大學叢書

解析幾何

何衍璿
袁武烈 著

商務印書館發行

大學叢書

解析幾何

何衍璿
袁武烈 著

商務印書館發行

中華民國二十三年七月初版
中華民國二十四年六月三版

(52421精)

大學叢書(教本)解析幾何一冊

每冊定價大洋叁元貳角
外埠酌加運費匯費

基價24.00

著作者 何衍璿 袁武烈

發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者 楊靜盦 胡達聰)

二五四一上

大學叢書委員會

委　員

弁　言

我國文化落後,科學著述之不振,蓋無可諱言,就數學出版而論,屬於普通應用之解析幾何,尙不多覯.求其專爲數學上純理之討論者,更如鳳毛麟角矣.鄙人與袁武烈教授因本校數學天文學系初級教材之需求,爰編解析幾何講義.日積月累,彙成本書上下兩卷.上卷論各種位標制及曲線曲面之大綱,廣設例題以明平曲線之繪畫法.作圖務求簡便,討論務求精嚴.意欲學者領會函數之變値,而引起其研究之興味也.下次卷述二曲線曲面之分類與其特性,并及中心,直徑,徑面,極點.極線,極面,軸,焦點,準線等.分項推究,且注意於次序之整理.惟倉卒付梓,舛誤深恐不免,願海內明達有以教之.

民國二十年夏

何衍璿識於中山大學

目　　錄

上　卷

目　錄

下　卷

第一篇　二次曲線

第二篇　二次曲面

解析幾何

上卷

第一章

位標

1. 解析幾何之目的,在應用代數之分析,以研究幾何圖形(線或面)之性質.圖形成於點.故當先定一點在空間之位置.法人 Descartes 所創之位標制,爲定位置之最常用者.

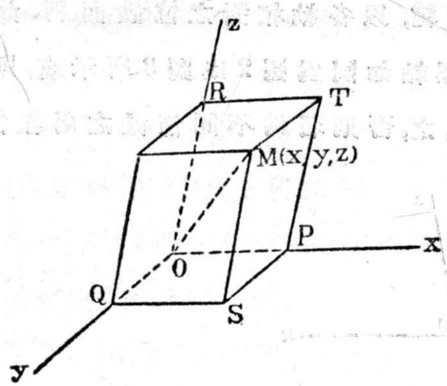

圖 1

任取不同在一平面上而相交於 O 點之三軸 Ox, Oy, Oz. 令 M 爲空間之任一點.作 PMT, SMQ, RMT 三平面與位標面(Coördinate planes. 見初等解析幾何)平行,割位標軸 (Axes of coördinates) Ox, Oy, Oz, 於 P, Q, R, 則 $\overline{OP}$ 爲 M 點之 x 值, $\overline{OQ}$ 爲

M 點之 y 值, $\overline{OR}$ 為 M 點之 z 值, 此三值稱為 M 點之位標 (Coördinates). 換言之, M 點之位標為動徑 (Vector) OM 投射於位標軸之影值也.(投射於 Ox 軸之光線與 yz 位標面平行……).

反言之,已與 x, y, z 三值即可定一點 M. 學者曾習初等解析幾何,當慣用正交位標軸 (Rectangular axes). 玆所論者,不僅限於正交位標軸耳.

若 M 點在 xy 位標面上(例如 S 點),則 M 點之 z 值為零. 平行六面體 $QSPT$ 化為平行四邊形 $QSPO$. 故由 S 點作直線平行於位標軸,即得 S 點在平面 xOy 之位標.

位標軸有兩種, 以各軸相對之位置而別, 如下列兩圖所示. 兩組之位標軸如同為圖 2 或圖 3 所示者, 則以同佈置之兩組位標軸名之,否則名為不同佈置之兩組位標軸.

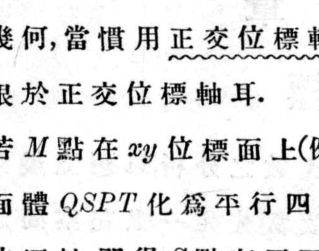

圖 2

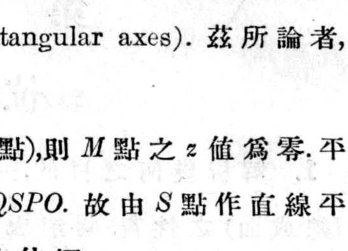

圖 3

2. 兩點之距離——欲求兩點 M 與 M' 之距離,宜先知兩動徑之幾何積 (Geometrical product of two vectors). 兩動徑 AB 與 CD 之幾何積云者,乃其長之乘積再乘其交角之餘弦也.

茲以方程式表示於下.

$$(AB)(CD)=AB\cdot CD\cdot\cos(AB, CD).$$

上式又表 AB 正投於方向 $\overline{CD}$ 之影乘 CD 之長,或 CD 正投於方向 $\overline{AB}$ 之影乘 AB 之長.

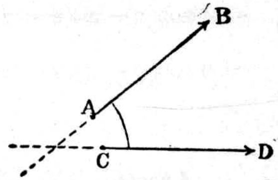

圖 4

設有動徑 σ 為 α, β, γ 諸動徑之幾何和 (Geometrical sum), 動徑 σ' 為 α', β' 諸動徑之幾何和:

$$(\sigma)=(\alpha)+(\beta)+(\gamma),$$

$$(\sigma')=(\alpha')+(\beta').$$

今證

(1) $(\sigma)(\sigma')=(\alpha)(\alpha')+(\alpha)(\beta')+(\beta)(\alpha')+(\beta)(\beta')+(\gamma)(\alpha')+(\gamma)(\beta').$

蓋將動徑 σ 正投射於動徑 σ',則依投影定理得

$$\text{pr}\,\sigma=\text{pr}\,\alpha+\text{pr}\,\beta+\text{pr}\,\gamma.$$

以 σ' 之長徧乘上式之兩邊,則依上所論得

(2) $$(\sigma)(\sigma')=(\alpha)(\sigma')+(\beta)(\sigma')+(\gamma)(\sigma').$$

同理得 $$(\alpha)(\sigma')=(\alpha)(\alpha')+(\alpha)(\beta'),$$

$$(\beta)(\sigma')=(\beta)(\alpha')+(\beta)(\beta'),$$

$$(\gamma)(\sigma')=(\gamma)(\alpha')+(\gamma)(\beta').$$

以 $(\alpha)(\sigma')$, $(\beta)(\sigma')$, $(\gamma)(\sigma')$ 之值代入 (2) 式,則 (2) 式變為 (1) 式.

今應用上述之結果以求 M 與 M' 兩點之距離.

設 $(Oy, Oz)=\lambda$, $(Oz, Ox)=\mu$, $(Ox, Oy)=\nu$. λ, μ, ν 為大於零而小於 π 之角.

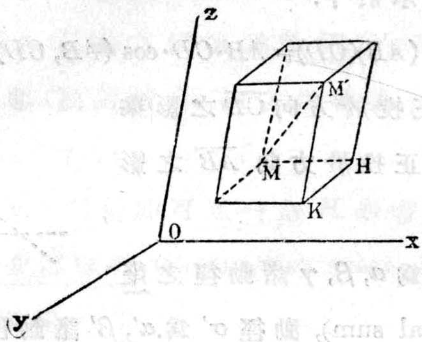

圖 5

令 M 之位標爲 x, y, z, M' 之位標爲 x', y', z'. 試以 M, M' 之位標及 λ, μ, ν 諸數表 MM' 之距離. 過 M 或 M' 作平面平行於位標面,得一平行六面體. 以 MM' 爲其一對角線,六面體之邊皆與位標軸平行.

若察 MH, HK, KM' 三邊,則易知

$$\overline{MH}=x'-x, \quad HK=y'-y, \quad \overline{KM'}=z'-z.$$

又動徑 MM' 爲動徑 MH, HK, KM' 之幾何和,故

$$(MM')=(MH)+(HK)+(KM').$$

如求動徑 MM' 與其本身之幾何積,則得

$$(MM')(MM')=(MH)(MH)+(HK)(HK)+(KM')(KM')$$
$$+2(HK)(KM')+2(KM')(MH)+2(MH)(HK).$$

但 $$(MM')(MM')=MM'\cdot MM'\cos(MM', MM')=MM'^2,$$

$$(MH)(MH)=\overline{MH}^2=(x'-x)^2,$$

$$(HK)(HK)=(y'-y)^2, \quad (KM')(KM')=(z'-z)^2,$$

且

$$(HK)(KM')=HK\cdot KM'\cos(Oy,Oz)=(y'-y)(z'-z)\cos\lambda$$

$$(KM')(MH)=KM'\cdot MH\cos(Oz,Ox)=(z'-z)(x'-x)\cos\mu$$

$$(MH)(HK)=MH\cdot HK\cos(Ox,Oy)=(x'-x)(y'-y)\cos\nu$$

故令 d 爲 M 與 M' 之距離，則

$$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2+2(y'-y)(z'-z)\cos\lambda$$
$$+2(z'-z)(x'-x)\cos\mu+2(x'-x)(y'-y)\cos\nu.$$

若位標軸爲正交，則 $\lambda=\mu=\nu=\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\lambda=\cos\mu=\cos\nu=0.$

而 $$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2.$$

若 M, M' 同在 xy 平面上則 $z=z'=0.$

而 $$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+2(x'-x)(y'-y)\cos\nu.$$

更設位標軸爲正交，則

$$d^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2.$$

3. 已與 $A(x_1, y_1, z_1)$ 及 $B(x_2, y_2, z_2)$ 兩點. M 爲 AB 直線上一點適合於 $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$ (k 爲定數)之關係者. 試以 A, B 之位標及 k 表示 M 點之位標.

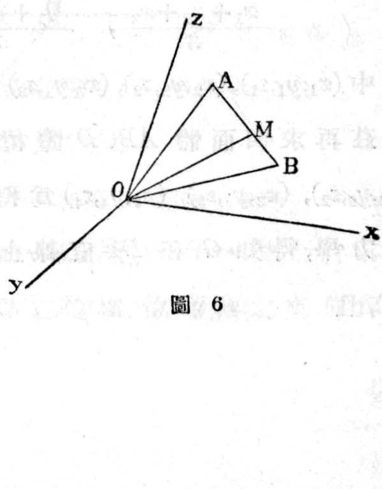

圖 6

令 x, y, z 爲 M 點之位標. 將周圍 OMA 投於任一軸上，則有

(1) $\mathrm{pr}\, MA=\mathrm{pr}\, MO+\mathrm{pr}\, OA$

$\quad=\mathrm{pr}\, OA-\mathrm{pr}\, OM.$

同理

$$\text{(2)}\qquad \operatorname{pr} MB=\operatorname{pr} OB-\operatorname{pr} OM.$$

將(2)式之左右邊除(1)式之左右邊,得

$$\frac{\operatorname{pr} MA}{\operatorname{pr} MB}=\frac{\operatorname{pr} OA-\operatorname{pr} OM}{\operatorname{pr} OB-\operatorname{pr} OM},$$

但
$$\frac{\operatorname{pr} MA}{\operatorname{pr} MB}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k,$$

故
$$\frac{\operatorname{pr} OA-\operatorname{pr} OM}{\operatorname{pr} OB-\operatorname{pr} OM}=k,$$

即
$$\operatorname{pr} OM=\frac{\operatorname{pr} OA-k\operatorname{pr} OB}{1-k}.$$

如將周圍OMA投於Ox軸上,遂得

$$x=\frac{x_1-kx_2}{1-k}.$$

同樣
$$y=\frac{y_1-ky_2}{1-k},\quad z=\frac{z_1-kz_2}{1-k}.$$

特端——如M爲A, B之中點,則$k=-1$,

而
$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2},\quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

由此易知三角形面積之重心之位標爲

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\quad \frac{z_1+z_2+z_3}{3}.$$

就中(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3)爲三角形三頂點之位標.

玆再求四面體$ABCD$體積之重心G之位標.設(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2), (x_3,y_3,z_3), (x_4,y_4,z_4)爲頂點A, B, C, D之位標,則由普通力學,得知G在DI直線上(I爲三角形ABC之面積之重心),且

$$\frac{\overline{GI}}{\overline{GD}}=-\frac{1}{3}.$$

但 I 之 x 值為 $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$, 故 G 之 x 值為

$$\frac{\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}+\dfrac{x_4}{3}}{1+\dfrac{1}{3}}=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

依同法以求 G 之 y 值及 z 值. 遂得 G 之位標如下:

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\quad y=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4},\quad z=\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4}.$$

4. 有動徑 AB 在直線 D 上. 由 O 點引動徑 OP 平行於 D. 且令 OP 之向 (Sense) 與 AB 之向同, $\overline{OP}=1$. 試求 P 點之位標與 AB 之方向餘弦 (Direction cosines) 之關係.

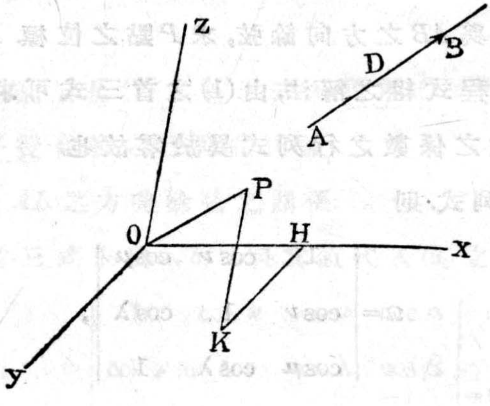

圖 7

令 $\alpha=(Ox, OP)$, $\beta=(Oy, OP)$, $\gamma=(Oz, OP)$. α, β, γ 表大於零而小於 π 之角. 又設 (a, b, c) 為 P 點之位標, 位標軸之交角為 λ,

μ, ν 如第 2 節所述. 乃投 P 點於位標面 xy, 得 K 點(投射於 xy 之光線與 z 軸平行). 於 Ox 軸上, 取 H 點, 令 $\overline{OH}=a$. 又聯結 HK, KP, 將 $OHKP$ 投於任一軸上, 則有 $\operatorname{pr} OH+\operatorname{pr} HK+\operatorname{pr} KP=\operatorname{pr} OP$.

若將 $OHKP$ 正投於 Ox, Oy, Oz, OP 諸軸, 卽得

$$
(1)\qquad \begin{cases} a+b\cos\nu+c\cos\mu=\cos\alpha \\ a\cos\nu+b+c\cos\lambda=\cos\beta \\ a\cos\mu+b\cos\lambda+c=\cos\gamma \\ a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=1. \end{cases}
$$

上式可以解決下列問題:

I. 已與 P 點之位標, 求 AB 之方向餘弦.

(1) 之首三式表此問題之解.

II. 已與 AB 之方向餘弦, 求 P 點之位標.

依一次方程式組之解法, 由(1)之首三式可求出 a, b, c 之值. 因未知數之係數之行列式異於零故也.

令 Ω 爲此行列式, 則

$$
\Omega=\begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 \end{vmatrix},
$$

展之得

$$
\Omega=1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu.
$$

如視上式之右邊爲 $\cos\lambda$ 之二次三項式, 則上式可書爲

$$\Omega=-\cos^2\lambda+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu+1-\cos^2\mu-\cos^2\nu.$$

此式之根爲

$$\cos\mu\cos\nu\pm\sqrt{\cos^2\mu\cos^2\nu+1-\cos^2\mu-\cos^2\nu}$$

$$=\cos\mu\cos\nu\pm\sqrt{(1-\cos^2\mu)(1-\cos^2\nu)}$$

$$=\cos\mu\cos\nu\pm\sin\mu\sin\nu=\cos(\mu\mp\nu)$$

故 $$\Omega=-[\cos\lambda-\cos(\mu+\nu)][\cos\lambda-\cos(\mu-\nu)].$$

應用餘弦之差之公式,得

$$\Omega=4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\cdot\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\cdot\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\cdot\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.$$

但 λ, μ, ν 爲三面角 (Trihedral angle) 之面角 (Face angle), 而兩面角之和大於其他之面角. 又各面角之和小於 2π, 故 $\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}$, $\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}$, ……之值均在 o 與 π 之間, 而其正弦爲正. 是即 Ω 爲正也.

Ω 既不爲零, 於是 (1) 之首三式爲獨解 (Unique solution, 參閱何魯段子燮合著之行列式詳論).

III. 求 AB 之方向餘弦之關係.

由 (1) 之首三式求出 a, b, c. 將其值代入 (1) 之末式, 得

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \cos\nu & \cos\mu & \cos\alpha \\ \cos\nu & 1 & \cos\lambda & \cos\beta \\ \cos\mu & \cos\lambda & 1 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}=0.$$

IV. 求 a, b, c 之關係.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 之值已見於(1)中首三式之左邊. 茲將其值代入(1)中第四式, 則得 a, b, c 之關係如下:

$$a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu=1.$$

5. 位標軸之變換.

第一情形——新軸與舊軸平行且同向.

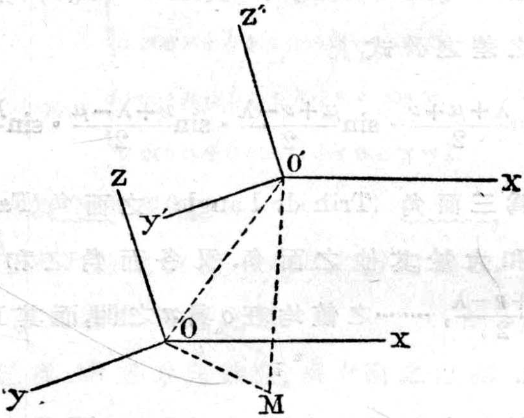

圖 8

設 Ox, Oy, Oz 爲舊軸. $O'x'$, $O'y$, $O'z$ 爲新軸. O' 點對於舊軸之位標爲 p, q, r, 又 M 爲空間之一點, 其舊位標爲 x, y, z, 新位標爲 x', y', z'.

聯結 OO', OM, MO' 將周圍 OMO' 投射於 Ox 軸上(投射於 Ox 軸之光線與 yz 位標面平行), 則有

$$\text{pr}\, OM=\text{pr}\, OO'+\text{pr}\, O'M,$$

即
$$x=p+x'.$$