高等学校试用教材

高 等 数 学

下 册

同济大学数学教研室主编

人民教育出版社

本书分上、下两册出版，下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程、线性代数、概率论等．书末附有习题答案．

本书下册有一些节、目带有＊号，如果删去这些内容，不会影响其它内容的学习，但带＊的习题要相应删去；有些节、目中一部分内容用小字排印（表格除外），这些内容亦可酌情取舍，如果删去这部分内容，与其相配合的习题（带有＊号）也要删去．

本书可作为高等学校工科高等数学课程的试用教材或教学参考书．

高　等　数　学

下　册

同济大学数学教研室主编

•

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海商务印刷厂印装

•

开本 787×1092 1/32　印张 16 2/16　字数 389,000

1978年10月第1版　1979年4月第1次印刷

印数 1—450,000

书号 13012·0141　定价 1.15 元

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

上册中我们讨论的都是只有一个自变量的函数，这种函数叫做一元函数. 但在生产斗争和科学实验中，研究的问题往往牵涉到多方面的因素. 反映到数学上，就是一个变量依赖于多个变量的情形. 这就提出了多元函数以及多元函数的微分和积分问题. 本章将在一元函数微分学的基础上，讨论多元函数的微分法及其应用. 讨论中我们以二元函数为主，而一般的多元函数则可以类推.

第一节　多元函数的基本概念

一、多元函数概念

在很多自然现象以及实际问题中，经常会遇到多个变量之间的依赖关系，举例如下：

例 1　圆柱体的体积 V 和它的底半径 r、高 h 之间具有关系

$$V=\pi r^2h.$$

这里，V 是随着 r, h 的变化而变化的，当 r, h 在一定范围($r>0$, $h>0$)内取定一对值时，V 的对应值就随之确定.

例 2　一定量的理想气体的压强 p、体积 V 和绝对温度 T 之间具有关系

$$p=\frac{RT}{V},$$

其中 R 为常数. 这里，p 是随着 V, T 的变化而变化的，当 V, T

在一定范围 ($V>0$, $T>0°K$) 内取定一对值时，p 的对应值就随之确定.

例 3　设 R 是电阻 R_1、R_2 并联后的总电阻，根据电学知道，它们之间具有关系

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}.$$

这里，R 是随着 R_1, R_2 的变化而变化的，当 R_1, R_2 在一定范围 ($R_1>0$, $R_2>0$) 内取定一对值时，R 的对应值就随之确定.

上面三个例子的具体意义虽各不相同，但却有它们的共性，抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义.

定义　设有三个变量 x、y 和 z. 如果当变量 x、y 在一定范围内任意取定一对值时，变量 z 按照一定的规律，总有确定的数值和它们对应，则变量 z 叫做变量 x、y 的二元函数，记作

$$z=f(x, y) \quad 或 \quad z=z(x, y),$$

其中变量 x, y 叫做自变量，而变量 z 也叫做因变量. 自变量 x, y 的变化范围叫做函数的定义域.

类似地可以定义三元函数 $u=f(x, y, z)$ 以及二元以上的函数.

例如，长方体体积 V 是它的长 a、宽 b 和高 c 的函数

$$V=abc;$$

电流通过电阻时所作的功 P 是电阻 R、电流 I 和时间 t 的函数

$$P=I^2Rt;$$

等等.

二元以及二元以上的函数统称为多元函数.

如同我们用 x 轴上的点来表示数值 x 一样，我们可用 xOy 平面上的点 $P(x, y)$ 来表示一对有序数组 x、y. 于是函数 $z=f(x, y)$ 也可简记为 $z=f(P)$，而称 z 为点 P 的函数. 类似地，可用空间

内的一点 $P(x, y, z)$来表示有序数组 x, y, z. 函数 $u=f(x, y, z)$ 也就可简记为 $u=f(P)$, 等等.

关于函数的定义域, 与一元函数相类似, 我们作如下约定: 在一般地讨论用算式表达的二元函数 $z=f(x, y)$时, 就以这个算式中包含的运算都能进行的自变量 x、y 的变化范围为这个函数的定义域. 例如, 函数 $z=\ln(x+y)$的定义域为适合 $x+y>0$ 的点的全体, 即 xOy 平面内在直线 $x+y=0$ 上方的点的全体. 所以这函数的定义域是半个平面(图 8-1). 又如, 函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)$的定义域为适合 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的点的全体, 即圆周 $x^2+y^2=1$ 上及其内部的点的全体(图 8-2).

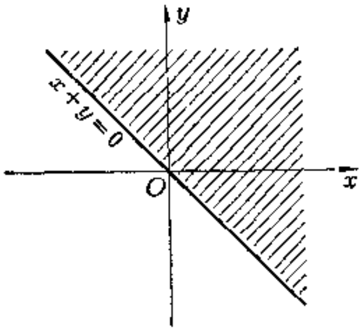

图 8-1

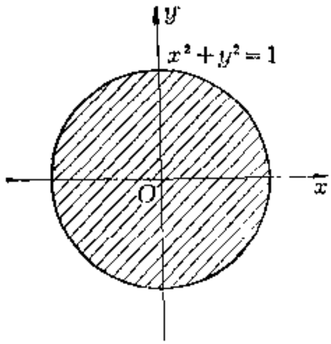

图 8-2

实际问题中遇到的二元函数, 它们的定义域往往是平面上的一个区域. 所谓平面上的区域, 指的是由一条曲线或几条曲线(这些曲线可以延伸到无穷远)所围成的平面上的一部分, 并且在这部分内的任意两点总可以用一条完全在这部分内的折线连接起来. 区域的这种性质称为区域的连通性. 按区域的含义可知, 椭圆形、矩形、扇形、第一象限、两圆围成的环形等等, 都是区域. 如果一个区域可以被包含在一个以原点为中心而半径适当大的圆内, 则称这区域是有界的; 否则, 称区域是无界的. 围成区域的曲线称为该

区域的边界. 包括全部边界的区域称为闭区域; 不包括边界上任何一点的区域称为开区域. 通常用 D 表示一个区域. 在上面所举的例子中, 由不等式 $x+y>0$ 确定的区域 (图 8-1) 是无界开区域, 而由不等式 $x^2+y^2\leqslant 1$ 确定的区域(图 8-2)则是有界闭区域.

所谓一点的邻域, 是指以该点为中心的一个圆形开区域. 例如, 适合不等式

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点(x, y)组成以 $P_0(x_0, y_0)$为圆心、δ 为半径的邻域, 简称为点 P_0的 δ 邻域. 区域 D 内部的点简称为内点, 区域 D 的边界上的点简称为边界点. 内点与边界点的区别是: 如 P 为内点, 则必存在点 P 的一个邻域完全包含在 D 内 (图 8-3); 如 P 为边界点, 则不论点 P 的邻域怎样小, 必定同时含有 D 内的点及 D 外的点.

图 8-3

我们曾利用平面直角坐标系来表示一元函数 $y=f(x)$的图形, 一般说来, 它是平面上的一条曲线. 对于二元函数 $z=f(x, y)$, 我们可以用空间直角坐标系来表示它的图形. 设函数 $z=f(x, y)$ 的定义域为 xOy 坐标面上某一区域 D, 对于 D 中的每一点 $P(x, y)$, 在空间可以作出一点 $M(x, y, f(x, y))$ 与它对应. 当点 $P(x, y)$在 D 中变动时, 点 $M(x, y, f(x, y))$就在空间相应地变动, 一般说来, 它的轨迹是一个曲面(图 8-4). 这个曲面就称为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形. 因此, 二元函数可用

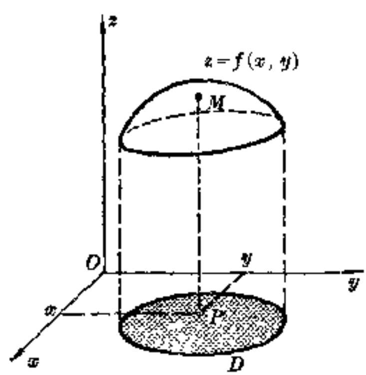

图 8-4

一个曲面作为它的几何表示.

例如,由空间解析几何知道,线性函数

$$z=ax+by+c$$

的图形是一个平面; 由方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

所确定的函数 $z=f(x, y)$ 的图形是球心在原点、半径为 a 的球面. 它的定义域是圆形闭区域 D: $x^2+y^2\leqslant a^2$. 在 D 上任一点 (x, y) 处, 函数有两个对应值, 一个为 $\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, 另一个为 $-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$. 因此,这是多值函数. 取正值的一个表示上半球面,取负值的一个表示下半球面. 以后我们对二元函数 $z=f(x,y)$ 除另作声明外,总假定它是单值的; 如果遇到多值函数,我们可以把它拆成单值函数分别加以讨论.

二、二元函数的极限

现在来讨论二元函数 $z=f(x, y)$ 的极限概念, 也就是讨论当自变量 $x\to x_0, y\to y_0$, 即点 $P(x,y)\to P_0(x_0, y_0)$时, 函数 $z=f(x,y)$ 的极限的定义.

设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义 (点 P_0 可以除外), $P(x, y)$是该邻域内异于 P_0 的任意一点①. 如果当点 P 以任何方式趋近于点 P_0 时, 函数的对应值 $f(x, y)$趋近于一个确定的常数 A, 我们就说, A 是函数 $z=f(x,y)$当$x\to x_0$, $y\to y_0$ 时的极限, 记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$$

或

① 如果 P_0 是函数的定义区域 D 的边界点,则只考虑它的邻域与 D 的公共部分上的点 $P(x, y)$, 这是对边界点的特殊规定. 在以后讨论函数的连续性和函数的偏导数等问题时,一般讨论 D 的内点,如是边界点,也作这样的规定.

$$f(x, y) \to A \quad (x \to x_0,\ y \to y_0).$$

在这里，我们注意到点 $P(x, y)$ 趋近于点 $P_0(x_0, y_0)$，就是它们之间的距离趋于零，即

$$\rho = |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0.$$

因此上述极限记号也可记作

$$f(x, y) \to A \quad (\rho \to 0).$$

例 4 设 $f(x, y) = (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy} \quad (x \neq 0,\ y \neq 0)$，

求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

解 因为

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}\right| = |x^2+y^2| \cdot \left|\sin\frac{1}{xy}\right|$$
$$\leqslant |x^2+y^2| \cdot 1 = |x^2+y^2|,$$

而当 $x \to 0$, $y \to 0$ 时，$(x^2+y^2) \to 0$，所以有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy} = 0.$$

类似于一元函数极限的分析定义，二元函数极限的定义也可叙述如下：

定义 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的某一邻域内有定义(点 P_0 可以除外)．如果对于每一个任意给定的正数 ε (不论它多么小)，总存在一个正数 δ，使得对于适合不等式

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta$$

的一切点 $P(x, y)$，所对应的函数值 $f(x, y)$ 都满足不等式

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

那末常数 A 就叫做函数 $z=f(x, y)$ 当

$$x \to x_0,\ y \to y_0$$

或 $$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \to 0$$

时的极限.

我们必须注意，所谓极限存在，是指 $P(x, y)$ 以任何方式趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数都无限接近于 A. 因此，如果 $P(x, y)$ 以某一特殊方式，例如沿着一条定直线或定曲线趋近于 $P_0(x_0, y_0)$ 时，即使函数无限接近于某一确定值，我们还不能由此断定函数的极限存在. 下面用例子来说明这种情形.

考察函数

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,\ y\text{ 不同时为零}), \\ 0 & (x=y=0). \end{cases}$$

显然，当点 $P(x, y)$ 沿 x 轴趋近于点 $(0, 0)$ 时，

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0)=\lim_{x\to 0} 0=0;$$

又当点 $P(x, y)$ 沿 y 轴趋近于点 $(0, 0)$ 时，

$$\lim_{y\to 0} f(0, y)=\lim_{y\to 0} 0=0.$$

虽然上面以两种特殊方式（点 $P(x, y)$ 设 x 轴或沿 y 轴）趋近于原点时函数的极限存在并且相等，但是极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ 并不存在. 这是因为当点 $P(x, y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋近于点 $(0, 0)$ 时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

显然它是随着 k 的不同而改变的.

从几何上来说，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A$ 的意义是：如果作两平行平面 $z=A-\varepsilon$ 和 $z=A+\varepsilon$，则总有一个正数 δ 存在，相应地有一个点 $P_0(x_0, y_0)$ 的 δ 邻域，在这邻域内（P_0 可以除外）函数 $z=f(x, y)$ 的图形将位于上述两个平行平面之间.

二元以上的函数的极限定义与二元函数的极限定义相类似，读者可自己给出.

三、二元函数的连续性

明白了极限的概念，就不难讨论二元函数的连续性问题．设函数 $z=f(x, y)$ 在区域 D 内有定义，$P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的一个内点，$P(x, y)$ 是完全在 D 内且是 P_0 的一个邻域内的任意点，我们给出二元函数在点 P_0 为连续的定义如下：

定义 如果当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时，函数的极限存在，且等于它在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处的函数值，即

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=f(x_0, y_0),$$

那末就称函数 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 处连续．

换句话说，如果当点 $P(x, y)$ 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 的距离趋于零时，差值 $f(x, y)-f(x_0, y_0)$ 也趋近于零，那末二元函数在点 P_0 是连续的．

如果二元函数在区域 D 内各点都连续，那末就称函数在 D 内连续．二元连续函数的图形是一个无孔隙、无裂缝的曲面．例如连续函数

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad (x^2+y^2\leqslant 1)$$

的图形是球心在原点、半径等于 1 的上半球面．

函数的不连续点称为间断点．上面已经讨论过的函数

$$f(x, y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,\ y\ \text{不同时为零}), \\ 0 & (x=y=0) \end{cases}$$

当 $x\to 0$，$y\to 0$ 时的极限不存在，所以点 $(0, 0)$ 是函数的一个间断点．二元函数的间断点可以形成一条曲线，例如函数

$$z=\sin\frac{1}{x^2+y^2-1}$$

在圆周 $x^2+y^2=1$ 上没有定义，所以该圆周上各点都是间断点．

类似地可给出二元以上的函数在某点是连续的定义，在此不再赘述．

与闭区间上一元连续函数的性质相类似，在有界闭区域上多元连续函数也有如下性质．

性质1 在有界闭区域 D 上的多元连续函数，在该区域上至少取得它的最大值和最小值各一次．这就是说，在 D 上至少有一点 P_1 及一点 P_2，使得 $f(P_1)$ 为最大值而 $f(P_2)$ 为最小值：

$$f(P_2)\leqslant f(P)\leqslant f(P_1)\quad（点 P 在 D 上）$$

性质2 在有界闭区域上的多元连续函数，如果取得两个不同的函数值，则它在该区域上取得介于这两个值之间的任何值至少一次．特殊地，如果 μ 是在函数的最小值 m 和最大值 M 之间的一个数，则在 D 上至少有一点 Q，使得 $f(Q)=\mu$．

我们指出：一元函数中关于极限的运算法则，对于多元函数仍然适用；根据极限运算法则，可以证明多元连续函数的和、差、积均为连续函数；在分母不为零处，连续函数的商是连续函数；多元连续函数的复合函数也是连续函数．

与一元的初等函数相类似，多元初等函数也是可由一个式子所表示的函数，而这个式子是由自变量（如 x、y 等）利用基本初等函数经过有限次的四则运算和复合步骤所构成的．例如，$\dfrac{x+x^2-y^2}{1+x^2}$，$\sin(x+y)$，$e^{x+y}\cdot\ln(1+x^2+y^2)$ 等都是多元初等函数．

根据上面指出的连续函数的和、差、积、商的连续性以及连续函数的复合函数的连续性，我们进一步可得如下结论：

一切多元初等函数在其定义区域内是连续的．

由多元初等函数的连续性，如要找它在一点 P_0 处的极限值，而该点又在此函数的定义区域内，则极限值就是函数在该点的函数值，即