随机金融数学引论

王玉文　刘冠琦
王　紫　陈婷婷　编著

科学出版社

随机金融数学引论

王玉文　刘冠琦
王　紫　陈婷婷　编著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是一本以介绍研究金融市场套利性、可达性、完全性的判定条件及金融衍生品定价方法为主的金融数学教材.

全书共十章，第 1 章、第 2 章介绍单时段、多时段二项式树金融模型，离散参数鞅. 给出离散模型下，标准期权的定价公式. 第 3 章至第 5 章，由连续时间金融模型，引入随机过程，特别是 Brownian 运动与 Poisson 过程，进而介绍随机分析基本内容. 第 6 章至第 9 章为金融衍生品定价模型及其应用，定价方法包括鞅方法、偏微分方程方法及保险精算方法. 最后，介绍最优停止问题与美式期权定价. 第 10 章介绍经典破产论的鞅方法及更新论证方法，最后综述破产论若干进展与金融数学的交叉研究成果.

本书适合数学与应用数学高年级本科生作为金融数学选修教材，硕士研究生“金融数学与精算学”方向或“金融数学与金融工程”方向作为“随机微分方程”和“金融衍生品定价”教材，也适合从事金融工程研究人员作为较深入研究金融资产定价的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

随机金融数学引论/王玉文等编著. —北京：科学出版社，2015.1

ISBN 978-7-03-042487-7

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①金融-经济数学-研究生-教材 Ⅳ. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 268232 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：林青梅
责任印制：赵德静 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 1 月第一次印刷 印张：26 3/4
字数：522 000

定价：128.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

金融数学是现代金融理论和应用数学有机结合的新兴交叉学科, 涉及随机过程、随机分析、随机最优化、随机过程统计、随机控制论、偏微分方程、泛函分析及非线性分析等典型数学方法. 20 世纪 80 年代以来, 由于金融市场剧烈波动, 经济主体承受的风险和面临的金融问题大幅增加. 20 世纪 90 年代, 金融工程学科应运而生, 成为金融领域最具生命力的重要学科之一. 在高等学校研究室和金融企业操作室中同时发展起来的高深数学方法已将金融衍生品业务转化成数万亿美元的市场交易. 金融数学为现代金融学和应用数学的学术研究和金融产业的成功结合提供了十分生动的案例.

金融数学的发展曾经两次引发“华尔街革命”, 而新的数学框架的现代金融学则被称为是两次“华尔街革命”的产物[12].

第一次“华尔街革命”是指 1952 年马科维茨 (H. M. Markowitz) 的证券组合选择理论的问世[12]. 马科维茨首先把证券的收益率看作一个随机变量, 而收益定义为该随机变量的均值, 即数学期望, 风险则定义为这个随机变量的标准差, 即将对均值的偏离定义为风险. 如果将各证券的投资比例看作变量, 问题归结为怎样使证券组合的收益最大、风险最小的数学规划 (随机优化). 对每一固定收益求出对应最小风险的证券组合, 则在风险–收益平面上, 就可以画出一条曲线, 称之为组合前沿, 其上半段称为有效前沿. 对于有效前沿上的证券组合, 不存在收益和风险两方面都优于它的证券组合, 表明高收益必然承担高风险. 马科维茨理论另一个重要结论: 分散投资是降低非系统风险的有效方法. 在证券组合选择理论的推动下, 金融实践中大批共同基金应运而生. 马科维茨的学生夏普 (W. P. Sharpe) 在 20 世纪 60 年代导出完全市场的证券组合的收益率是有效的, 以及所谓资本资产定价模型 (CAPM). 马科维茨的证券组合选择理论与夏普的资本资产定价模型开创了金融数学理论的先河. 1990 年, 二人一起获得诺贝尔经济学奖. 1976 年, 罗斯 (S. A. ROSS) 的套利定价理论 (APT) 问世. 针对 CAPM 的单因素模型, 罗斯提出用目前统称 APT 的多因素模型取代它. 罗斯 APT 经典论文的更重要的贡献是提出套利定价的一般原理, 其结果的等价形式, 后来称为“资产定价基本定理”. 从此, 现代金融学就以无套利假设作为出发点. 第二次“华尔街革命”是指 1973 年布莱克 (F.Black) 与肖尔斯 (M. S. Scholes) 的期权定价公式的问世[12]. 所谓 (股票买入) 欧式期权是指以某固定的执行价格在一固定期限买入某种股票的权利, 而不具有必须这样做的义务. 期权在被执行时的价格很清楚, 即如果当时股票的市价高于期权

规定的执行价格, 那么期权的价格就是股票的市价与执行价格之差; 如果股票的市价等于或低于期权规定的执行价, 那么期权的价格为零. 问题是期权在执行前应该怎样用股票价格来相对定价? 为解决这一问题, 布莱克和肖尔斯先将模型连续动态化. 假定模型中有两种证券, 一种是无风险证券, 其收益率是常数, 另一种是股票, 它是风险证券, 其价格变化满足称为几何 Brownian 运动的随机微分方程. 然后, 在市场无套利假设下, 利用每一时刻都可以通过股票和期权的适当组合对冲风险, 使得该组合变成无风险证券, 从而得到期权价格与股票价格之间的一个偏微分方程, 称为 Black-Scholes 方程, 其中参数是时间、期权的执行价格、无风险利率和股票价格的"波动率". 出人意料的是, 这一线性抛物方程竟然有显式解析解, 于是著名的 Black-Scholes 期权定价公式问世了. 1973 年, 该成果在美国《政治经济学杂志》上以《期权与公司债务定价》为题发表, 同年, 芝加哥期权交易所正式推出 16 种股票期权的挂牌交易, 使得衍生证券市场从此蓬勃发展起来. 同时, 由于期权在对冲投资风险的保险功能使得大批"对冲基金"应运而生. Black-Scholes 公式的成功与美国经济学家默顿 (R.Merton) 的研究分不开. 后者在把他们的理论深化和系统化方面做出了更大的贡献. 1990 年出版的专著《连续时间金融学》系统地总结了他的研究成果. 1997 年, 肖尔斯与默顿获诺贝尔经济学奖, 不幸的是布莱克已于 1995 年去世. Black-Scholes-Merton 期权定价公式是现代金融理论的重大突破. 特别地, 默顿等的杰出工作, 使信用风险理论模型的发展为信用风险管理和信用衍生品的发行奠定了重要的基础. 1995 年以后, 信用衍生品市场经历了爆炸式的增长. 金融数学的丰富研究成果及方法, 为研究创新金融解决方案和新型金融衍生品设计、金融产品定价及风险管理的新兴学科, 即金融工程提供了坚实理论基础.

20 世纪 90 年代, 金融数学的研究在中国悄然兴起. 1990 年, 彭实戈院士与他以前的导师帕尔杜 (E. Partox) 提出倒向随机方程理论, 并证明了一类倒向随机微分方程存在唯一解[30] (Partox and Peng, 1990), 他们的研究成果一发表立即引起金融数学家们高度关注. 因为期权定价问题恰好属于这类倒向随机微分方程的求解问题. 彭实戈院士开始对期权定价和金融数学产生兴趣. 1994 年, 国家自然科学基金委员会 (基金委) 组织一批数学家 (包括彭实戈、严加安、李训经、雍炯敏、陈叔平、张尧庭、王则柯、史树中等) 来论证"金融数学"的重要性以及如何为我国金融事业服务等问题[12]. 同年, 基金委将金融数学列为数学的"九五"优先发展领域. 1997 年, 由彭实戈作项目负责人的基金委重大项目"金融数学, 金融工程, 金融管理"正式立项, 该项目由彭实戈、邓述慧、张尧庭、史树中作学术领导小组成员, 至此, 在中国一批从事随机分析、数理统计、非线性分析、偏微分方程、分布参数控制等方向研究的数学家开始从事金融数学探索. 1997 年, 彭实戈、史树中的综述论文《倒向随机微分方程和金融数学》发表于《科学》, 1997, 5(49). 史树中的综述论文《从数理经济学到数理金融学的百年回顾》发表于《科学》, 2000, 6(52). 至此, 金融

数学的思想在中国迅速传播, 金融数学研究与教育在中国高校蓬勃展开. 一批高水平大学开始培养金融数学、金融工程的本科生、硕士生及博士生. 国内一批高水平的有关金融数学的教材、专著和译著相继出版. 例如, 1998 年, Yan J.A.(严加安)[31] 重点介绍期权定价的鞅方法; 2003 年, 姜礼尚[5] 突出介绍期权定价的偏微分方程方法, 该书已经翻译成英文在国外出版; 2004 年, 史树中[12] 着重以未定权益希尔伯特空间、线性定价法则及随机折现因子等特色方法重述金融经济学; 2006, A. 埃瑟里奇 (英) 著, 张寄洲译[1], 概述依赖无套利假设, 突出对冲技术和“复制投资组合”方法进行金融衍生品定价; 2008 年, A. H. 施利亚耶夫 (俄) 著, 史树中译[10], 该书分为两卷, 包括金融背景、数学模型和金融数学理论, 是一本突出随机方法的随机金融全书; 2008 年, Ma Jin and Yong Jong-min(雍炯敏)[27] 关于前向–倒向随机微分方程及应用的专著在 Springer 出版社出版, 该书从随机控制的视角, 介绍前向–倒向随机微分方程研究的进展及其在金融学中的应用; 2013 年, 严加安院士《金融数学引论》[20] 在科学出版社出版, 介绍金融数学主要分支的研究成果. 以上仅列举部分有代表性的教材、专著和译著, 由此可见近二十年金融数学教育在中国的显著发展.

北京大学光华管理学院的史树中教授, 自 1997 年发表第一篇有关金融数学综述合作论文起, 到 2008 年不幸去世为止的十年当中, 除发表金融数学研究论文外, 还发表了影响深远的金融数学综述论文两篇, 出版了适用于高年级本科生、低年级研究生作为教材的专著《金融经济学十讲》, 又出版了两部适用于应用数学和金融学本科生阅读的金融数学普及读本和教材《数学与金融》[13] 和《金融学中的数学》[14]. 自 1998 年 1 月, 他翻译出版适用于金融数学研究人员阅读的专著《随机金融》第一、二卷. 史树中教授深厚学术功底和生动表述语言, 使得他为金融数学在中国的普及工作及教育工作做出了不可磨灭的贡献. 本人正是受到史树中教授及其几本著作的影响, 从 2004 年起, 对金融数学产生极大兴趣. 2008 年上半年, 我们组织青年教师研讨《金融经济学十讲》, 恰在研讨班期间得到史树中教授不幸去世的消息, 在送走这位金融数学先驱学者之后, 我有幸再次得到由史树中教授家人特赠的高等教育出版社出版的史先生译著《随机金融》(第一、二卷).

2009 年, 我们在硕士一级学科“数学”中开始招收二级学科“应用数学”中“金融数学与精算学”方向, 至今已招收第五届, 效果良好. 2013 年, 又在硕士一级学科“统计学”中开始招收二级学科“应用统计”的“金融数学与金融工程”方向. 史树中教授的《金融经济学十讲》成为我们研究生第一学期的共同必修课“金融经济学”的指定教材. 在后继的“随机微分方程”“金融衍生品定价”及“精算学初步”三门课程中逐步形成的讲义成为本书的原型, 经使用修改三次形成本书的书稿. 本书第 1 章、第 2 章, 介绍单时段及多时段金融模型、风险中性测度、条件数学期望及离散参数鞅. 给出离散模型下, 欧式期权、美式期权的定价公式. 第 3 章至第 5 章, 由连续时间金融模型出发, 引进随机过程, 特别是 Brownian 运动与 Poisson 过

程, 进而介绍随机分析基本内容, 其中包括 Itô 积分、Itô 公式、随机微分方程及其解的存在唯一性、Dynkin 公式、Feyman-Kac 公式 (含拟线性推广)、Girsanov 定理. 第 6 章至第 9 章为金融衍生品定价模型及其应用. 首先, 介绍金融市场套利性、可达性及完全性在金融市场模型中的判别条件; 其次, 介绍基本 Black-Scholes 定价模型及其单风险资产衍生品定价, 包括股票、汇率、债券衍生品欧式期权的定价及复制, 基本 Black-Scholes 模型下奇异期权的定价; 然后, 介绍广义 Black-Scholes 定价模型, 包括多因子模型、变利率且变波动率模型, 带跳扩散模型的欧式期权定价. 以上定价方法包括鞅方法、偏微分方程方法及保险精算方法. 最后, 介绍最优停止问题与美式期权定价. 第 10 章介绍经典破产论的鞅方法及更新论证方法, 最后综述精算学与金融数学的交叉研究成果. 本书每种数学方法的引进, 均由金融问题的需要而自然引出. 对于较高深的研究成果, 采取叙而不证, 或合情推理方式给出. 使得学生从《微积分》《初等概率论》出发, 仅需数学本科知识, 便可读懂全部内容. 书中所需概率空间、条件概率、鞅论、Markov 过程及随机分析等随机数学的内容均有比较系统介绍, 基本达到自封闭. 同时, 对于金融数学研究文献中所涉及到的随机过程、随机分析等随机数学内容, 本书也进行了尽可能系统的介绍. 故本书名定为《随机金融数学引论》. 本书可有三种用途: ① 数学与应用数学高年级本科生作为金融数学选修教材, 可选第 1 章至第 4 章及第 6 章中除去标星号小节内容. ② “金融数学与精算学”方向或“金融数学与金融工程”方向的硕士研究生, 作为“随机微分方程”教材 (选第 1 章至第 5 章), 其前置课程为《金融经济学十讲》的前 7 讲; 同时作为“金融衍生品定价”教材 (选第 6 章至第 9 章), 第 10 章可结合《风险理论》课程讲授. ③从事金融工程研究人员, 作为较深入研究金融资产定价的参考书.

本书内容中概率基础及随机过程参考了王梓坤院士[18], 更新过程参考了李龙锁的著作[7], 而 Poisson 过程参考了李龙锁[7] 及王玉文[17] 等文献; 有关布朗运动及随机分析内容参考了文献 B. Økendal[29], X. R. Mao[28] 及 A. 弗里德曼[3]; 金融数学的内容参考了史树中[12], A. 埃瑟里奇著、张寄洲译[1], 姜礼尚[5], B. Økendal[29], A.H. 施利亚耶夫[10]、M. 凯宾斯基与 T. 扎斯特温尼斯克[8] 及四篇原始文献; 第 10 章参考了盛世学综述论文[15] 及 J. Baulsen 的综述论文[24]. 在此对作者们表示衷心感谢.

本书由王玉文设计总体框架, 并执笔第 1 章 (除去 1.7 节)、第 2 章、第 5 章至第 9 章 (除去 7.6 节, 9.5 节) 的全部内容; 刘冠琦执笔 1.7 节及第 4 章; 王紫执笔第 3 章和第 10 章; 黑龙江财经学院陈婷婷执笔 7.6 节与 9.5 节, 并选编了各章的习题, 最后由王玉文进行统稿. 本书编著得到国家自然科学基金 (编号 11071051)、黑龙江省自然科学基金项目 (编号 A201106) 及国家特色专业“数学与应用数学”专项经费的资助, 在此一并致谢.

在此, 正当专著《金融经济学十讲》出版十周年之际, 仅以此书献给中国金融数学先驱者之一史树中教授.

王玉文

2014 年 7 月 1 日于哈尔滨

符号说明

a.s.	几乎确定或概率 1
a.e.	几乎处处
$\varnothing$	空集
χ_A	集合 A 的指示函数, 即如果 $x \in A,\chi_A(x)=1$; 如果 $x \notin A,\chi_A(x)=0$
$\sigma(\mathcal{U})$	由 $\mathcal{U}$ 生成的 $\sigma-$ 代数, $\mathcal{U}$ 为 Ω 的子集组成的集族, 有时亦记 $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}=\sigma(\mathcal{U})$
$\mathcal{H}_X$	$\mathcal{H}_X \triangleq \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$, 其中 $X(\cdot):\Omega \to \mathbb{R}^n$ 为任意函数, $\mathcal{U}=\{X^{-1}(U):U \subset \mathbb{R}^n$为开集$\}$
$\mathbb{R}^1$	$\mathbb{R}$, 实数轴
$\mathbb{R}_+$	$[0,\infty)$
$\mathbb{R}^n$	n 维欧氏空间
$\mathbb{R}^n_+$	$\{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0, 1 \leqslant i \leqslant n\}$
$\mathcal{B}^n$	$\mathbb{R}^n$ 中 Borel-σ- 代数
$\mathcal{B}$	$\mathcal{B}^1$
$\mathbb{R}^{n\times m}$	$n \times m$ 矩阵构成的欧氏空间
$\mathcal{B}^{n\times m}$	$\mathbb{R}^{n\times m}$ 中 Borel-σ- 代数
A^T	矩阵 A 的转置
$traceA$	方阵 A 的迹, 即 $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $traceA=\sum_{i=1}^n a_{ii}$
$W(t,\omega)$	$(W_1(t,\omega),\cdots,W_m(t,\omega))$ 为 $m-$ 维布朗运动
$\mathcal{F}_t^{(m)}$	$\sigma\{W(s,\omega):0 \leqslant s \leqslant t\}(0 \leqslant t \leqslant T)$, 为由 $m-$ 维布朗运动生 成的 $\sigma-$ 代数流
$\mathcal{H}_T^m$	$\{f(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^m$为$\mathcal{B}\times\mathcal{F}-$可测的, $f(t,\cdot)$为 $\mathcal{F}_t^{(m)}-$适应的, 且$E[\int_0^T f(t,\omega)^2dt]<\infty\}$
$\mathcal{H}_T$	$\mathcal{H}_T=\mathcal{H}_T^1$
$\mathcal{H}_T^{m\times n}$	$\{v(t,\omega)\in\mathbb{R}^{m\times n}$为$\mathcal{B}^{(m)}\times\mathcal{F}_T^{(m)}$可测, $E[\int_0^T v(t,\omega)dt]<\infty$, 且$v(t,\cdot)$为$\mathcal{H}_t-$适应的$\}$, 其中 $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geqslant 0}$ 为过滤概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$ 中某一滤子
$E^P[\cdot]$	关于概率 P 的数学期望
$L^P(\Omega,\mathcal{F},P)$	使得 $P-$ 阶矩 $E[\lvert X\rvert^P]<\infty$ 的随机变量全体

目　　录

前言

符号说明

第 1 章　单时段金融模型与风险中性测度 ······ 1

1.1　引言 —— 金融结构 ······ 1

1.1.1　关键的对象和金融结构 ······ 1

1.1.2　金融学中的一些定义 ······ 2

1.2　无套利原理与远期合约定价 ······ 8

1.3　期权定价的单时段两值模型 ······ 11

1.4　风险中性测度 ······ 15

1.5　单时段 n 值模型与无套利特征 ······ 19

1.6　单时段 n 值模型的风险中性概率测度 ······ 21

1.7　单时段两值模型三种基本定价方法的内在一致性：一个通用案例 ······ 27

第 1 章习题 ······ 29

第 2 章　多时段二项式树金融模型和离散参数鞅 ······ 30

2.1　欧式期权定价的二项式树方法 (I) —— 不支付红利 ······ 30

2.2　美式期权定价的二项式树方法 ······ 35

2.3　概率空间、离散参数鞅和 Markov 过程 ······ 43

2.3.1　概率空间 ······ 43

2.3.2　离散时间随机过程 ······ 47

2.3.3　离散参数鞅 ······ 52

2.3.4　资产定价基本定理 ······ 56

2.4　某些重要的离散参数鞅定理 ······ 59

2.4.1　停时 ······ 59

2.4.2　鞅分解定理 ······ 63

2.4.3*　鞅收敛定理 ······ 66

2.5　二项式树模型的鞅表示定理 ······ 71

2.6　连续时间金融模型预览 ······ 73

第 2 章习题 ······ 77

第 3 章　连续时间金融模型与随机过程 ······ 80

3.1　随机过程论导引 ······ 80

3.1.1 随机过程论中的基本概念 ······ 80
3.1.2* 随机过程的 Kolmogorov 构造法 ······ 86
3.2 Markov 过程与平稳过程 ······ 89
3.2.1 Markov 性 ······ 89
3.2.2* 跳跃型马氏过程 ······ 91
3.2.3 扩散过程 ······ 94
3.2.4* 平稳过程 ······ 100
3.3 连续 Brownian 运动的存在性与不可微性 ······ 101
3.3.1* 连续 Brownian 运动的存在性 ······ 102
3.3.2 Brownian 运动的不可微性 ······ 106
3.4 连续时间鞅与 Brownian 运动特征 ······ 108
3.5 Brownian 运动的反射原理与尺度变换 ······ 114
第 3 章习题 ······ 120
第 4 章 随机分析基础 ······ 122
4.1 一维 Itô 积分及其性质 ······ 123
4.2 一维 Itô 公式与鞅表示定理 ······ 135
4.3* 多维 Itô 积分与 Itô 公式 ······ 156
4.4 随机微分方程 ······ 163
第 4 章习题 ······ 182
第 5 章 Itô 扩散过程及其性质 ······ 184
5.1 Markov 性质与强 Markov 性质 ······ 184
5.2 Itô 扩散的生成元与 Dynkin 公式 ······ 190
5.3 SDE 与 PDF：Feyman-Kac 表示定理 ······ 197
5.4 Girsanov 定理 ······ 208
第 5 章习题 ······ 218
第 6 章 连续时间金融市场模型及其性质 ······ 221
6.1 投资组合与套利性 ······ 222
6.2 可达性与完全性 ······ 230
第 6 章习题 ······ 238
第 7 章 基本 Black-Scholes 模型与单风险资产期权定价 ······ 239
7.1 欧式期权的 Black-Scholes 定价公式和复制策略 ······ 239
7.2 可化为 Black-Scholes 模型的基本金融衍生品定价 ······ 253
7.2.1 汇率衍生品定价 ······ 253
7.2.2 支付红利的股票衍生品定价 ······ 258
7.2.3 债券衍生品定价 ······ 265

7.2.4 风险的市场价格 ······ 270
7.3* 基本 Black-Scholes 模型下奇异期权定价 (I) ······ 272
7.4* 基本 Black-Scholes 模型下奇异期权定价 (II) ······ 278
7.5* 基本 Black-Scholes 模型下奇异期权 (III)—— 亚式期权 ······ 285
7.6* 美国灾害保险期货期权的保险精算定价 ······ 293
第 7 章习题 ······ 300
第 8 章 广义 Black-Scholes 模型与复杂欧式期权定价 ······ 302
8.1 多因子金融模型及欧式期权定价 ······ 302
8.1.1 资产定价基本定理 ······ 304
8.1.2 复制欧式 T-未定权益的三步骤 ······ 306
8.2 广义 Black-Scholes 定价公式 ······ 311
8.3 双重货币金融衍生品定价 ······ 315
8.4 带跳–扩散模型的欧式期权定价 ······ 319
8.4.1 带对数正态跳跃的模型 ······ 319
8.4.2 带常数跳跃的模型 ······ 325
第 8 章习题 ······ 333
第 9 章 最优停止问题与美式期权定价 ······ 334
9.1 时齐扩散过程的最优停止问题 ······ 334
9.2 非时齐最优停止问题与股票最优出售时间 ······ 347
9.3 含积分的最优停止问题及变分不等式方法 ······ 353
9.3.1 讨论含积分的最优停止问题 ······ 353
9.3.2 讨论变分不等式方法 ······ 355
9.4 美式期权定价 ······ 361
9.5 永久美式期权的定价公式 ······ 369
第 9 章习题 ······ 372
第 10 章 经典破产论及其与金融数学交叉研究简介 ······ 374
10.1 Lundbert-Cramér 的经典破产论 I—— 鞅方法 ······ 374
10.2 Lundberg-Cramér 的经典破产论 II—— 更新论证方法 ······ 380
10.3 破产论若干进展及其与金融数学交叉研究的综述 ······ 387
10.3.1 Gerber 及其合作者关于破产论的研究工作综述 ······ 387
10.3.2 破产论当代研究中若干有代表性且与本书主题相关的研究方向 ······ 394
10.3.3 精算学的三个层次 ······ 399
参考文献 ······ 401
附录 正态随机变量 ······ 403
名词索引 ······ 409

第 1 章　单时段金融模型与风险中性测度

1.1　引言 —— 金融结构

金融理论 (数理金融) 与金融工程研究金融结构的性质, 利用各种金融工具和金融运作, 考虑时间、风险和随机环境特征等因素, 力求以最合理的方式配置金融资源. 利用的数学工具主要有随机过程、随机分析、随机最优化、随机过程统计及泛函分析、偏微分方程等[10].

1.1.1　关键的对象和金融结构

在金融的理论和实务中, 四种结构如图 1.1.1 所示, 其中金融市场处于中心地位.

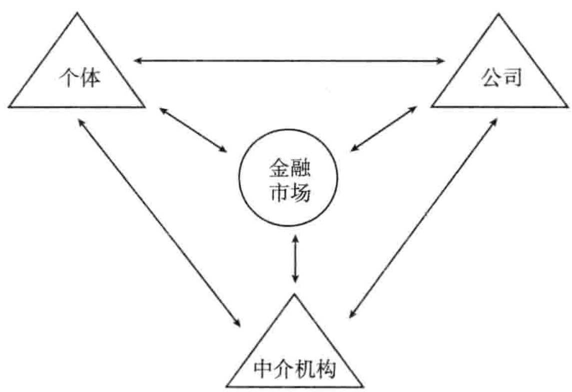

图 1.1.1　金融结构

个体: 他们的金融活动服从于"消费 —— 投资"问题的求解. 个体既作为消费者, 又作为投资者的双重行为, 导致一个最优化问题的研究, 在数理经济学中陈述为"消费 —— 储蓄问题"和"投资组合决策问题", 其中第二个问题是金融经济学中问题. "投资组合"问题, 是将金融手段 (不动产、黄金、证券 (债券、股票、期权、期货等)) 的最优化, "不要把鸡蛋放在一个篮子里""毫无风险就是毫无收益"之类格言的体现.

公司 (企业、厂商): 具有诸如"土地""工厂""机器"等物理贵重物; 也具有"组织机构""市场""专利"等无形贵重物; 公司发行股票、债券, 其活动以"股票

持有者”和“债券持有者”利益最大化为目标.

中介机构 (银行、投资公司、养老基金、保险公司等及从事期权、期货合约等交易的交易所).

现在美国最著名的交易所有:

(i) 纽约证券交易所; (ii) 纳斯达克股票交易所; (iii) 芝加哥交易所集团 (包含芝加哥商品交易所 (CME), 芝加哥期货交易所 (CBOT)).

金融市场是外汇、货币、贵金属市场、石油市场及包括证券市场在内的金融工具市场的总称.

金融工具分为

基本工具: (i) 银行账户; (ii) 债券; (iii) 股票.

衍生工具: (i) 远期; (ii) 期货; (iii) 期权; (iv) 互换; (v) 组合期权; (vi) 价差期权; (vii) 复合期权等, 其中远期、期货、互换和期权称为基本衍生工具.

金融工程: 金融衍生品设计与金融方案的运用; 目的是增加资本、降低风险, 使得未来交易, 在现在确定价格的条件下, 减少或扩大风险, 起杠杆作用.

1.1.2　金融学中的一些定义

1. 基本工具

(i) 银行账户: 银行有义务对人们的账户支付确定的利息, 是各种证券价格的度量单位.

- 一年 m 次 (单利);
- 连续计算 (复利).

在银行开启一个以利率 $r(m)$ 一年支付 m 次利息的银行账户. 初始资本 B_0, N 年后, 总值

$$B_N(m) = B_0\left(1+\frac{r(m)}{m}\right)^{mN}. \tag{1.1.1}$$

在以 $r(\infty)$ 连续计息, N 年后

$$B_N(\infty) = B_0 e^{r(\infty)N}, \tag{1.1.2}$$

在 $m\to\infty$, $r(m)\to r(\infty)$, 有

$$B_N(m)\to B_N(\infty).$$

如果 $r(\infty)=r$, 对应“一年支付 m 次的利率” $r(m)$ 为

$$r(m) = m(e^{\frac{r}{m}}-1).$$

由此可得, 按照 $r(m)$ 对应的等价连续利率 $r=r(\infty)$ 为

$$r=m\ln\left(1+\frac{r(m)}{m}\right).$$

如果 $m=1$, 对 $\hat{r}=r(1)$ 和 $r(\infty)$, 由下式转换,

$$\hat{r}=\mathrm{e}^r-1,\quad r=\ln(1+\hat{r}).$$

设“年利率 $\hat{r}$”, “年贴现率 $\hat{q}$”表示: 必须存入 $B_0=B_1(1-\hat{q})$, 一年后才能得 $B_1=B_1(1)$, 其关系为

$$(1-\hat{q})(1+\hat{r})=1, \tag{1.1.3}$$

于是

$$\hat{q}=\frac{\hat{r}}{1+\hat{r}}. \tag{1.1.4}$$

问题: 设连续计息利率为 $a\%$, 要使你的资本加倍, 需多少年?

设需 N 年, 则

$$2=\mathrm{e}^{aN/100},$$

从而

$$N=\frac{\ln 2\cdot 100}{a}\approx\frac{72}{a}.$$

应用中, 每年年息 $a\%$, 用 72 法则: $N=\dfrac{72}{a}$.

(ii) 债券: 政府或企业以积累资本为目的所发行的债务契约.

在时刻 $t=0$ 发行的债券的几个数值参数;

(1) 到期日 T: 其中 T 为债券的生命期;

(2) 面值: 到期日向债券持有者支付的总额 $P(T,T)$;

(3) 债券利率 r_c: 到期时, 债券发行者向债券持有者支付的利息 ($=r_c\times$ 面值); r_c 又称息票利率;

(4) 债券市值; $P(t,T), 0\leqslant t\leqslant T$.

虽然在 $[0,T]$ 内 r_c 不变, 但 $P(t,T)$ 随 t 而波动, 这是多种经济因素叠加的结果, 因而 $\{P(t,T)\}_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是一个随机过程 (以后定义).

(iii) 股票: 由公司 (企业、厂商) 为增加资本而发行股份证券.

(1) 普通股: 持有者获得红利作为对公司的利润份额, 在公司破产时, 丧失全部股本.

(2) 优先股: 红利发放有保证, 不会随公司利润的增加而增加, 但丧失全部资本的风险小.

股票的投资者由股价波动而赚钱. 投资者关心进行股票交易的公司状况, 股票报价及演变的信息, 还有"整体"经济状况, 证券市场的状况的信息, 它们以某种"综合"指数来表达.

最重要的有如下"综合"指数, 例如, 目前

道琼斯工业平均指数：取自 30 家工业公司;

道琼斯运输平均指数：取自 20 家航空、铁路和运输公司;

道琼斯公共事业平均指数：取自 15 家煤气、电力和能源公司;

道琼斯 65 综合平均指数：取自包括上述全部 65 家企业.

应该注意, 上述平均指数, 并不是简单的算术平均, 而是根据有较高市值的公司的股票在综合指数中较大的权重来形成的. 这样一来, 少数公司的股票价格的大变化可引起指数整体的激烈变化.

除道琼斯指数还有如下指数：

标准普尔 500 指数;

NASDAQ 综合指数.

在中国有"沪深 300 指数"等.

2. 衍生工具

定义 1.1.1　*远期合约是在规定的未来日期 T 按规定的价格 K 买 (卖) 一种资产的协议. 买方被称为多头, 卖方被称为空头.*

注 1　远期合约一般不在交易所进行, 签订合约不需要费用, 定价就是确定敲定价 K.

期货合约与远期合约相同, 不同的是期货需在交易所正规交易且有标准化条款和特定的清算方式.

期权：这是由公司、银行和其他金融机构发行的证券 (合约), 它赋予购买者按规定的条件在今后某一个时刻来购买 (或出售) 某种确定的有价品 (例如, 股票、债券、外汇) 的权利, 而不具有必须如此做的义务.

期权以许多种形式出现, 其定价问题构成丰富的数学问题. 而布莱克–肖尔斯–莫顿 (Black-Scholes-Merton) 因成功地对欧式期权定价而获诺贝尔经济学奖.

定义 1.1.2　*欧式看涨 (跌) 期权让持有人有权利但不负有义务在规定的时刻 T 按规定的价格 K 购买 (出售) 某种资产.*

一般而言, 看涨是指购买, 看跌是指出售. 术语欧式指持有人恰在时刻 T 执行权利, 仅依赖于 T 时刻的市场状况. 而以后介绍的美式期权、亚式期权, 其收益由原生资产在整个时间段 $[0, T]$ 的表现来确定.

本章的讨论仅对欧式期权有意义.

定义 1.1.3 衍生产品合约的到期时间 T 称为到期日或执行日, 价格 K 称为敲定价格.

什么是欧式看涨期权的定价问题? 假如一家公司通常必须经营一种有内在风险的资产, 如石油. 例如, 它们可能知道在 6 个月内将需要一千桶原油. 由于世界政治经济形式的变化, 油价将剧烈波动, 但通过以敲定价格 K 购买欧式看涨期权, 公司知道了 6 个月后, 为了购买一千桶石油, 最多支付多少钱. 人们可以认为期权是为规避油价上涨所带风险的一种保险. 当前定价问题是对于给定的 T 和 K, 确定公司应为这样的保险支付多少钱? 这通常称为期权金.

为了简化问题, 除非另做说明, 原生资产可以在没有额外费用和收益的情况下被持有.

为确定起见, 期权购买者有权利但无义务在到期日 T 以敲定价 K 购买, 比如股票, 而后者在到期日的实际价格为 S_T, 一般 $S_T \neq K$.

如果 $S_T > K$, 期权将被执行. 此时, 期权处于实值状态, 对公司来说期权的价值为 $S_T - K$.

如果 $S_T < K$, 从开放的市场上购买股票更便宜, 期权将不被执行 (期权不被执行的自由权, 正是它和期货的差别). 期权失去价值处于虚值.

如果 $S_T = K$, 期权处平值. 此时, 期权价值为零, 因此期权在 T 时刻的价值为

$$(S_T - K)^+ \triangleq \max\{S_T - K, 0\}. \tag{1.1.5}$$

图 1.1.2 表明到期日三类衍生证券的收益情况: 远期购买合约, 欧式看涨期权和欧式看跌期权, 每一种都是 S_T 的函数. 零时刻, 衍生产品合约生效前, 允许自己是空头.

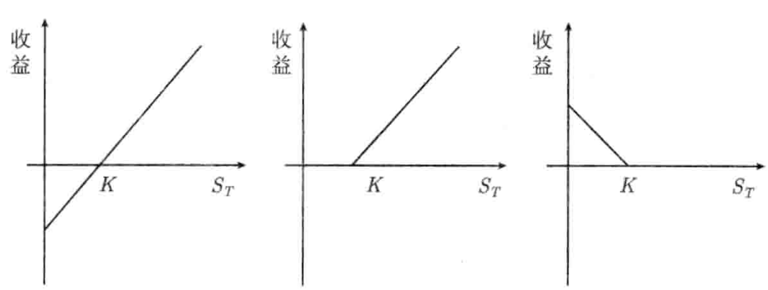

图 1.1.2 敲定价为 K 的三种衍生品收益

用期权可回避风险, 可见下例.

例 1.1.4 (同价对敲) 假设投机者预期股价有一个大的变动, 但不知变动的方向, 其中一个可能的投资组合就是同价对敲, 即同时持有相同到期日 T, 相同敲定价 K 的欧式看涨和看跌两种期权.