
定　　价　138.00元(上,下)

前　言

几何,在数学及数学教育中占有举足轻重的地位.历史上,数学首先以几何学的形式出现.现实中,几何不仅是对我们所生活的空间进行了解、描述或解释的一种工具,而且是我们认识绝对真理而进行的直观可视性教育的合适学科,是训练思维、开发智力、进行素质教育不可缺少的学习内容.

如果说数学博大精深、靓丽多姿、光彩照人,那么就可以说几何学源远流长、魅力无限、引人入胜.几何学提出的问题透发出一个又一个重要的数学观念和有力的方法,如几何学中三大作图问题对数学的发展所产生的无法估量的作用.几何学的方法和代数的、分析的、组合的方法相辅相成,扩展着人类对数与形的认识.几何学能够同时给学习者生动直观的图像和严谨的逻辑结构,这非常有利于大脑左右两个半球潜力的挖掘,有利于提高学习效率,完善智力发展.如果把数学比做巍峨的宫殿,那么

平面几何恰似这宫殿门前五彩缤纷的花坛和晶莹夺目的喷泉所组成的园林，这迷人的园林会吸引更多的人来了解数学、学习数学、研究数学.中国近代数学家徐光启在《几何原本杂议》中说:“人具上资而意理疏莽，即上资无用;人具中材而心思缜密，即中材有用;能通几何之学，缜密甚矣，故率天下之人而归于实用者，是成其所由之道也.”

在几何学发展的历史长河中，许多经久不衰的几何名题，犹如一颗颗闪烁的珍珠，璀璨夺目，点缀着瑰丽的几何园林，装饰着数学宫殿.这些几何名题，精巧、深刻、迷人、有趣、美丽，推动着几何学乃至整个数学的发展，它们中有的从一被发现就吸引着人们的关注，有的经过几代甚至几十代数学家的努力，得出许多耐人寻味、发人深省的结论.

学习几何名题是进行奇异的旅行.几何名题在某个属于它自身的永恒而朦胧的地方，在那朦胧的土地上，我们奇异地从点、线段、角、三角形、多边形、圆等图形中获得绚丽多彩的景象，从一点小小的逻辑推理，可以得到深刻而优美的几何结构与量度关系，在那片朦胧的土地上，还有无数更令人惊奇的几何图形以及其中的位量与数量关系，等着我们和它们相遇.

学习几何名题可明澈自己的思维.三角形三条中线总是交于一点且该点三等分每一条中线，三角形三内角之和在欧氏空间就等于180°，等等，这些都精确地摆在那儿.生活里有许多巧合——那些常被有心或无心地异化为玄妙或骗术法宝的巧合，也许只是自然而简单的几何结果，以几何的眼光来看现实，不会有那么多的模糊.有几何精神的人多了，骗子(特别是那些穿戴科学衣冠的骗子)的空间就小了.无限的虚幻能在几何中找到最踏实的归宿.

学习几何名题是欣赏纯美的艺术.几何学家像画家和诗人，都创造着“模式”，不过是用思想来创造，用图形和符号来表达.几何的思想，就像画家的构思和诗人的韵律;几何的线条，就像画家的色彩和诗人的文字，以和谐的方式组织起来.几何的世界里，没有丑陋的位置.在几何学家的眼里，自己笔下的公式定理就像希腊神话里的那位塞浦路斯国王，从自己的雕像看到了爱人的生命.在几何里，在那缜密的逻辑里，藏着几何学家们对美的追求，藏着他们的性情和生命.

学习几何名题是享受充满数学智慧的精彩人生.学几何的感觉有时像在爬山，为了寻找新的山峰不停地去攀爬;有时又像在庭院散步，这是一种有益心智的精神漫步，可以进行几何思维的深刻领悟.

作者编写这本几何瑰宝是基于如下几方面的考虑:一是对历史名题，集之翡翠，汇其精华;二是体现我国广大初等数学研究者对几何问题的研究;三是体现张景中院士对改造平面几何体系而开创面积法方案的介绍以及新课改中强

调突出几何变换思想的渗透.为了编写好这本几何瑰宝,作者在整理自己多年的数本几何研究著作及发表的数十篇文章的基础上,又探讨研究了一系列专题,并广泛收集整理资料,阅读大量书刊,特别是张景中、沈康身、单墫、梁绍鸿、尚强、杨世明、周春荔、汪江松、熊曾润、胡炳生、萧振纲、叶中豪、郭要红、曾建国、黄家礼、李耀文,黄全福、陈四川、孙四周、胡耀宗、洪凰翔、孔令恩、邹黎明、熊光汉、孙哲、刘毅、刘黎明、黄华松、方廷刚、闵飞、李平龙、尹广金,高庆计、丁遵标、邹守文、令标、王扬、周新民、万喜人、赵临龙、沈毅、宿晓阳,周才凯、李显权、张赟等人以及国外著名数学家阿达玛(法)、约翰逊(美)、笹部贞市郎(日)等的书籍与文章使编者受益匪浅,因他们的研究,使几何名题进入到一个新的境界,书中引用了他们的大量成果.在此,也向他们表示深深的谢意.

让我们来几何园林走走,也许能挽回正在失去的读书兴趣,找回一个永不停歇、充满生机的圆满人生.孔夫子说:“知之者不如好之者,好之者不如乐之者.”只要“君子乐之”,就走进了一种高远的境界.

感谢刘培杰数学工作室的盛情邀请,花了4年的时间编写了这本几何瑰宝.限于作者的水平,书中可能有不少疏漏,敬请读者批评指正!

沈文选

2010年春于长沙岳麓山下长塘山

目　录

一、三角形、几何变换

❖勾股定理

勾股定理　直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方.

若设 a,b,c 为直角三角形的三边,其中 c 为斜边,则

$$a^2+b^2=c^2$$

我国古代称直角三角形为勾股形,并且直角边中较小者为勾,另一直角边为股,斜边为弦,所以称这个定理为勾股定理,也有人称商高定理.这条定理不仅在几何学中是一颗光彩夺目的明珠,被誉为"几何学的基石",而且在高等数学和其他科学领域也有着广泛的应用.

勾股定理从被发现至今已有五千多年的历史,五千多年来,世界上几个文明古国都相继发现和研究过这个定理.古埃及人在建筑金字塔和测量尼罗河泛滥后的土地时,就应用过勾股定理.我国也是最早了解勾股定理的国家之一,在四千多年前,我国人民就应用了这一定理.据我国一部古老的算书《周髀算经》(约西汉时代,公元前一百多年的作品)记载,商高(约公元前 1120 年)答周公曰:"折矩以为勾广三,股修四,径隅五.既方之,外半其一矩环而共盘,得成三四五.两矩共长二十有五,是谓积矩."在这本书中,同时还记载有另一位中国学者陈子(前 11 世纪)与荣方在讨论测量问题时说的一段话:"若求邪(斜)至日者,以日下为勾,日高为股,勾股各自乘,并而升方除之,得邪至日."如图1.1,即

$$\text{邪至日}=\sqrt{\text{勾}^2+\text{股}^2}$$

这里给出的是任意直角三角形三边间的关系.因此,也有人主张把勾股定理称为"陈子定理".

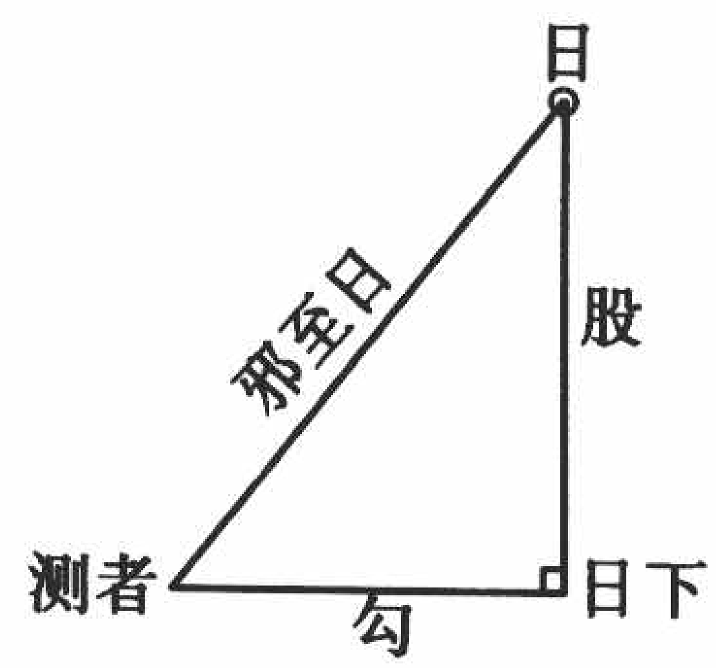

图 1.1

两千多年前,由于希腊的毕达哥拉斯(Pythagoras,前 572— 前 497)学派也发现了这条定理,所以希腊人把它叫做毕达哥拉斯定理.相传当时的毕达哥拉斯学派发现,若 m 为大于 1 的奇数,则 $m,\dfrac{m^2-1}{2},\dfrac{m^2+1}{2}$ 便是一个可构成直角三角形三边的三元数组.果真如此,可见这个学派当时是通晓勾股定理的.但这一学派内部有一规定,就是把一切发明都归功

于学派的头领,而且常常秘而不宣.据传说,发现这个定理的时候,他们还杀了一百头牛酬谢供奉神灵,表示庆贺.因此,这个定理也叫“百牛定理”.至于毕达哥拉斯学派是否证明了这一定理,数学史界有两种不同的观点,一种意见认为证明过,理由为如前所述.另一种意见则认为证明勾股定理要用到相似形理论,而当时毕达哥拉斯学派没有建立完整的相似理论,因此他们没有证明这一定理.

勾股定理在法国和比利时又叫“驴桥定理”,这自然也有它的来历.

人类对勾股定理的认识经历了一个从特殊到一般的过程,而且在世界上很多地区的现存文献中都有记载,所以这些地区认为这个定理是他们先发现的.国外一般认为这个定理是毕达哥拉斯学派首先发现的,因此,国外称它为毕达哥拉斯定理.但历史文献确凿地证明,商高知道特殊情况下的勾股定理比毕达哥拉斯学派至少要早五六个世纪,而陈子掌握普遍性的勾股定理的时间要比毕达哥拉斯早一二百年,是我们的祖先最早发现这一定理的,这就是我们把它称为“勾股定理”、“商高定理”或“陈子定理”的理由.

几千年来,人们给出了勾股定理的多种多样、绚丽多彩的证明.如1940年鲁米斯(E.S.Loomis)搜集整理的一本中就给出了370种不同证明.我国的李志昌编辑了一本《勾股定理190例证》,可惜笔者经多方寻找,始终未见到这两本书.出于自己的爱好,笔者多年来也收集整理了193种证法①.下面介绍几个典型证法.

证法1 (商高证法)将商高回答周公话翻译过来即得证法.

“既方之”,是指把几个直角三角形合成正方形.“外半其一矩环而共盘”,是指中外围部分由同一矩形(直角三角形)环绕而生的方形盘,即整个正方形的面积是$(3+4)^2=49$,内部正方形的面积为$49-\frac{1}{2}\times3\times4\times4=25$(两矩共长二十有五),所以边长(矩之弦)为5.把“勾三股四”推广到一般的“勾a股b”的直角三角形上去,证明不需要作任何实质性的修改,依然是内部正方形的面积为$(a+b)^2-\frac{1}{2}ab\times4=a^2+b^2$,即$c^2=a^2+b^2$,所以内部正方形的边长即矩的弦长为$\sqrt{a^2+b^2}$,如图1.2所示.

当一个数学定理的证明从特殊过渡到一般的时候,如果不需要作实质上的修改,只是在同一计算公式中变换数据,即使在今天意义下严格的数学证明,也是允许的②.

证法2 (赵爽证法)如图1.3,由$c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2$,有$c^2=a^2+$

① 沈文选,杨清桃.数学眼光透视[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008:82-105.
② 欧阳维诚.数学科学与人文的共同基因[M].长沙:湖南师范大学出版社,2000:55.

b^2.

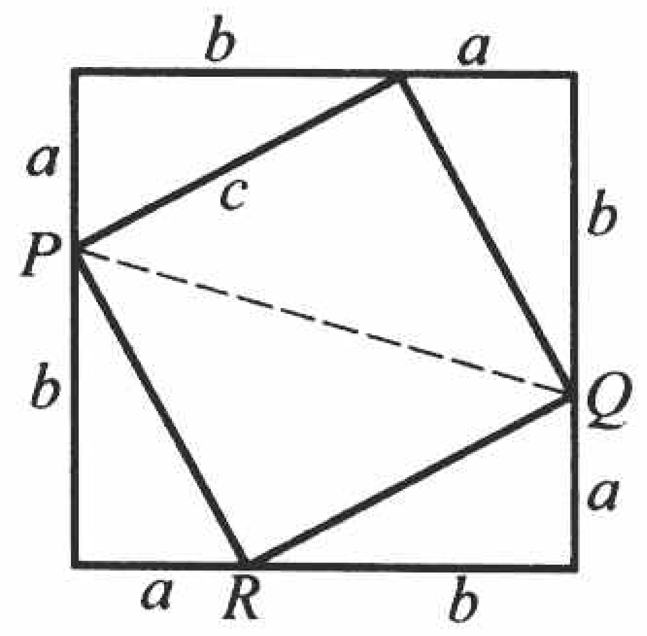

图 1.2

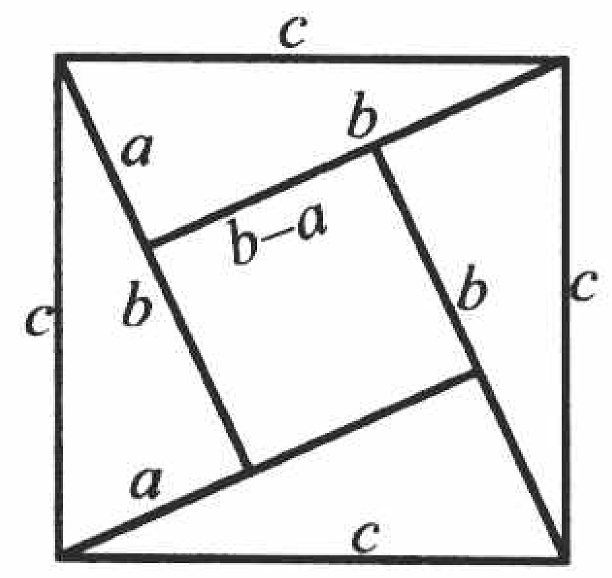

图 1.3

证法 3 （加菲尔德证法）如图 1.4，由 $\frac{1}{2}(a+b)(a+b)=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$ 即证.

证法 4 （张景中证法）如图 1.5，由 $\angle FAB$ 与 $\angle BCE$ 互余，知 $AM\perp CE$. 由 $\frac{1}{2}AF\cdot EM+\frac{1}{2}AF\cdot MC=S_{ACFE}=\frac{1}{2}AF\cdot CE=\frac{1}{2}c^2$，有 $\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$ 即证.

证法 5 （华德罕姆证法）如图 1.6，由

$$S_{ACDE}=2S_{\triangle ACB}-S_{\triangle CBF}+S_{\triangle AFE}$$

有 $$\frac{1}{2}(a+b)\cdot b=2\times\frac{1}{2}ab-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{c}\cdot\frac{a^2}{c}+\frac{1}{2}\left(c-\frac{ab}{c}\right)\left(c-\frac{a^2}{c}\right)$$

从而 $$a^2+b^2=c^2$$

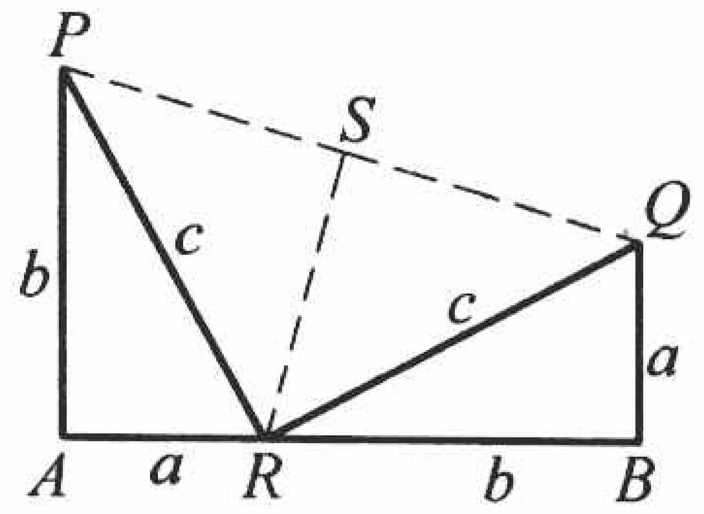

图 1.4

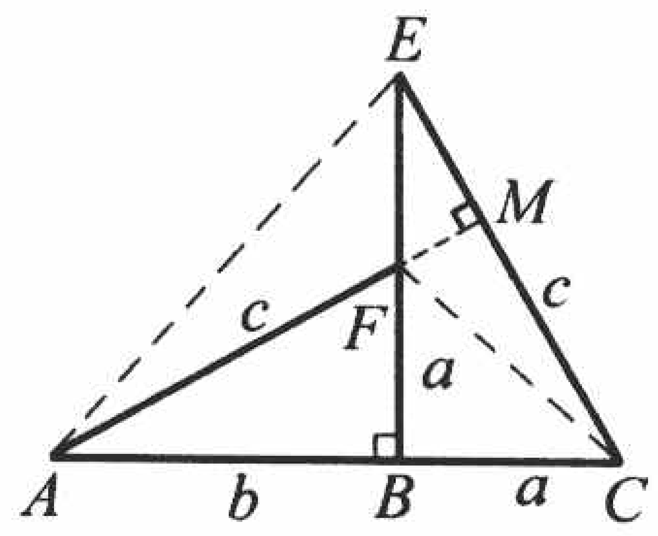

图 1.5

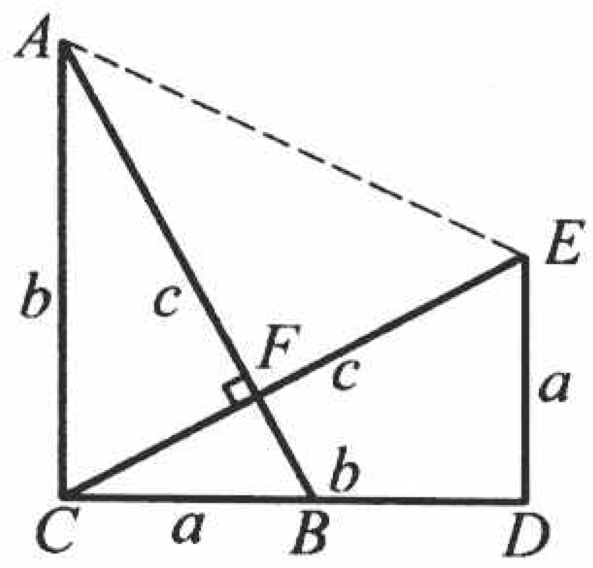

图 1.6

证法 6 （张景中证法）如图 1.7，由 $Rt\triangle STP\cong Rt\triangle SLR$，有 $PT=RL$，即知

$$AL=AR+RL=AP-TP=\frac{1}{2}(a+b)$$

从而 $$S_{ALST}=S_{\triangle ARP}+S_{\triangle PRS}$$

即 $$\frac{1}{4}(a+b)^2=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}c^2$$

故 $$a^2+b^2=c^2$$

证法 7 如图 1.8，在 $Rt\triangle ABC$ 中，作斜边 AB 上的高 CD，则 $Rt\triangle CDB\backsim Rt\triangle ADC\backsim Rt\triangle ACB$，且 $S_{\triangle CDB}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ACB}$ 即