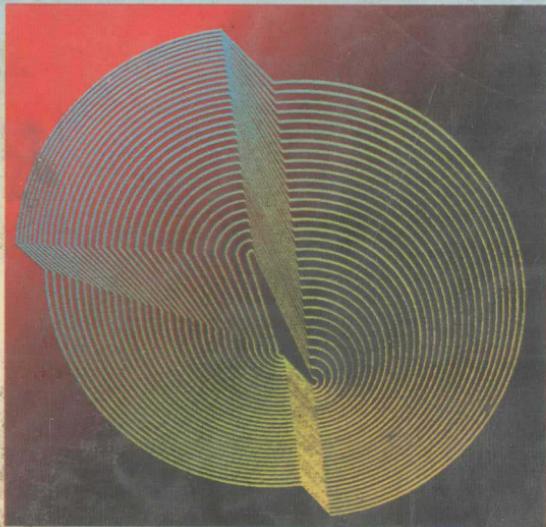


解析几何

JIEXI JIHE

主编 马淑云 王定江



河南大学出版社



解 析 几 何

主 编 马淑云 王定江
副主编 王 阳 王晓力 王守印
王永忠 吴景珠 樊明智

河南大学出版社

图书在版编目(CTP)数据

解析几何/马淑云主编. —河南:河南大学出版社, 1998. 10

高等师范专科学校教材

ISBN 7-81041-588-3

I. 解… II. 马… III. 解析几何-高等学校:师范学校-教材

IV. 0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (98) 第 24879 号

河南大学出版社出版

(开封市明伦街 85 号)

中科院开封印刷厂印刷

河南省新华书店发行

1998 年 10 月第 1 版 1998 年 10 月第 1 次印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 13

字数: 326 千字 印数: 1—3000 册

定价: 12.80 元

前言

前言

我们在对师专的教学、科研、师资、教材和教育改革等情况调查的基础上，特邀了一批有丰富教学经验和较高学术水平的教师编写了这本教材。在编写的指导思想和具体实践上，我们力求使这本教材具有以下特点：

1. 严格以师专教学计划和教学大纲为依据,坚持立足师专这个特定层次,从师专的培养目标和教学实际出发,力求使教材内容的深度、广度都充分体现培养初中教师的要求.本书较系统地介绍了空间解析几何的基本内容,同时也对与中学解析几何联系较为密切的二次曲线理论,在中学平面解析几何的基础上作了适当的拓宽与补充.
 2. 贯彻理论联系实际的原则,系统阐述解析几何课程的基本理论、基本知识和基本技能.为帮助读者及时巩固基本概念,掌握解题的方法和技巧,在每一节后配备了适量的习题,并注意学生的思维能力、自学能力和表达能力的培养.书后附有学习指导和补充题,并在书末附有答案与提示.
 3. 力求反映师专教育改革的状况和教学科研水平.按照适当够用、分类提高的原则,做到取材适度,深入浅出,循序渐进,条理清楚.注意与相关课程(如高等代数)的协调,减少相应部分的繁琐

论证，避免有关内容重复，以便更好地适应于师专的教学需要。

本书编写的依据是师专二年制教学大纲，全书共分六章，教学时数为 64 学时，带“*”号的内容可根据情况选学。参加本书编写的有：王阳（南阳师专，§ 1.3～§ 1.10）、樊明智（许昌师专，§ 2.1～§ 2.3）、王定江（平顶山师专，§ 1.1～1.2、§ 3.1～§ 3.5）、马淑云（南阳师专，§ 4.4～§ 4.8）、吴景珠（周口师专，§ 3.6～§ 3.8、§ 4.1～§ 4.3）、王守印（新乡师专，§ 5.4～§ 5.6）、王永忠（新乡师专，§ 5.1～§ 5.3、§ 6.1）、王晓力（南阳师专，§ 6.2～§ 6.4），所编内容均含习题、解答和学习指导。全书由主编马淑云审阅后定稿。

限于我们的水平，书中的不妥与错误在所难免，恳切希望使用本书的老师和广大读者批评指正。

编本者

1998 年 5 月

本基础课教材以《普通高等教育教材》为蓝本，结合本校实际情况，对教材进行了适当的修改和补充。在编写过程中，参考了国内外许多教材和资料，吸收了国内外先进教育理念，力求做到科学、系统、实用。在编写过程中，得到了许多老师的帮助和支持，特别是王定江、吴景珠、王永忠、王守印、王晓力等老师的悉心指导，使本书得以顺利编写完成。在此，向他们表示衷心的感谢！同时，也感谢所有参与教材编写工作的教师和学生，他们的辛勤努力，使本书得以顺利出版。最后，感谢出版社的编辑和校对人员，他们的辛勤工作，使本书得以顺利出版。特别感谢出版社的领导，他们的支持和鼓励，使本书得以顺利出版。在此，向他们表示衷心的感谢！同时，也感谢所有参与教材编写工作的教师和学生，他们的辛勤努力，使本书得以顺利出版。特别感谢出版社的领导，他们的支持和鼓励，使本书得以顺利出版。

13608453600

别为一时的得失而迷失了自己，活着就得有耻辱感

- (62) 爱需要智慧也更需要勇气,一个在爱情面前怯懦不前
(18) 爱需要智慧也更需要勇气,一个在爱情面前怯懦不前
(80) 的人,是不错又获“暴”(18)
(80) 好多的累都是因为我们不善于说“不”
(80) 好多的累都是因为我们不善于说“不”

第一章 向量与坐标 (1)

第 1 章 向量的概念 (1)

第 1 章 习题 1.1 (1)

§ 1.2 向量的加减法 (5)

习题 1.2 (10)

§ 1.3 数量乘向量 (11)

习题 1.3 (14)

§ 1.4 向量的线性关系与分解 (15)

习题 1.4 (19)

§ 1.5 两向量的数量积 (20)

习题 1.5 (25)

§ 1.6 两向量的向量积 (26)

习题 1.6 (30)

§ 1.7 三向量的混合积 (31)

习题 1.7 (34)

§ 1.8* 三向量的双重向量积 (34)

习题 1.8 (37)

§ 1.9 空间直角坐标 (37)

习题 1.9 (46)

§ 1.10 向量在初等数学中的应用举例 (47)

习题 1.10 (53)

结束语 (54)

第二章 图形与方程 (55)

§ 2.1	曲面与方程	(55)
	习题 2.1	(61)
§ 2.2	空间曲线与方程	(62)
	习题 2.2	(66)
§ 2.3*	球面坐标与柱面坐标	(67)
(1)	习题 2.3	(70)
(1)	结束语	(70)
第三章 平面与空间直线		(72)
§ 3.1	平面方程	(72)
(2)	习题 3.1	(81)
§ 3.2	点与平面的关系	(83)
(4)	习题 3.2	(84)
§ 3.3	两平面的关系	(85)
(6)	习题 3.3	(87)
§ 3.4	空间直线的方程	(88)
(8)	习题 3.4	(97)
§ 3.5	直线与平面的关系	(98)
(8)	习题 3.5	(100)
§ 3.6	空间两直线的关系	(101)
(10)	习题 3.6	(108)
§ 3.7	点与空间直线的关系	(109)
(12)	习题 3.7	(110)
§ 3.8	平面束	(110)
(14)	习题 3.8	(115)
(15)	结束语	(116)
第四章 特殊曲面与二次曲面		(118)
§ 4.1	柱面	(118)
(16)	习题 4.1	(126)

(§ 4.2 锥面.....	(127)
(§ 4.2 习题 4.2	(133)
(§ 4.3 旋转曲面.....	(133)
(§ 4.3 习题 4.3	(141)
(§ 4.4 椭球面.....	(142)
(§ 4.4 习题 4.4	(148)
(§ 4.5 双曲面.....	(148)
(§ 4.5 习题 4.5	(156)
(§ 4.6 抛物面.....	(157)
(§ 4.6 习题 4.6	(163)
(§ 4.7 二次直纹面.....	(164)
(§ 4.7 习题 4.7	(171)
(§ 4.8 描绘空间区域简图.....	(172)
(§ 4.8 习题 4.8	(183)
结束语	(184)
第五章 二次曲线的一般理论	(187)
§ 5.1 平面直角坐标变换.....	(189)
习题 5.1	(196)
§ 5.2 利用坐标变换化简二次曲线的方程和二次曲 线的分类.....	(196)
习题 5.2	(211)
§ 5.3 二次曲线在直角坐标变换下的不变量.....	(212)
习题 5.3	(217)
§ 5.4 利用不变量化简二次曲线的方程和二次曲线 形状的判定.....	(217)
习题 5.4	(222)
§ 5.5 二次曲线的一般性质.....	(223)
习题 5.5	(241)

(581) § 5.6	三次曲线位置的确定	简述	(243)
(582)	习题 5.6	练习题	(253)
(583)	结束语	附录	(254)
第六章	二次曲面的一般理论		(256)
(584) § 6.1	空间直角坐标变换	简述	(258)
(585)	习题 6.1	练习题	(268)
(586) § 6.2	二次曲面的中心、径面、主方向与主径面	简述	(269)
(587)	习题 6.2	练习题	(282)
(588) § 6.3	二次曲面的不变量	简述	(282)
(589)	习题 6.3	练习题	(292)
(590) § 6.4	二次曲面的化简与分类	简述	(292)
(591)	习题 6.4	练习题	(310)
(592)	结束语	附录	(311)
学习指导			(313)
习题答案与提示			(384)
(593)	全黑题一抛物曲面二 章正项		
(594)	类变函数的直面半	1.2 题长	
(595)	类变曲面	1.2 题长	
(596)	类变曲面的直面半	2.2 题长	
(597)	类变曲面	2.2 题长	
(598)	类变曲面的直面半	3.2 题长	
(599)	类变曲面	3.2 题长	
(600)	类变曲面的直面半	4.2 题长	
(601)	类变曲面	4.2 题长	
(602)	类变曲面的直面半	5.2 题长	
(603)	类变曲面	5.2 题长	
(604)	类变曲面的直面半	6.2 题长	
(605)	类变曲面	6.2 题长	

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1+2+\dots+n)^2$$

$$(-1)^2 + \dots + (-1)^{n-1} = 2^{n-1}$$

第一章 向量与坐标

解析几何是一门用代数方法研究几何问题的学科。它的最基本的做法是把几何结构代数化、数量化。本章将介绍向量的有关概念、向量的各种运算和坐标。罗氏几何 罗曼

向量的概念 § 1.1

1. 向量的概念及表示

在几何学、力学、物理学以及日常生活中，我们常遇到两类量：一类量比较简单，只要规定单位后，都可以用一个数来表示，如长度、面积、时间、温度等。这种只有大小的量叫做数量。另一种量比较复杂，除了要知道它们的大小外，还必须指出它们的方向，如位移、力、速度等。这种量就是向量。

定义 1.1.1 既有大小又有方向的量叫做向量(或称矢量).

我们容易看出,向量有两个特征:大小和方向.因此在几何上常用有向线段来表示向量,有向线段的始点与终点分别叫做向量的始点与终点,有向线段的方向表示向量的方向,有向线段的长度表示向量的大小.

向量的书写方法：始点是 A 、终点是 B 的向量记作 \overrightarrow{AB} ，有时用 a, b, c, x, \dots 来记向量，如图 1-1 所示。

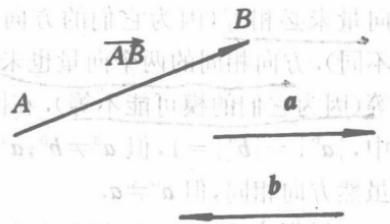


图 1-1

$\vec{a} \rightarrow \vec{b} \rightarrow \vec{x}$

2. 与向量有关的概念

向量的大小叫做向量的模或长度. 向量 \vec{AB} 与 a 的模记作 $|\vec{AB}|$ 与 $|a|$.

模等于 1 的向量叫做单位向量或么向量, 与向量 a 同方向的单位向量叫做向量 a 的单位向量, 常用 a^0 表示.

模等于 0 的向量叫做零向量, 记作 0. 它是始点与终点重合的向量, 零向量的方向不定. 不是零向量的向量叫做非零向量.



图 1-2

两个非零向量, 通过平移后若能重合(始点与始点、终点与终点重合), 则这两个向量的模相等且方向相同. 反之, 若两个非零向量的模相等且方向相同, 那么平移后两个向量显然重合. 因此有

定义 1.1.2 如果两个向量的模相等且方向相同, 那么叫做相等向量. 所有的零向量都相等. 向量 a 与 b 相等, 记作 $a=b$.

必须注意, 由于向量不仅有大小还有方向, 因此模相等的两个向量未必相等(因为它们的方向可能不同). 方向相同的两个向量也未必相等(因为它们的模可能不等). 在图 1-2 中, $|a^0|=|b^0|=1$, 但 $a^0 \neq b^0$; a^0 与 a 虽然方向相同, 但 $a^0 \neq a$.

根据定义 1.1.2, 对于不在同一直线上的两个相等的非零向量 \vec{AB} 与 $\vec{A'B'}$, 如果用两线段分别连结它们的一对始点 A 与 A' , 一对终点 B 与 B' , 那么显然得到一个平行四边形 $ABB'A'$, 如图 1-3 所示. 反过来, 如果用这种作图方法从两个向量得到一个平行四边形时,

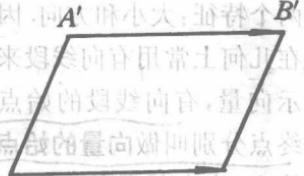


图 1-3

那么这两个向量就相等。显然，两个向量是否相等与它们的始点无关，只由它们的模和方向决定。这种始点可任意选取，而只由模和方向决定的向量叫做自由向量。在自由向量的意义下，相等的向量都看作是同一个向量。由于自由向量始点的任意性，按需要我们可以把一些向量平行移动到同一始点。

定义 1.1.3 模相等，但方向相反的向量叫做互为反向量，向量 a 的反向量记作 $-a$ 。

由定义 1.1.3 知， \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{BA} 互为反向量，即

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA} \quad \text{或} \quad -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$

显然还有

$$-(-a) = a.$$

一个向量所在的直线若与一条直线或平面平行，我们就说这个向量与直线或平面平行。

如果把一组平行于某一直线的向量归结到共同的始点，那么这组向量的终点就落在同一直线上。同样，如果把平行于某一平面的一组向量归结到共同的始点，那么这组向量的终点一定落在同一个平面上。

定义 1.1.4 平行于同一直线的一组向量叫做共线向量。零向量与任何共线的向量组共线。若向量 a 与 b 共线，我们就说 a 与 b 平行，记作 $a \parallel b$ 。

显然，对两个非零向量 a, b ，若 $a \parallel b$ ，则 a 与 b 要么同方向，要么反方向。

定义 1.1.5 平行于同一平面的向量组叫做共面向量。零向量与任何共面的向量组共面。

根据定义 1.1.5 知，一组共线向量一定是共面向量，三个向量中如果有两个向量共线，这三个向量一定共面。

定义 1.1.6 一组向量 a, b, c ，当把它们归结到同一始点 O

时,它们的始点不在同一平面上,若 a, b, c 间的相互关系和右手拇指、食指、中指相同,那么我们就称 a, b, c 按顺序构成右手系,如图 1-4 所示。若 a, b, c 之间的相互关系和左手的姆指、食指、中指相同,我们称 a, b, c 按顺序构成左手系,如图 1-5 所示。

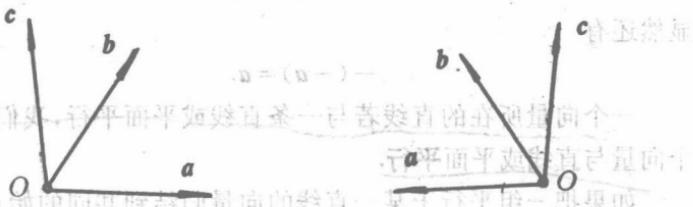
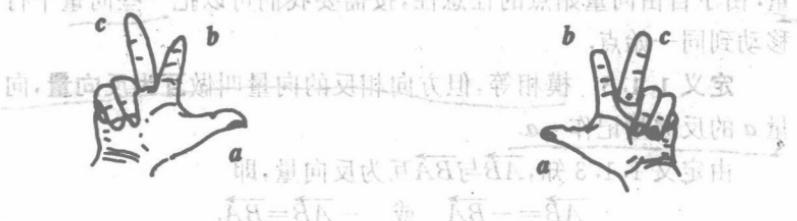
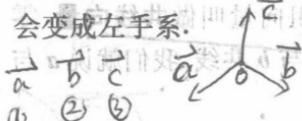


图 1-4

图 1-5

对调 a, b, c 中两个向量的位置,左手系变成右手系,右手系变成左手系。轮换 a, b, c 位置,左手系不会变成右手系,右手系也不会变成左手系。



习题 1.1

右手系

大 1. 下列情形中向量的终点各构成什么图形?

- (1) 把空间中一切单位向量归结到共同的始点;
- (2) 把平行于某一直线的一切单位向量归结到共同的始点;
- (3) 把平行于某一直线的一切向量归结到共同的始点。

2. 设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心,在向量 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}$ 中,哪些向量是相等的?

3. 设四边形 $ABCD$ 是一个菱形,在下列各对向量中,哪对是

什么是力的平行四边形法则

什么是向量加法

向量加法的几何意义

向量加法的性质及定义

什么是多边形法则

向量减法的几何意义

相等的向量，哪对是相反向量？

判断(1) \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{DC} ，(2) \overrightarrow{BC} 与 \overrightarrow{DA} 。

4. 在平面上给定了一个四边形 $ABCD$ ，点 K, L, M, N 分别是边 AB, BC, CD, DA 的中点。求证: $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$ 。当 $ABCD$ 是空间四边形时，等式还成立吗？

5. 设 $ABCD-EFGH$ 是一个平行六面体。试从向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EF}$ 中找出共线向量和共面向量。

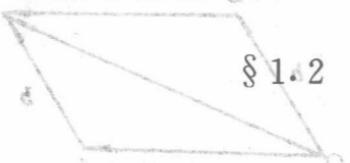
6. 若 a, b, c 按顺序构成右手系，则

(1) a, c, b ;

(2) c, a, b ;

(3) $-a, b, c$ 。

按顺序各构成什么系？



§ 1.2 向量的加减法

1. 向量的加法

在物理学中，位移的合成用“三角形法则”，即如果质点从 O 点作位移 a 到 A 点，再从 A 点作位移 b 到 B 点，那么合起来就得到从 O 到 B 的位移 c ，如图 1-6 所示。力的合成通常用“平行四边形法则”，即作用于一点 O 的两个力 a, b 的合力是以 a, b 为邻边的平行四边形的对角线 c ，如图 1-7 所示。

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

O 为原点

a 为第 1 步位移

b 为第 2 步位移

c 为合位移

图 1-6

<math

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

向量加法

位移和力的这种合成法则对于一般向量也有意义.

定义 1.2.1 设已知向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} , 以空间任意一点 O 为始点, 作向量 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, 得一折线 OAB , 从折线的端点 O 到另一端点 B 的向量 $\overrightarrow{OB} = \mathbf{c}$ 叫做两向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的和, 记作 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. 由两向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 求它们和的运算叫做向量加法.

根据定义 1.2.1, 由图 1-6 我们有

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \quad (1.2-1)$$

这种求两个向量和的方法叫做三角形法则.

$$\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$$

在自由向量的意义下, 两个向量的和是唯一的.

量合成的“平行四边形法则”可归结为“三角形法则”. 根据图 1-8 与定义 1.1.2, 我们有

定理 1.2.1 如果两向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 不共线, 在空间中任取一点 O , 作

$\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 以 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 为邻边

作一平行四边形 $OACB$, 那么对角线向量 $\overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

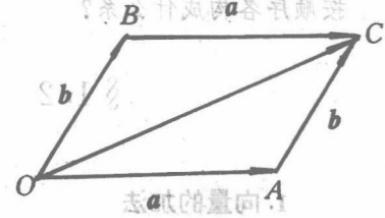
这种求两个向量和的方法叫做平行四边形法则.

根据定义 1.2.1, 显然有

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{a} \quad (1.2-2)$$

$$\overrightarrow{a} + (-\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}. \quad (1.2-3)$$



定理 1.2.2 向量的加法满足下面的运算规律.

1) 交换律:

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}; \quad (1.2-4)$$

2) 结合律:

$$(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}). \quad (1.2-5)$$

证 1) 先证交换律. 当向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 不共线时, 由图 1-8 可知

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC},$$

$$\text{左边} = \overrightarrow{OD} \quad (\Delta \text{丙})$$

$$\text{右边} = \overrightarrow{OD} \quad (\Delta \text{丙})$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$$

O, A, B 不一定共线

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$$

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c} \quad (\square)$$

$$\overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c} \quad (\triangle)$$

$$b + a = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

所以

当 a 与 b 共线时, 请读者自行证明.

2) 再证结合律. 自空间任取一点 O 作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{AB} = b, \overrightarrow{BC} = c$, 如图 1-9 所示.

根据向量加法的定义有

$$(a+b)+c = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC},$$

$$a+(b+c) = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC},$$

所以 $(a+b)+c = a+(b+c)$.

由于向量的加法满足交换律和结合律, 三个向量 a, b, c

之和就可以简写为 $a+b+c$.

推广到任意有限个向量 a_1, a_2, \dots, a_n ,

\dots, a_n 的和, 就可以记作

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

有限个向量 a_1, a_2, \dots, a_n

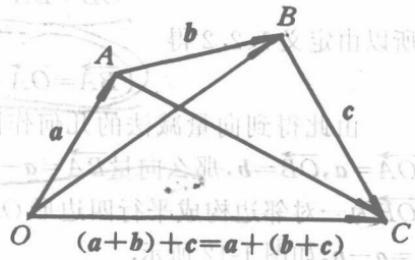
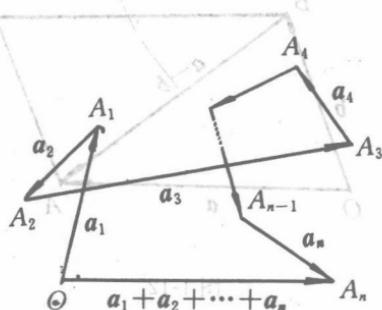


图 1-9

相加的作图法可以由向量的三角形法则推广如下:

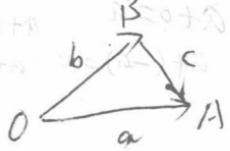
自任意点 O 开始, 依次引 $\overrightarrow{OA_1} = a_1, \overrightarrow{A_1A_2} = a_2, \dots, \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = a_n$, 由此得一折线 $OA_1A_2 \dots A_n$, 如图 1-10 所示, 于是向量 $\overrightarrow{OA_n}$ 就是 n 个向量 a_1, a_2, \dots, a_n 的和



即 $\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$

特别地, 当 A_n 与 O 重合时, 它们的和为零向量 0 .

用这种求和的方法叫做多边形法则.



$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

2. 向量的减法

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA}$$

我们知道,在代数中数量的减法是加法的逆运算.类似地,向量的减法可定义为向量加法的逆运算.

定义 1.2.2 设向量 b 与 c 的和等于向量 a ,即 $b+c=a$,那么向量 c 就称为向量 a 与 b 的差,记作 $c=a-b$.由向量 a, b 求它们的差 $a-b$ 的运算叫做向量减法.

根据向量加法的三角形法则,总有

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA},$$

所以由定义 1.2.2 得

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}.$$

(1.2-7)

由此得到向量减法的几何作图法:自空间任意点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=a$, $\overrightarrow{OB}=b$,那么向量 $\overrightarrow{BA}=a-b$,如图 1-11 所示.如果以 \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$,那么显然它的对角线 $\overrightarrow{BC}=a-b$,如图 1-12 所示.

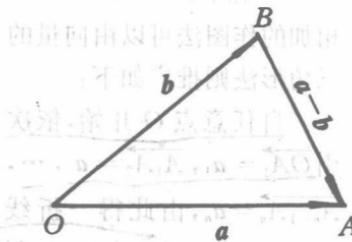


图 1-11

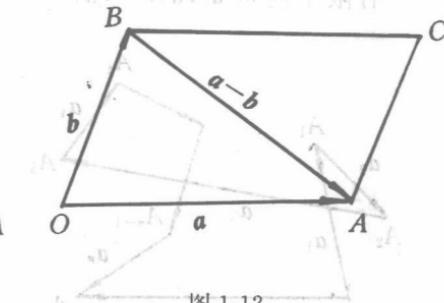


图 1-12

利用反向量,可以把向量的减法运算转化为加法运算.

因为如果 $c=a-b$,即 $b+c=a$,在等式两边各加 b 的反向量 $-b$,利用 $b+(-b)=0$,便得 $c=a+(-b)$,因此

$$a-b=a+(-b).$$

这表明求 a 与 b 之差可变为求 a 与 b 的反向量 $-b$ 之和.又因