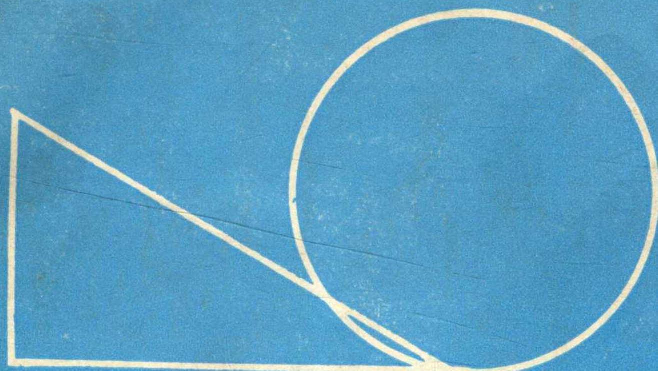


高等数学习题解答

（上册）

王承中 主编

李玉亚 刘俊英 杜文思
戚兆德 周凤树 陈义元 编写

吉林工学院高等教育研究室

前　　言

由中央广播电视大学编辑出版的《高等数学习题集》（理工版），内容丰富，选题新颖，并配有部分难度较大的习题，是目前国内已出版的习题集中较理想的一种。它包括函数、极限、连续、一元微积分、矢量代数、空间解析几何、多元微积分、场论、级数和微分方程等，共2511个习题。为满足我院广大师生及社会各方面读者的需要，我们将习题集中的全部习题做了详尽解答，汇编成《高等数学习题解答》。它可供广播电视大学、职工业余大学读者使用，也可供普通工科院校师生以及志在报考研究生的读者使用。

参加题解编写工作的有：李玉亚、刘俊英、杜文思、周凤树、戚兆德、陈义元、王承中。并由主编王承中进行统改定稿。

在编写过程中我们纠正了原习题集中印刷上的错误，对部分与原书所附答案不一致的习题解，进行了反复推敲，还对个别习题做了改动。

由于编写时间仓促和我们水平有限，解答中一定会有错误之处，诚恳地希望读者批评指正。

在本书编写出版过程中，我们得到了吉林工学院高教研究室、长春市第五印刷厂的大力支持，在此深表谢意。

编　　者

一九八五年一月

目　录

第一章 函数及其图形

预 备 知 识

1.1 对照写出等价的不等式与区间：

如 （1）$|x|<3$ $\Longleftrightarrow$ 2° $-3<x<3$

（1）$|x|<3$	1° $4<x<6$
（2）$|x-1|<3$	2° $-3<x<3$
（3）$|3-2x|<1$	3° $x>3$ 或 $x<-1$
（4）$|1+2x|\leqslant 1$	4° $x>2$
（5）$|x-1|>2$	5° $-2<x<4$
（6）$|x+2|\geqslant 5$	6° $-\sqrt{3}\leqslant x\leqslant -1$ 或 $1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$
（7）$|5-x^{-1}|<1$	7° $1<x<2$
（8）$|x-5|<|x+1|$	8° $x\leqslant -7$ 或 $x\geqslant 3$
（9）$|x^2-2|\leqslant 1$	9° $\frac{1}{6}<x<\frac{1}{4}$
（10）$x<x^2-12<4x$	10° $-1\leqslant x\leqslant 0$

解：（1）$\Longleftrightarrow$2°；（2）$\Longleftrightarrow$5°；（3）$\Longleftrightarrow$7°；（4）$\Longleftrightarrow$10°；（5）$\Longleftrightarrow$3°；（6）$\Longleftrightarrow$8°；（7）$\Longleftrightarrow$9°；（8）$\Longleftrightarrow$4°；（9）$\Longleftrightarrow$6°；（10）$\Longleftrightarrow$1°；

1.2 试讨论下述命题的真伪，并申明理由：

（1）$x<5$ 就是 $|x|<5$

解：此命题不真。因为 $|x|<5$ 与 $-5<x<5$ 等价，故与 $x<5$ 不等价。

（2）$|x-5|<2$ 就是 $3<x<7$

解：此命题真。因为 $|x-5|<2$ 即 $-2<x-5<2$，所以 $3<x<7$，

（3）$|1+3x|\leqslant 1$ 即 $x\geqslant -\frac{2}{3}$

解：此命题不真。因为 $-1\leqslant 1+3x\leqslant 1$ 与 $-\frac{2}{3}<x\leqslant 0$ 等价，故 x 不能大于零，而 $x\geqslant -\frac{2}{3}$ 允许 x 大于零。

（4）不存在实数 x，使得 $|x-1|=|x-2|$。

解：此命题不真。由$(x-1)^2=(x-2)^2$得$x=\frac{3}{2}$。所以存在实数$\frac{3}{2}$能使等$|x-1|=|x-2|$成立。

1.3 求下列不等式的公共部分，并在数轴上表示出来。

（1）$-11\leqslant x\leqslant 8$与$-6\leqslant x<11$。 **解**：公共部分为 $-6\leqslant x<8$。

（2）$-8\leqslant x<6$或$-4<x\leqslant 2$。 **解**：公共部分为 $-4<x\leqslant 2$。

1.4证明下列各式：

（1）$|-x|=|x|$。

证：由绝对值定义

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x\leqslant 0,\end{cases}\qquad |-x|=\begin{cases}-(-x)=x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$$

可知，$|x|=|-x|$。

（2）$|x-y|=|y-x|$。

证：由1.4（1）知，$|x-y|=|-(y-x)|=|y-x|$。

（3）$|x|=\sqrt{x^2}$。

证：因为$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ $\sqrt{x^2}=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$

所以，$|x|=\sqrt{x^2}$

（4）$|x/y|=|x|/|y|$ $(y\neq 0)$。

证：由除法法则及绝对值定义，有

$$\left|\frac{x}{y}\right|=\begin{cases}\frac{x}{y}, & x\cdot y>0,\\ 0, & x=0,\\ -\frac{x}{y}, & x\cdot y<0;\end{cases}\qquad \frac{|x|}{|y|}=\begin{cases}\frac{x}{y}, & x>0,\ y>0\\ \frac{-x}{-y}=\frac{x}{y}, & x<0,\ y<0\\ 0, & x=0\\ \frac{x}{-y}=-\frac{x}{y}, & x>0,\ y<0,\\ \frac{-x}{y}=-\frac{x}{y}, & x<0,\ y>0.\end{cases}$$

综合上述，有$|x/y|=|x|/|y|$。

（5）$|x+y|\leqslant|x|+|y|$

证：由绝对值的意义，有

$-|x|\leqslant x\leqslant|x|$， $-|y|\leqslant y\leqslant|y|$， 式相加得

$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant|x|+|y|$，

即 $|x+y|\leqslant|x|+|y|$。

（6）$|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$

证：将$|x|-|y|$看做是一个数，第一个绝对值不等式 $|x|-|y|\leqslant\big||x|-|y|\big|$显

然成立。不论 x，y 是什么实数，都有 $|x||y|\geqslant xy$，$|x|^2=x^2$，$|y|^2=y^2$

不等式两端同乘 -2，得 $-2|x||y|\leqslant -2xy$，

$|x|^2-2|x||y|+|y|^2\leqslant x^2-2xy+y^2$，　$(|x|-|y|)^2\leqslant(x-y)^2$，

$\sqrt{(|x|-|y|)^2}\leqslant\sqrt{(x-y)^2}$，　∴ $||x|-|y||\leqslant|x-y|$，

再证第三个不等式。∵ $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$，$-|y|\leqslant -y\leqslant|y|$，

二不等式相加得 $-(|x|+|y|)\leqslant x-y\leqslant|x|+|y|$。

∴ $|x-y|\leqslant|x|+|y|$。

综上所述，有 $|x|-|y|\leqslant||x|-|y||\leqslant|x-y|\leqslant|x|+|y|$。

（7）已知 a，b，m 为正数，且 $a<b$ 则 $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$

证：将 $b>a$ 两端同乘以正数 m，同时加上 ab 得

$ab+bm>ab+am$，　$b(a+m)>a(b+m)$。

因 b，$b+m$ 都是正数，用 $b(b+m)$ 同除不等式两端得 $\dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b}$。

（8）若 $a>0$，$b>0$，则 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$

证：∵ a，b 都是正数，故有 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$，$a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b\geqslant 0$，

∴ $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$。

（9）$x>0$，则 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 当且仅当 $x=1$ 时，等式成立

证：因 x 为正数，显然有 $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0$，$x-2\sqrt{x}\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}\geqslant 0$，

所以 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ 当且仅当 $\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$ 时等号才成立，即当且仅当 $x=1$ 时，等号成立。

（10）$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$

证：用数学为归纳法证明之。当 $n=2$ 时，显然有 $|x_1+x_2|\leqslant|x_1|+|x_2|$

设当 $n=k-1$ 时不等式成立，证明 $n=k$ 时不等式亦成立。

$|x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}|\leqslant|x_1|+x_2|+\cdots+|x_{k-1}|$

$|(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1})+x_k|\leqslant|x_1+x_2+\cdots+x_{k-1}|+|x_k|$

$\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{k-1}|+|x_k|$

所以 $|x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$。

1.5 解不等式

（1）$-2<\dfrac{1}{x+2}<2$

解：由题设知 $\left|\dfrac{1}{x+2}\right|<2$，$|x+2|>\dfrac{1}{2}$

假定　$x+2>0$，　则　$x+2>\frac{1}{2}$　有　$x>-\frac{3}{2}$

假定　$x+2<0$，　则　$-(x+2)>\frac{1}{2}$　$x+2<-\frac{1}{2}$，　有 $x<-\frac{5}{2}$

所以解为：$x<-\frac{5}{2}$　或　$x>-\frac{3}{2}$

（2）$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|>\frac{x-2}{x+1}$

解：当 $\frac{x-2}{x+1}>0$ 时，有 $\left|\frac{x-2}{x+1}\right|=\frac{x-2}{x+1}$，$\frac{x-2}{x+1}>\frac{x-2}{x+1}$，这是不可能的。

当 $\frac{x-2}{x+1}<0$ 时，$\left|\frac{x-2}{x+1}\right|=-\frac{x-2}{x+1}$　不等式为　$-\frac{x-2}{x+1}>\frac{x-2}{x+1}$

即 $\frac{x-2}{x+1}<0$　因此，$\begin{cases}x-2>0\\x+1<0\end{cases}$　或　$\begin{cases}x-2<0\\x+1>0\end{cases}$

即　或　$\begin{cases}x>2\\x<-1\end{cases}$　或　$\begin{cases}x<2\\x>-1\end{cases}$

∵第一个不等式组无解，∴原不等式之解为：$-1<x<2$

（3）$|x-A|<\varepsilon$　（$\varepsilon>0$ 为常数）

解：由绝对值不等式知

$-\varepsilon<x-A<\varepsilon$，　从而解得　$A-\varepsilon<x<A+\varepsilon$

（4）　$\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}>0$

解：当 $x=-1$，$x=2$ 时，题给分式的值是 0，当　$x=\frac{1}{3}$ 时，题给分式失去意义。我们以这三个数 -1，$\frac{1}{3}$，2 为界把全体实数划分成 4 个部分，列成下表来考察：

	$x<-1$	$-1<x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<2$	$x>2$
$x+1$	−	+	+	+
$x-2$	−	−	−	+
$3x-1$	−	−	+	+
$\frac{2(x+1)(x-2)}{3x-1}$	−	+	−	+

由表可看出，原不等式的解是　$-1<x<\frac{1}{3}$　或　$x>2$

1.6　解高次不等式

（1）$|x^2-3x+2|\geqslant x^2-3x+2$

解：由绝对值性质知，x 为一切实数时，不等式皆真。不等式的解为 $-\infty < x < \infty$

（2）$x^2-7x+12>0$　　　　**解：** $(x-3)(x-4)>0$

由 $\begin{cases}x-3>0\\x-4>0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x>3\\x>4\end{cases} \Longrightarrow x>4$ 或 $\begin{cases}x-3<0\\x-4<0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x<3\\x<4\end{cases} \Longrightarrow x<3$

即不等式的解是　$x<3$　或　$x>4$

（3）$|x(1-x)|\leqslant 0.5$

解：可将不等式写成　$|x(x-1)|\leqslant \frac{1}{2}$　　$-\frac{1}{2}\leqslant x^2-x\leqslant\frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{2}\leqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{2}\qquad -\frac{1}{4}\leqslant\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{4}$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{4}\qquad \left|x-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant x-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \frac{1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

故不等式解为　$\frac{1-\sqrt{3}}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

（4）$-2x^2+4x-7>0$

解： $2x^2-4x+7<0$　　$x^2-2x+1+\frac{5}{2}<0$　　$(x-1)^2+\frac{5}{2}<0$

不等式左端恒大于 0，故不等式无解。

（5）$x^3+x^2-30x<0$　　　**解：** $x(x+6)(x-5)<0$

	$x<-6$	$-6<x<0$	$0<x<5$	$x>5$
x	−	−	+	+
$x+6$	−	+	+	+
$x-5$	−	−	−	+
$x(x+6)(x-5)$	−	+	−	+

不等式的解为　　$x<-6$　或　$0<x<5$

1.7　解不等式组

（1）$\begin{cases}x-2(x-3)>4\\ \frac{x}{2}-(x-3)>\frac{1}{4}\end{cases}$

解： $\begin{cases}x-2x+6>4\\x-2x+6>\frac{1}{2}\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x<2\\x<5\frac{1}{2}\end{cases}$　不等式组的解为　$x<2$

（2）$\begin{cases}x+5\leqslant(x+1)(x+2)\\x(x+1)+x(x+2)>(2x-1)(x+3)\end{cases}$

解： $\begin{cases}x^2+2x-3\geqslant0\\2x<3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(x+3)(x-1)\geqslant0\\2x<3\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\geqslant1 \text{ 或 } x\leqslant-3\\x<3/2\end{cases}$

不等式组的解为 $x\leqslant -3$ 或 $1\leqslant x<\frac{3}{2}$

求 函 数 值

1.8 已知函数 $f(x)=x+1$ 求：$f(2)$，$f(-2)$，$-f(2)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$\frac{1}{f(2)}$，$f(a+b)$。

解：$f(2)=2+1=3$ $\qquad f(-2)=-2+1=-1$

$-f(2)=-(2+1)=-3$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+1=1\frac{1}{2}$

$\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$ $\qquad f(a+b)=a+b+1$

1.9 设 $\varphi(t)=|t-3|+|t-1|$ 求：$\varphi(0)$，$\varphi(1)$，$\varphi(-1)$，$\varphi(-2)$。

解：$\varphi(0)=|0-3|+|0-1|=3+1=4$；

$\varphi(1)=|1-3|+|1-1|=|-2|+0=2$；

$\varphi(-1)=|-1-3|+|-1-1|=4+2=6$；

$\varphi(-2)=|-2-3|+|-2-1|=5+3=8$。

1.10 求 $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 设：

(1) $f(x)=ax+b$

解：$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{a(x+h)+b-ax-b}{h}=a$

(2) $f(x)=x^2+4x+1$

解：$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{(x+h)^2+4(x+h)+1-x^2-4x-1}{h}$

$=\frac{x^2+2xh+h^2+4x+4h+1-x^2-4x-1}{h}=2x+4+h$

(3) $f(x)=\frac{1}{x}$

解：$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{x-x-h}{h(x+h)x}=\frac{-1}{x(x+h)}$

1.11 已知 $G(u)=3$ 求 $G(0)$，$G(u+\Delta u)-G(u)$。

解：$G(0)=3$ ，$G(u+\Delta u)-G(u)=3-3=0$。

1.12 设 $\Psi(x)=e^x-1$，求 $\Psi(0)$，$\Psi(\varepsilon)$，$\Psi(\ln 2)$ 。

解：$\Psi(0)=e^0-1=1-1=0$ $\qquad \Psi(\varepsilon)=e^{\varepsilon}-1$

$\Psi(\ln 2)=e^{\ln 2}-1=2-1=1$

1.13 设 $f(x)=\lg x^2$，求 $f(10^3)$，$f(-0.001)$。

解：$f(10^3)=\lg(10^3)^2=\lg 10^6=6$

$f(-0.001)=\lg(-0.001)^2=\lg(0.000001)=-6$

1.14 设 $\varphi(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求$\varphi(-x)$， $\varphi(x)+1$， $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$， $\dfrac{1}{\varphi(x)}$。

解：$\varphi(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$ $\qquad$ $\varphi(x)+1=\dfrac{1-x}{1+x}+1=\dfrac{2}{1+x}$

$$\varphi\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)}=\frac{x-1}{x+1} \qquad \frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1+x}{1-x}$$

1.15 设$f(t)=\begin{cases}\sin t & -2<t<0\\ 1+t^2 & 0\leqslant t<2\end{cases}$ $\qquad$ 求$f(1)$， $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$， $f(4)$

解：$f(1)=1+1^2=2$ $\qquad$ $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1+\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2=1+\dfrac{\pi^2}{4}$

$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ 当 $t=4$时，$f(t)$设有定义。

1.16 若 $G(x)=\begin{cases}|x| & |x|<1\\ 0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$ $\qquad$ 求$G(-1)$，$G(5)$， $G\left(-\dfrac{1}{4}\right)$

解：$G(-1)=0$ $\qquad$ $G\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left|\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $G(5)=0$

$G\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\left|-\dfrac{1}{4}\right|=\dfrac{1}{4}$

1.17 设
$$y=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

（该函数称为符号函数，记为 $\operatorname{sgn}x$），求 $y(0)$，$y(-2)$，$y(100)$。

解：$y(0)=0$ $\qquad$ $y(-2)=-1$ $\qquad$ $y(100)=1$

1.18 已知（1）$f(x)=ax\ \ (a\neq 0)$，（2）$f(x)=\dfrac{1}{x}$，

（3） $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ 且 $f(x)+f(y)=f(z)$，求z

解：（1）$f(z)=f(x)+f(y)=ax+ay=az$ $\qquad$ $z=x+y$

（2）$f(z)=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ $\qquad$ $z=\dfrac{xy}{x+y}$

（3）$f(z)=\ln\dfrac{1+z}{1-z}=\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\ln\dfrac{1+y}{1-y}=\ln\dfrac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$$

$$(1-x)(1-y)+z(1-x)(1-y)=(1+x)(1+y)-z(1+x)(1+y)$$

$$z=\frac{(1+x)(1+y)-(1-x)(1-y)}{(1-x)(1-y)+(1+x)(1+y)}=\frac{x+y}{1+xy}$$

1.19 设$f(u)=\lg u$ 求证：

（1）$f(u)+f(u+1)=f[u(u+1)]$

证：$f(u)+f(u+1)=\lg u+\lg(u+1)=\lg[u(u+1)]=f[u(u+1)]$

（2）$f(x)-f(y)=f(x/y)$

证：$f(x)-f(y)=\lg x-\lg y=\lg(x/y)=f(x/y)$

1.20 设 $\varphi(x)=e^x$，求证：$\varphi(x)\varphi(y)=\varphi(x+y)$ $\varphi(x)/\varphi(y)=\varphi(x-y)$

证：$\varphi(x)\cdot\varphi(y)=e^x\cdot e^y=e^{x+y}=\varphi(x+y)$

$\varphi(x)/\varphi(y)=e^x/e^y=e^{x-y}=\varphi(x-y)$

1.21 设$f(t)=t^2-2\cos t$，求证：$f(-a)=f(a)$

证：$f(-a)=(-t)^2-2\cos(-t)=t^2-2\cos t=f(a)$

1.22 设$f(x)=2x-\sin x$ 求证：$f(-t)=-f(t)$

证：$f(-t)=2(-t)-\sin(-t)=-2t+\sin t=-f(t)$

1.23 设 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ $(a>0)$ 求证：$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

证：$f(x+y)+f(x-y)=\frac{1}{2}\left[a^{x+y}+a^{-(x+y)}\right]+\frac{1}{2}\left[a^{x-y}+a^{-(x-y)}\right]$

$=\frac{1}{2}\left[a^x\cdot a^y+a^{-x}a^{-y}+a^xa^{-y}+a^{-x}a^y\right]=\frac{1}{2}\left[(a^x+a^{-x})a^y+(a^x+a^{-x})a^{-y}\right]$

$=\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)\left(a^y+a^{-y}\right)=2f(x)f(y)$

1.24 设 $f(x)=ax+b$ 且有 $f(0)=-2$，$f(3)=5$ 求$f(2)$。

解：$f(0)=b=-2$，$f(3)=3a-2=5$， $a=\frac{7}{3}$

$f(x)=\frac{7}{3}x-2$， $f(2)=\frac{7}{3}\times2-2=\frac{8}{3}$

1.25 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，且 $f(-2)=0$，$f(0)=1$，$f(1)=5$，

求$f(-1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$。

解：$f(-2)=4a-2b+c=0$ $f(0)=c=1$ $f(1)=a+b+c=5$

解方程组，得 $a=\frac{7}{6}$，$b=\frac{17}{6}$，$c=1$ $f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{17}{6}\times\frac{1}{2}+1=\frac{65}{24}$$

$$f(-1)=\frac{7}{6}(-1)^2+\frac{17}{6}(-1)+1=-\frac{2}{3}$$

1.26 （1）设 $f(n)=\frac{2^{n-1}-1}{2^n}$求 $f(2)$，$f(5)$

解：$f(2)=\frac{2^{n-1}-1}{2^2}=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}$， $f(5)=\frac{2^4-1}{2^5}=\frac{15}{32}$。

（2）若$u_n=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ $(n\geqslant 2)$ 求 u_4，u_8，u_{11}。

解：$u_4=\frac{(-1)^4\sqrt{4}}{4-1}=\frac{2}{3}$　　$u_8=\frac{(-1)^8\sqrt{8}}{8-1}=\frac{2}{7}\sqrt{2}$

$u_{11}=\frac{(-1)^{11}\sqrt{11}}{11-1}=-\frac{\sqrt{11}}{10}$

（3）若 $y=\frac{n-2}{n^2+1}$ 求$y(2)$，$y(5)$。

解：$y(2)=\frac{2-2}{2^2+1}=0$　　$y(5)=\frac{5-2}{5^2+1}=\frac{3}{26}$

1.27（1）已知数列1，－1，1，－1，…，试求f(n)的表达式

解：$f(n)=(-1)^{n+1}$，　$n=1,2,\cdots$

（2）已知数列$\frac{1}{1\cdot 2}$，$\frac{1}{2\cdot 3}$，$\frac{1}{3\cdot 4}$，…试求f(n)的表达式。

解：$f(n)=\frac{1}{n(n+1)}$，$n=1,2\cdots\cdots$

1.28 求下列函数的值域：

（1）$f(x)=\frac{1}{1-x}$ $(0\leqslant x<1)$　　解：　值域为 $1\leqslant f(x)<+\infty$

（2）$y=\ln(1-x)$　$(x\leqslant 0)$

解：$x=0$时　$\ln(1-x)=0$　　故值域为　$0\leqslant y<+\infty$

（3）$\varphi(x)=5^x$　　$(-\infty<x<+\infty)$　　解：值域为　$0<\varphi(x)<+\infty$

（4）$y=\sqrt{x-x^2}$　　解：函数的最小值是0。下面求被开方式　$x-x^2$的最大值

$$x-x^2=\frac{1}{4}-x^2+x-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

当$x=\frac{1}{2}$时$x-x^2$有最大值$\frac{1}{4}$，故函数的值域为　$0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$

（5）　$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

解：$\because x^2+5x+6\ \to+\infty(x\to\infty)$，并且有两个零点。$\therefore y$ 的值域是 $0<y<+\infty$

1.29 函数 f(x) 满足什么条件，以下各式才有意义：

（1）　$y=\sqrt[n]{f(x)}$　（n为正整数）　　解：当n 为偶数时，$f(x)\geqslant 0$，函数才有意义。n为奇数时，对$-\infty<f(x)<\infty$函数都有意义

（2）$\varphi(x)=\log_a f(x)$ $(a>0)$　　解：$f(x)>0$时函数才有意义。

函 数 定 义 域

1.30 求下列各函数的定义域，并表示在数轴上：

（1）$y=x^3-3x+2$　　解：定义域为$-\infty<x<+\infty$

(2) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

解： $\because\ x^2+1>0$，　　$\therefore$定义域为　$-\infty<x<+\infty$

(3) $F(u)=\frac{|u|}{u}$

解： $\because$分母不能是0　$\therefore$定义域为　$-\infty<u<0$，$0<u<+\infty$。

(4) $g(t)=\frac{2t-1}{t^2-2t+2}$

解：$t^2-3t+2\neq0$　$(t-2)(t-1)\neq0$　$t\neq2$　$t\neq1$

故定义域为　$-\infty<t<1$，$1<t<2$，$2<t<+\infty$。

(5) $y=\sqrt{2+x-x^2}$　　**解：** $2+x-x^2\geqslant0$

$$\begin{cases}x-2\geqslant0\\x+1\leqslant0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\geqslant2\\x\leqslant-1\end{cases}\quad\text{无解}$$

或 $$\begin{cases}x-2\leqslant0\\x+1\geqslant0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\leqslant2\\x\geqslant-1\end{cases}\Longrightarrow\ -1\leqslant x\leqslant2\quad\text{故定义域为}-1\leqslant x\leqslant2$$

(6) $\varphi(r)=\frac{r-4}{\sqrt{r^2-r-2}}$

解： $r^2-r-2>0$，$(r-2)(r+1)>0$

$$\begin{cases}r-2>0\\r+1>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}r>2\\r>-1\end{cases}\Longrightarrow r>2$$

或 $$\begin{cases}r-2<0\\r+1<0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}r<2\\r<-1\end{cases}\Longrightarrow r<-1\quad\text{故定义域为}\ r<-1\ \text{或}\ r>2$$

(7) $f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$

解： $x^2+1>0$，$\because$要$x-1\geqslant0$，即$x\geqslant1$，又要$1-x\geqslant0$，即$x\leqslant1$。公共部分为$x=1$。　故定义域为$x=1$。

(8) $y=\lg\frac{1}{1-x}+\sqrt{x+2}$

解： $$\begin{cases}1-x>0\\x+2\geqslant0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x<1\\x\geqslant-2\end{cases}$$ 。故定义为　－

(9) $y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$　　解：∵ $\frac{1+x}{1-x}>0$

$\begin{cases}1+x>0\\1-x>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x>-1\\x<1\end{cases}$ 无解，或 $\begin{cases}1+x<0\\1-x<0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x<1\\x>-1\end{cases}$

故定义域为 $-1<x<1$。

(10) $\varphi(x)=\log_2\log_2 x$

解：∵要 $\log_2 x>0$　即 $x>1$　故定义域为 $x>1$

1.31　求下列各函数的定义域：

(1) $F(y)=\frac{1}{\ln(y-1)}$　　解：∵要 $\ln(y-1)\neq 0$　即 $y-1\neq 1$

且 $y-1>0$，因此 $y\neq 2$　且 $y>1$。故定义域为 $1<y<2$，或 $2<y<+\infty$

(2) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{\sin\pi x}$

解：∵要 $x+2\geqslant 0$　∴ $x\geqslant -2$　且要 $\sin x\pi\neq 0$，$x\neq\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$　故定义域为 $x>-2$　且 $x\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots$

(3) $y=\frac{1}{\sin x-\cos x}$

解：∵要 $\sin x-\cos x\neq 0$　即 $\sin x\neq\cos x$

∴ $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(4) $f(x)=\arccos\frac{2x}{1+x}$

解：∵ $|\cos y|\leqslant 1$　故要 $\left|\frac{2x}{1+x}\right|\leqslant 1$　$|2x|\leqslant|1+x|$

$4x^2\leqslant 1+2x+x^2$　　$3x^2-2x-1\leqslant 0$，$(3x+1)(x-1)\leqslant 0$

$\begin{cases}3x+1\geqslant 0\\x-1\leqslant 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\geqslant-\frac{1}{3}\\x\leqslant 1\end{cases}$　或　$\begin{cases}3x+1\leqslant 0\\x-1\geqslant 0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\leqslant-\frac{1}{3}\\x\geqslant 1\end{cases}$

第二组不等式无解。故定义域为 $-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$。

(5) $\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-1} & x\leqslant 0\\ x & 0<x<1\\ 2 & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$　　解：定义域为 $-\infty<x\leqslant 2$

(6) * $f(x)=(2x)!$　　解：由阶乘定义知 $2x=k$，$k=0,1,2\cdots$

故 $f(x)$ 的定义域为 $x=\frac{k}{2}$　$k=0,1,2,\cdots$

1.32 已知从高为h处落下的重物所经过的路程由公式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 确定，问（1）此函数的定义域如何？（2）解析表达式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域怎样？

解：（1） $h=\frac{1}{2}gt^2$ $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$，此函数的定义域为 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{\frac{2h}{g}}$

（2）解析表达式 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的定义域为 $-\infty<t<+\infty$

1.33 平面园的面积公式是 $A=\pi R^2$，其中R是园的半径，问此函数的定义域是什么？解析表达式 $A=\pi R^2$的定义域呢？

解：园面积公式的定义域是 $0<R<+\infty$，而解析表达式 $A=\pi R^2$ 的定义域是 $-\infty<R<+\infty$。

1.34 下列各对函数恒等吗？为什么？请指出什么范围内是恒等的？

（1）$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$，$g(x)=x+1$

解：这对函数不恒等。因为当 $x=1$ 时 $f(x)$没定义而 $g(1)=2$ 有意义。

$f(x)$与 $g(x)$在$-\infty<x<1$，$1<x<+\infty$上是恒等的。

（2）$f(x)=1$，$g(x)=\sin^2x+\cos^2x$

解：这对函数是恒等的。

（3）$f(x),=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$

解：这对函数不恒等。因为值域不同。$-\infty<f(x)<+\infty$，$0\leqslant g(x)<+\infty$。

在$0\leqslant x<+\infty$范围内它们是恒等的。

（4）$\varphi(t)=t$，　$\Psi(t)=(\sqrt{t})^2$

解：这对函数不恒等。因为定义域值域都不相同。$\varphi(t)$的定义域、值域都是$(-\infty,+\infty)$，而$\Psi(t)$的定义域、值域则都是$[0,+\infty)$。

它们在$[0,+\infty)$内是恒等的。

（5）$f(u)=\ln u^2$，$F(u)=2\ln u$

解：这对函数不恒等。因为定义域不同。$f(u)$的定义域是$(-\infty,0),(0,+\infty)$；而$F(u)$的定义域是$(0,+\infty)$。　它们在$(0,+\infty)$内是恒等的。

（6）$w(x)=\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}$，$z(x)=\sqrt{x^2-1}$

解：这对函数不恒等。因为定义域不同。$w(x)$的定义域是 $x\geqslant1$，$z(x)$的定义域是$|x|\geqslant1$。它们在$1\leqslant x<+\infty$内是恒等的。

（7）$f(x)=\frac{\pi}{2}$，$g(x)=\arcsin x+\arccos x$

解：这对函数在$|x|\leqslant1$内是恒等的。

（8）$f(x)=x$，$g(x)=\sin(\arcsin x)$

解：这对函数不恒等。因为定义域不同。$f(x)$的定义域为$-\infty<x<+\infty$，而$g(x)$的定义为$|x|\leqslant1$。它们在$|x|\leqslant1$内是恒等的。

（9） $f(x) = \arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$，$g(x) = 2\operatorname{arctg}x$ （$0 < x < +\infty$）

解： 令 $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \alpha$，$\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \cos\alpha$

解出 $x = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ $\operatorname{arctg}x = \dfrac{\alpha}{2}$

即 $\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg}x$ $f(x)$与$g(x)$在 $0 < x < +\infty$内是恒等的。

（10） $f(x) = \operatorname{arctg}x$，$g(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ （$0 < x < +\infty$）

解： 仅当 $x = 1$时才相等，故不恒等。

1.35 试求一个解析表达式（不能用分段的形式），其定义域为：

（1） $-2 \leqslant x \leqslant 2$ **解：** $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ 或 $g(x) = \arcsin\dfrac{x}{2}$

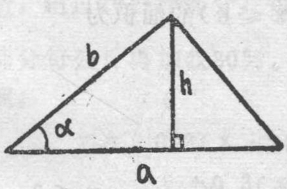
（2） $0 < |x| < 2$ **解：** $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{4-x^2}}$ 或 $g(x) = \ln\dfrac{4-x^2}{|x|}$

（3） $x \neq 2，3，4$

解： $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)(x-3)(x-4)}$ 或 $g(x) = \operatorname{ctg}\pi x$ （$1 < x < 5$）

列函数表达式

1.36 已知三角形两边为a与b，夹角为α，试将三角形的面积表为α的函数。求此函数的定义域，并求对应的解析表达式的定义域。



1.36图

解：

$h = b\sin\alpha$

$A = \dfrac{1}{2}ab\sin\alpha$

$\because \alpha$ 是三角形的内角，故 $0 < \alpha < \pi$

$\therefore$此函数的定义域为（0，π）而它对应的解析表达式的定义域是（$-\infty$，$+\infty$）。

1.37 已知三角形 ABC 的一边为a，试将三角形外接园的直径表为a所对的园心角α的函数

解： 由正弦定理知 $\dfrac{a}{\sin\alpha} = D$，其中D为△ABC 外接园的直径。

故 $D = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ （$0 < \alpha < \pi$）

1.38* 把一半径为r的园形铁片自中心处剪去中心角为α的扇形后，围成一园锥。试将这园锥的容积表为α的函数。

解： $\because v = \dfrac{1}{3}h\pi R^2$，而 $2\pi R = 2\pi r - r\alpha$，因此 $R = \dfrac{2\pi-\alpha}{2\pi}r$，而