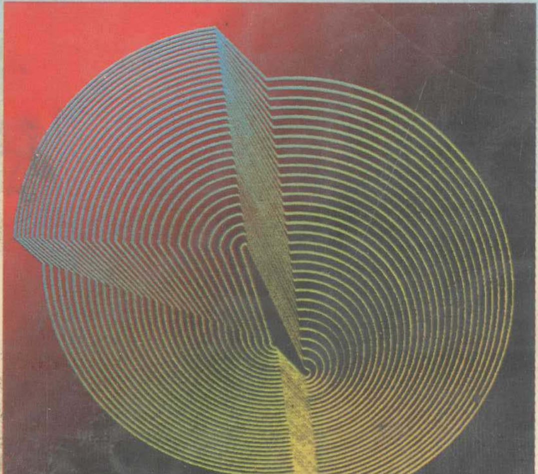
解析几何

JIEXI JIHE

主　编　马淑云　王定江



河南大学出版社

解析几何

主　编　马淑云　王定江

副主编　王　阳　王晓力　王守印

王永忠　吴景珠　樊明智

河南大学出版社

图书在版编目(CTP)数据

解析几何/马淑云主编. 一河南:河南大学出版社,1998. 10
高等师范专科学校教材
ISBN 7-81041-588-3

I. 解… II. 马… III. 解析几何-高等学校:师范学校-教材
IV. 0182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 24879 号

河南大学出版社出版
(开封市明伦街 85 号)
中科院开封印刷厂印刷
河南省新华书店发行
1998 年 10 月第 1 版 1998 年 10 月第 1 次印刷
开本:850×1168 1/32 印张:13
字数:326 千字 印数:1—3000 册
定价:12.80 元

前言

解析几何是高等师范专科学校数学专业一门重要的专业基础课.本课程开设的目的,为的是培养学生系统掌握空间解析几何的基本知识和基本理论,提高运用代数的方法解决几何问题的能力,为学习后继课程打好基础,也为将来能够较好地处理中学数学教材中的有关问题作好准备.

我们在对师专的教学、科研、师资、教材和教育改革等情况调查的基础上,特邀了一批有丰富教学经验和较高学术水平的教师编写了这本教材.在编写的指导思想和具体实践上,我们力求使这本教材具有以下特点:

1.严格以师专教学计划和教学大纲为依据,坚持立足师专这个特定层次,从师专的培养目标和教学实际出发,力求使教材内容的深度、广度都充分体现培养初中教师的要求.本书较系统地介绍了空间解析几何的基本内容,同时也对与中学解析几何联系较为密切的二次曲线理论,在中学平面解析几何的基础上作了适当的拓宽与补充.

2.贯彻理论联系实际的原则,系统阐述解析几何课程的基本理论、基本知识和基本技能.为帮助读者及时巩固基本概念,掌握解题的方法和技巧,在每一节后配备了适量的习题,并注意学生的思维能力、自学能力和表达能力的培养.书后附有学习指导和补充题,并在书末附有答案与提示.

3.力求反映师专教育改革的状况和教学科研水平.按照适当够用、分类提高的原则,做到取材适度,深入浅出,循序渐进,条理清楚.注意与相关课程(如高等代数)的协调,减少相应部分的繁琐

论证，避免有关内容重复，以便更好地适应于师专的教学需要.

本书编写的依据是师专二年制教学大纲，全书共分六章，教学时数为 64 学时，带“*”号的内容可根据情况选学.参加本书编写的有：王阳（南阳师专，§1.3～§1.10）、樊明智（许昌师专，§2.1～§2.3）、王定江（平顶山师专，§1.1～1.2、§3.1～§3.5）、马淑云（南阳师专，§4.4～§4.8）、吴景珠（周口师专，§3.6～§3.8、§4.1～§4.3、）、王守印（新乡师专，§5.4～§5.6）、王永忠（新乡师专，§5.1～§5.3、§6.1）、王骁力（南阳师专，§6.2～§6.4），所编内容均含习题、解答和学习指导。全书由主编马淑云审阅后定稿.

限于我们的水平，书中的不妥与错误在所难免，恳切希望使用本书的老师和广大读者批评指正.

编　者

1998 年 5 月

13608453600

别为一时的得失而迷失了自己，活着就得有耻辱感

爱需要智慧也更需要勇气，一个在爱情面前怯懦不前

的人，是不会收获[illegible]的！

好多的累都是因为我们不善于说"不"！

目 录

CEA99012

预习:

$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$

$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$

第一章 向量与坐标

难(抽象)

解析几何是一门用代数方法研究几何问题的学科. 它的最基本的作法是把几何结构代数化、数量化. 本章将介绍向量的有关概念、向量的各种运算和坐标. 罗氏几何 罗曼

§1.1 向量的概念

$\left\{\begin{array}{l}\text{向量}\\\text{坐标}\\\text{坐标变换}\end{array}\right.$

1. 向量的概念及表示

在几何学、力学、物理学以及日常生活中,我们常遇到两类量:一类量比较简单,只要规定单位后,都可以用一个数来表示,如长度、面积、时间、温度等. 这种只有大小的量叫做**数量**. 另一种量比较复杂,除了要知道它们的大小外,还必须指出它们的方向,如位移、力、速度等. 这种量就是向量.

定义 1.1.1 既有大小又有方向的量叫做**向量**,或称**矢量**.

我们容易看出,向量有两个特征:大小和方向. 因此在几何上常用有向线段来表示向量,有向线段的始点与终点分别叫做**向量的始点与终点**,有向线段的方向表示向量的方向,有向线段的长度表示向量的大小.

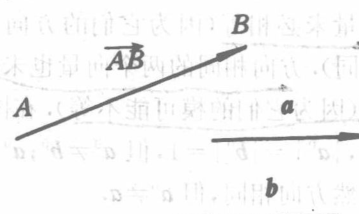


图 1-1

向量的书写方法:始点是 A、终点是 B 的向量记作$\overrightarrow{AB}$,有时用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{x},\ldots$ 来记向量,如图 1-1 所示.

$\vec{a}\ \ \vec{b}\ \ \vec{c}\ \ \vec{x}$

2. 与向量有关的概念

向量的大小叫做向量的**模**或**长度**. 向量$\overrightarrow{AB}$与 $\boldsymbol{a}$ 的模记作$|\overrightarrow{AB}|$与$|\boldsymbol{a}|$.

模等于 1 的向量叫做**单位向量**或**幺向量**，与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量叫做**向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量**. 常用 $\boldsymbol{a}^0$ 表示.

模等于 0 的向量叫做**零向量**，记作 **0**. 它是始点与终点重合的向量，零向量的方向不定. 不是零向量的向量叫做**非零向量**.

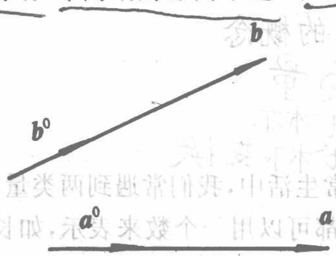


图 1-2

两个非零向量，通过平移后若能重合（始点与始点、终点与终点重合），则这两个向量的模相等方向相同. 反之，若两个非零向量的模相等方向相同，那么平移后两个向量显然重合. 因此有

定义 1.1.2 如果两个向量的模相等且方向相同，那么叫做**相等向量**. 所有的零向量都相等. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

必须注意，由于向量不仅有大小还有方向，因此模相等的两个向量未必相等（因为它们的方向可能不同）. 方向相同的两个向量也未必相等（因为它们的模可能不等）. 在图1-2中，$|\boldsymbol{a}^0|=|\boldsymbol{b}^0|=1$，但 $\boldsymbol{a}^0\neq\boldsymbol{b}^0$；$\boldsymbol{a}^0$ 与 $\boldsymbol{a}$ 虽然方向相同，但 $\boldsymbol{a}^0\neq\boldsymbol{a}$.

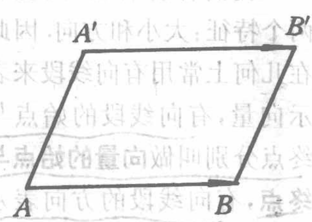


图 1-3

根据定义 1.1.2，对于不在同一直线上的两个相等的非零向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{A'B'}$，如果用两线段分别连结它们的一对始点 A 与 A'，一对终点 B 与 B'，那么显然得到一个平行四边形 $ABB'A'$，如图 1-3 所示. 反过来，如果用这种作图方法从两个向量得到一个平行四边形时，

那么这两个向量就相等.

显然,两个向量是否相等与它们的始点无关,只由它们的模和方向决定. 这种始点可任意选取,而只由模和方向决定的向量就叫做**自由向量**. 在自由向量的意义下,相等的向量都看作是同一个向量. 由于自由向量始点的任意性,按需要我们可以把一些向量平行移动到同一始点.

定义 1.1.3 模相等,但方向相反的向量叫做**互为反向量**,向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量记作 $-\boldsymbol{a}$.

由定义 1.1.3 知,$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{BA}$互为反向量,即

$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA} \quad \text{或} \quad -\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}.$$

显然还有

$$-(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}.$$

一个向量所在的直线若与一条直线或平面平行,我们就说这个向量与直线或平面**平行**.

如果把一组平行于某一直线的向量归结到共同的始点,那么这组向量的终点就落在同一直线上. 同样,如果把平行于某一平面的一组向量归结到共同的始点,那么这组向量的终点一定落在同一个平面上.

定义 1.1.4 平行于同一直线的一组向量叫做**共线向量**. 零向量与任何共线的向量组共线. 若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线,我们就说 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

显然,对两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 要么同方向,要么反方向.

定义 1.1.5 平行于同一平面的向量组叫做**共面向量**. 零向量与任何共面的向量组共面.

根据定义 1.1.5 知,一组共线向量一定是共面向量,三个向量中如果有两个向量共线,这三个向量一定共面.

定义 1.1.6 一组向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,当把它们归结到同一始点 O

时，它们的始点不在同一平面上，若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 间的相互关系和右手拇指、食指、中指相同，那么我们就称 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 按顺序构成**右手系**，如图 1-4 所示. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 之间的相互关系和左手的姆指、食指、中指相同，我们称 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 按顺序构成**左手系**，如图 1-5 所示.

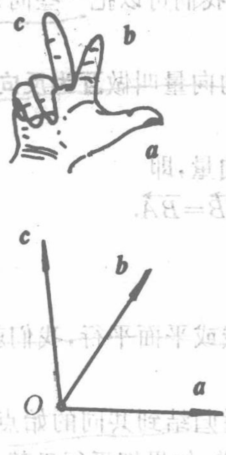


图 1-4

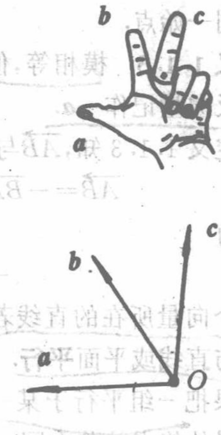


图 1-5

对调 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 中两个向量的位置，左手系变成右手系，右手系变成左手系. 轮换 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 位置，左手系不会变成右手系，右手系也不会变成左手系.

$\vec{a}$ $\vec{b}$ $\vec{c}$
① ② ③
大 食 中

习 题 1.1

右手系

1. 下列情形中向量的终点各构成什么图形？

(1) 把空间中一切单位向量归结到共同的始点；

(2) 把平行于某一直线的一切单位向量归结到共同的始点；

(3) 把平行于某一直线的一切向量归结到共同的始点.

2. 设 O 是正六边形 $ABCDEF$ 的中心，在向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DE},\overrightarrow{EF},\overrightarrow{FA}$ 中，哪些向量是相等的？

3. 设四边形 $ABCD$ 是一个菱形，在下列各对向量中，哪对是

什么是力的平行四边形法则　　向量加法的性质及定义
什么是向量加法　　什么是多边形法则
向量加法的几何意义　　6 向量减法的定义是什么
7 向量减法的几何意义是什么
8 如何证明某个向量是零向量

相等的向量，哪对是相反向量？

(1) $\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{DC}$；　(2) $\overrightarrow{BC}$与$\overrightarrow{DA}$.

4. 在平面上给定了一个四边形 $ABCD$，点 K,L,M,N 分别是边 AB,BC,CD,DA 的中点. 求证：$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$. 当 $ABCD$ 是空间四边形时，等式还成立吗？

5. 设 $ABCD\text{-}EFGH$ 是一个平行六面体. 试从向量$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{EF}$中找出共线向量和共面向量.

6. 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 按顺序构成右手系，则

(1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$；　(2) $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$；　(3) $-\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$

按顺序各构成什么系？

§1.2　向量的加减法

数的加法定义
已知 a, b 求 a+b 的和
运算

1. 向量的加法

在物理学中，位移的合成用"三角形法则"，即如果质点从 O 点作位移 $\boldsymbol{a}$ 到 A 点，再从 A 点作位移 $\boldsymbol{b}$ 到 B 点，那么合起来就得到从 O 到 B 的位移 $\boldsymbol{c}$，如图 1-6 所示. 力的合成通常用"平行四边形法则"，即作用于一点 O 的两个力 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的合力是以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线 $\boldsymbol{c}$. 如图 1-7 所示.

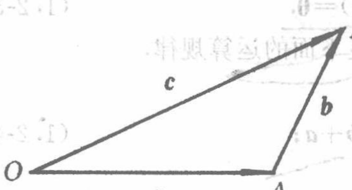


图 1-6

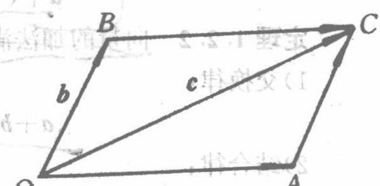


图 1-7

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

向量加法

位移和力的这种合成法则对于一般向量也有意义.

定义

定义 1.2.1 设已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,以空间任意一点 O 为始点,作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,得一折线 OAB,从折线的端点 O 到另一端点 B 的向量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{c}$ 叫做两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 由两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 求它们和的运算叫做**向量加法**.

根据定义 1.2.1,由图 1-6 我们有

$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{OA_2}$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}. \tag{1.2-1}$$

这种求两个向量和的方法叫做**三角形法则**.

$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

在自由向量的意义下,两个向量合成的"平行四边形法则"可归结为"三角形法则". 根据图 1-8 与定义 1.1.2,我们有

定理 1.2.1 如果两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,在空间中任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,以 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$ 为邻边作一平行四边形 $OACB$,那么对角线向量 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. (向量加法的意义)

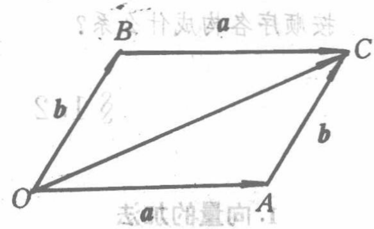


图 1-8

这种求两个向量和的方法叫做**平行四边形法则**.

三角形法则不同于平行四边形法则。

根据定义 1.2.1,显然有

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}, \tag{1.2-2}$$

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}. \tag{1.2-3}$$

定理 1.2.2 向量的加法满足下面的运算规律.

1)交换律:

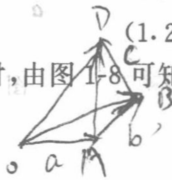
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}; \tag{1.2-4}$$

2)结合律:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \tag{1.2-5}$$

证 1)先证交换律. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时,由图 1-8 可知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$



左边 $=\overrightarrow{OD}$ (△两)

右边 $=\overrightarrow{OD}$ (△两)

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

O、A、B不一定共线

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.　　$a+0=a$　　$a+b=b+a$

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ (▱)　　$a+(-a)=0$　　$(a+b)+c=a+b+$

$\vec{b}+\vec{a}=\vec{c}$ (△)

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

所以
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}.$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线时，请读者自行证明.

2）再证结合律. 自空间任取一点 O 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$，如图 1-9 所示.

根据向量加法的定义有

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法满足交换律和结合律，三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 之和就可以简写为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$. 推广到任意有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和，就可以记作

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

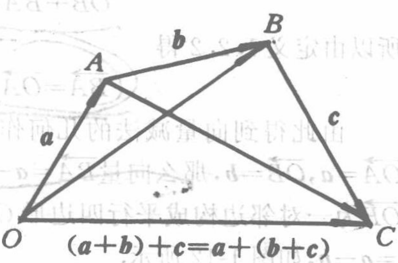


图 1-9

有限个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 相加的作图法可以由向量的三角形法则推广如下：

自任意点 O 开始，依次引 $\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，$\cdots$，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，由此得一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$，如图 1-10 所示，于是向量 $\overrightarrow{OA_n}$ 就是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的和

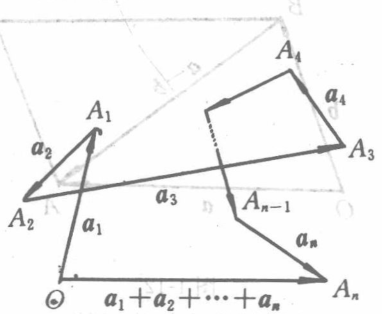


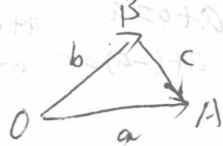
图 1-10

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

即
$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}. \tag{1.2-6}$$

特别地，当 A_n 与 O 重合时，它们的和为零向量 $\boldsymbol{0}$.

这种求和的方法叫做**多边形法则**.



$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

2. 向量的减法

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}$

我们知道，在代数中数量的减法是加法的逆运算. 类似地，向量的减法可定义为向量加法的逆运算.

定义 1.2.2 设向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 的和等于向量 $\boldsymbol{a}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，那么向量 $\boldsymbol{c}$ 就称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**差**，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 由向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 求它们的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的运算叫做**向量减法**.

根据向量加法的三角形法则，总有

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA},$$

所以由定义 1.2.2 得

$$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}. \tag{1.2-7}$$

由此得到向量减法的几何作图法：自空间任意点 O 引向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，那么向量 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 1-11 所示. 如果以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 为一对邻边构成平行四边形 $OACB$，那么显然它的对角线 $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，如图 1-12 所示.

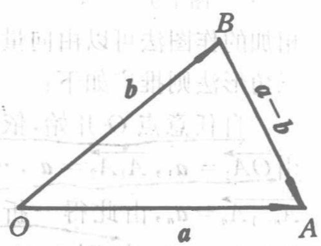


图 1-11

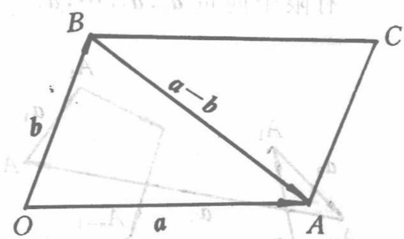


图 1-12

利用反向量，可以把向量的减法运算转化为加法运算.

因为如果 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，在等式两边各加 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$，利用 $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$，便得 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，因此

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}). \tag{1.2-8}$$

这表明求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差可变为求 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和. 又因