高等财经专科学校试用教材

经济应用数学（下册）

刘应辉　主编

中国财政经济出版社

高等财经专科学校试用教材

经济应用数学

（下册）

刘应辉 主编

中国财政经济出版社

（京）新登字038号

高等财经专科学校试用教材
经济应用数学
（下册）
刘应辉 主编

中国财政经济出版社出版
（北京东城大佛寺东街8号）
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
通县西定安印刷厂印刷

*

850×1168毫米　32开　8.5印张　201 000字
1991年5月第1版　1993年3月北京第3次印刷
印数：15 201—27 200　　定价：4.00元
ISBN 7-5005-1220-6/F·1147（课）

目　录

第四编　线性规划方法

第五编　回归分析与投入产出法

第六编　经济决策方法

第四编　线性规划方法

第十六章　线性规划的数学模型及图解法

线性规划是数学规划的一个领域。它研究和求解的变量间的依赖关系是线性的极值问题。目前，它已成为现代经济管理科学化的一种不可缺少的重要基础和方法。在这里我们不准备对线性规划作全面的、详尽的研究，只着重介绍线性规划主要的基础理论和基本计算方法。

§16.1　线性规划的数学模型

（一）线性规划问题的提出

什么是线性规划问题？请先看下面的问题。

例1　某厂在计划期要生产甲、乙两种机器零件。已知计划期具备的可用资源为：钢材3600公斤，铜材2000公斤，专用设备能力3000台时。设生产甲种产品 1 件，需要钢材 9 公斤、铜材 4 公斤、专用设备能力 3 台时；生产乙种产品 1 件，需要钢材 4 公斤、铜材 5 公斤、专用设备能力10台时。而生产 1 件甲、乙产品的单位利润分别为70元和 120 元。问在该厂现有的条件下，应如

何确定计划期甲、乙两种产品的产量，才能使获得的利润最大？

为简明起见，我们把已知条件列成表16-1。

表16-1

产品 定额 资源	甲	乙	计划期具备的资源
钢材	9公斤	4公斤	3600公斤
铜材	4公斤	5公斤	2000公斤
专用设备能力	3台时	10台时	3000台时
单位产品利润	70元	120元	

很明显，在计划期内该厂可以有各种不同的配比方案来安排甲、乙两种产品的生产。但是，在这许多方案中，最优方案应该是：在不超过该厂提供的资源和设备能力的前提下，获得的利润最大的那个方案。用数学语言可以这样来描述：

设在计划期生产甲、乙两种产品的数量分别为x_1件和x_2件。

根据题意，最优方案中的x_1与x_2应满足下面不等式组

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2\leqslant 3600(\text{钢材的总限额}) \\ 4x_1+5x_2\leqslant 2000(\text{铜材的总限额}) \\ 3x_1+10x_2\leqslant 3000(\text{专用设备能力的总限额}) \end{cases} \tag{16.1}$$

此外，由于变量x_1，x_2分别表示甲、乙两种机器零件的产量，显然只能取非负值（本题实际是正整数）。于是在不等式组(16.1)中，还应加上非负变量的限制。因而得到下面的不等式组

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2\leqslant 3600 \\ 4x_1+5x_2\leqslant 2000 \\ 3x_1+10x_2\leqslant 3000 \\ x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0(\text{零件数不能为负数}) \end{cases} \tag{16.2}$$

它表明所制定的生产方案要受到不等式组(16.2)的约束。因此在数学上一般称形如(16.2)式的线性不等式组为该问题的约束条件。常用"s·t"表示"受约束于"。

其中变量x_1，x_2称该问题的决策变量。这是因为该变量的一组确定值代表一个具体的方案，并且这组变量在最优问题中是决策的关键量。

这个问题的目标是，满足(16.2)式的条件下，如何安排甲、乙两种产品的生产，使该厂在计划期内获得的利润最大。若用S表示利润，这时

$$\text{求最大值} \qquad S=70x_1+120x_2 \tag{16.3}$$

称(16.3)式的线性表达式为目标函数。为书写简便，用"max"表示求最大值，用"min"表示求最小值。

综上所述，本例可表达成下面的数学模型

目标函数：$\max S=70x_1+120x_2$

$$\text{约束条件：}s\cdot t\begin{cases}9x_1+4x_2\leqslant 3600\\4x_1+5x_2\leqslant 2000\\3x_1+10x_2\leqslant 3000\\x_1,\ x_2\geqslant 0\end{cases} \tag{16.4}$$

此类问题一般称为资源利用问题，其数学模型通常是在要使利润最大或总收入最大等目标下，寻求资源的最优利用、生产计划的合理安排、产品的最佳组合等。

从上面建立的数学模型中，可以发现如下特点：

(1) 含有决策变量$x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$；

(2) 存在一组约束条件，用线性等式或不等式给出；

(3) 有一个线性目标函数。

现在我们撇开它具体的实际意义，给出一般线性规划问题的数学模型。

（二）线性规划模型的定义、结构特征及经济解释

对于一般线性规划数学模型，通常定义如下：

求一组变量x_1，x_2，…，x_n的值，使目标函数

$$S=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n \tag{16.5}$$

的值达到最大(或最小)，并满足下列约束条件

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}\geqslant,\ \text{或}=)b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}\geqslant,\ \text{或}=)b_2 \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots & (16.6) \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}\geqslant,\ \text{或}=)b_m \\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\geqslant 0 & (16.7) \end{cases}$$

式中x_j是决策变量，a_{ij}，b_i，c_j是常数($i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$)。为方便起见，可将线性规划模型简记为“LP”。

上述模型可以缩写为

$$\text{LP}\quad \max(\text{或}\min)S=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s}\cdot\text{t}\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(\text{或}\geqslant,\ \text{或}=)b_i(i=1,2,\cdots,m) \\ x_j\geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)\end{cases} \tag{16.8}$$

还可以用矩阵表示如下

$$\text{LP}\quad \max(\text{或}\min)S=CX$$

$$\text{s}\cdot\text{t}\begin{cases}AX\leqslant(\text{或}\geqslant,\ \text{或}=)b \\ X\geqslant O\end{cases} \tag{16.9}$$

其中，$C=(c_1c_2\cdots c_n)$，$X=(x_1x_2\cdots x_n)^T$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

LP模型的经济解释如下：

在用LP模型描述的经济系统中包括若干种经济事项$j(j=1,2,\cdots,n)$，它们耗用若干种有限资源b_i（$i=1,2,\cdots,m$）；为生产一个单位的第j种产品，需要第i种资源的量为a_{ij}；在此种投入条件下，一个单位的第j种产品生产活动的产出收益，以c_j表示；

分析的目标在于，确定此系统中每种生产活动量x_j。确定x的方法有两种：

一种是在给定人力、物力、财力资源的情况下，使有限资源发挥最大的效益；另一种是在生产任务确定的前提下，使耗费的人力、物力、财力最少。

以上两种确定x_j的方法，其实质是确定保证全部生产活动的总和达到最优时的x_j。

由上述线性规划模型的定义，可知LP模型的建立是以下述三个基本设想为前提的：

(1) 比例性：每种经济活动的资源耗用量与经济活动的量成比例；每种活动对目标函数的贡献与经济活动的量成比例。

(2) 相加性：总的资源耗用量是各种经济活动的资源耗用量之和；目标函数的总值是各种活动的贡献量的和。

(3) 非负性：各种经济活动的量只能取零或正值，不取负值。

前两点在数学模型中表现为线性函数；第三点，即非负性的假设，也是根据经济实际情况为了分析的方便而提出来的。

建立线性规划模型的上述设想，很自然地导致线性规划模型在结构上有下列特征：

(1) LP模型由目标函数和约束条件两部分组成。目标函数只有一个，但可分为求最大值和最小值两种；约束条件可分为

≤、=、≥三种类型，约束条件的数目没有限制。

(2) LP 模型是多元一次方程或不等式构成，而每一变量 x_j 不能自乘，也不能与另一变量相乘。

(3) LP模型中的变量x_j均取零或正数，各个参数a_{ij}，b_i，c_j取肯定性数值。

(4) LP模型中约束条件数目m 与变量的数目 n 不一定相等。

（三）建立线性规划数学模型

建立数学模型，就是用数学符号来表示经济事项有关因素的相互关系。经济工作中，重要的一步就是研究所给经济问题的性质，建立起相应的数学模型。一般地说，如果一个实际问题具备以下三个条件，就可以建立起相应的线性规划数学模型：

(1) 限制条件：达到目标的条件是有一定限制的，这些限制可以用决策变量的线性等式或者线性不等式来表示。

(2) 选择条件：在完成某种任务时，有几种不同的配比方案可供选择。

(3) 优化条件：问题所要达到的目标能用线性函数来描述且能够用求最大值或求最小值来表示。

下面举例说明建立线性规划模型的一般方法和步骤，值得指出的是，为了便于阐明最基本的概念和方法，下面所举的例子，与实际问题的复杂性相比，都是一些极度地简化了的问题。

例2 某专业养鸡场将粗豆粉、玉米和石灰石三种饲料混合用来养鸡，每天需要混合饲料100公斤，其中至少应含0.8%但不超过 1.2%的钙，至少含 22%的蛋白质。已知每公斤粗豆粉中含有0.2%的钙和 50%的蛋白质，价格为 0.4元；每公斤玉米中含有0.1%的钙和 9%的蛋白质，价格为 0.3元；每公斤石灰石中含有38%的钙，价格为0.12元。问应如何混合饲料，才能使成本最低？

解 为了分析方便，现将问题中主要配料的营养含量列表如表16-2。

表16-2

配料 \ 每公斤配料含量	钙	蛋白质	配料单价（元/公斤）
粗豆粉	0.002	0.50	0.40
玉米	0.001	0.09	0.30
石灰石	0.38	0	0.12

确定决策变量：根据题意，设 x_1、x_2、x_3 分别表示生产 100 公斤混合饲料时需用的粗豆粉、玉米和石灰石的数量。

确定目标函数：根据题意，以成本最低为目标，故目标函数为求最小值型，每一单位原料对目标函数的"支付"见表16-2。于是有目标函数

$$S=0.40x_1+0.30x_2+0.12x_3$$

确定约束条件：根据题意，不失普遍性，不妨设生产此种混合饲料100公斤，其中至少含0.8%但不超过 1.2% 的钙，至少含22%的蛋白质。根据表 1-2 参数，于是本题的线性规划数学模型为：

求 $\min S=0.40x_1+0.30x_2+0.12x_3$

$$s\cdot t\begin{cases} x_1+x_2+x_3=100 \\ 0.002x_1+0.001x_2+0.38x_3\leqslant 100\times 1.2\% \\ 0.50x_1+0.09x_2\geqslant 100\times 22\% \\ 0.002x_1+0.001x_2+0.38x_3\geqslant 100\times 0.8\% \\ x_j\geqslant 0\ \ (j=1,2,3) \end{cases}$$

此类问题一般称为配料问题。此种模型具有普遍的实用价

值。如冶炼工业的原料配比，石油工业的原油混合，食品工业的营养配方，纺织工业的纤维比例，畜牧业的饲料混合等等，都是同样性质的问题。在经营管理中，如何既完成和超额完成利润计划指标，又使总成本最低的问题，一般有类似的数学模型。

例3 设某市区内有 A_1、A_2、A_3 三个粮库，分别有大米11吨、12吨、9吨，另有 B_1、B_2、B_3、B_4 四个粮店分别需要调进大米8吨、5吨、9吨、10吨。已知三个粮库到各个粮店每吨大米的运价见表16-3。

表16-3 单位：元/吨

粮店 \ 运价 \ 粮库	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	1	5
A_2	4	8	7	8
A_3	9	3	5	7

问应如何调运，才能使总运费最省？

解 确定决策变量：根据题意，设 x_{ij} 表示 A_i 粮库运往 B_j 粮店的吨数，$(i=1,2,3;\ j=1,2,3,4)$；

确定目标函数：根据题意，以总运费最省为目标。故目标函数为求最小值型。每1吨公里对目标函数的"支付"见表16-3，于是有目标函数

$$S=2x_{11}+3x_{12}+x_{13}+5x_{14}+4x_{21}+8x_{22}$$
$$+7x_{23}+8x_{24}+9x_{31}+3x_{32}+5x_{33}+7x_{34}$$

确定约束条件：根据题意，由粮库 A_i（$i=1,2,3$）分别运

往各粮店B_j（j=1，2，3，4）的大米数量之和应等于A_i的产量；同时，粮店B_j（j=1，2，3，4）得到各粮库供给的大米数量和应等于B_j的大米的需求量。由表16-3所给的参数，于是本题的线性规划的数学模型为：

求 $\min S=2x_{11}+3x_{12}+x_{13}+5x_{14}+4x_{21}+8x_{22}+7x_{23}+8x_{24}+9x_{31}+3x_{32}+5x_{33}+7x_{34}$

$$
\text{s.t}\begin{cases}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=11\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=12\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9\\
x_{11}+x_{21}+x_{31}=8\\
x_{12}+x_{22}+x_{32}=3\\
x_{13}+x_{23}+x_{33}=9\\
x_{14}+x_{24}+x_{34}=10\\
x_{ij}\geqslant 0,\ (i=1,\ 2,\ 3,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)
\end{cases}
$$

此类问题一般称为平衡运输问题，通常是要使总运费最省、总运量最大、空驶总距离最短等目标下，寻求最佳运输方案。另外，作物布局、机器的使用安排等问题，也有相同的数学模型，常称为广义运输问题。

例4 制造某种机床，需要A、B、C三种轴，规格如表16-4。各类轴件都用5.5米长的同一种圆钢下料，若计划生产100台机床，问最多要多少根圆钢？

解 把一根5.5米长的圆钢，截成长度分别为3.1米，2.1米和1.2米的材料，共有五种不同的截料方式。依题给条件，其数据可列表16-5。

设用第i种截料方式下料所用圆钢数量为x_i根（i=1，2，…，5）。

根据题意及所给的数据，建立线性规划数学模型如下

表16-4

轴类	规格（米）	每台需用（根）
A	3.1	1
B	2.1	2
C	1.2	4

表16-5

料长 材料数量 裁料方式	3.1	2.1	1.2	余料	截圆钢根数
Ⅰ	1	1	0	0.3	X_1
Ⅱ	1	0	2	0	X_2
Ⅲ	0	2	1	0.1	X_3
Ⅳ	0	1	2	1.0	X_4
Ⅴ	0	0	4	0.7	X_5
需用数	100	200	300		

$$\min S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 100 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \geqslant 200 \\ 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 4x_5 \geqslant 400 \\ x_j \geqslant 0,\ \text{整数}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ 5) \end{cases}$$

此类问题一般称为合理下料问题。在切割、裁剪工艺中，研究合理的下料方式，可以充分利用资源，降低成本。这类问题的困难并不在建立数学模型，而在于列出所有下料方式。

从上述的一些例子中，我们可以看出线性规划模型的建立，主要包括以下步骤：

1．确定决策变量（x_j或x_{ij}）

确定决策变量，就是确定优化的内容和对象。决策变量是不同方案赖以区分的根据，一般地，不同的决策变量表示着不同的方案。为此，必须研究问题的性质，规定问题的界限，简单的线性规划问题可以只有少数几个决策变量 复杂的问题则可能包括成百甚至上千个决策变量。

2．确定目标函数（S）

优化的目标是经济管理工作者选择的标准，线性规划模型中的目标函数是决策变量的线性函数，它反映经济工作者所追求的目标，反映“目标”与“决策变量”之间的关系。一般地，当决策变量取不同值时，目标函数相应地取不同的值。

3．确定约束条件

线性规划模型的约束条件，是指决策过程受限制的一些条件，或要求达到的一些最低限度的标准。它们是决策变量的线性方程式或线性不等式。大家知道，资源量往往是做出某种决策的限制条件，而满足需要则往往是要求达到的条件。属于前一类的约束条件，一般为“≤”类型，即有一个上限；属于后一类型的，一般为“≥”类型，即有一个下限。

从上述的例子中，我们还可以看出，利用线性规划模型解决经济优化问题，大致可以归纳为两类，一类是在有限的资源（人力、材料、设备、资金等）的条件下，如何合理地利用它们，使得完成的任务最多，所获得的收益最大；另一类是在某一任务提出之后，在已有条件下如何进行统筹安排，使之以最少的人力、物力和财力的耗费，达到规定的任务指标。