分数阶偏微分方程的动力学

黄建华　辛　杰　沈天龙　著

科学出版社

分数阶偏微分方程的动力学

黄建华　辛　杰　沈天龙　著

科 学 出 版 社

北　京

内 容 简 介

本书研究了分数阶长短波方程、分数阶非线性 Schrödinger 方程、分数阶 Boussinesq 方程、分数阶 MHD 方程、分数阶耦合 Ginzburg-Landau 方程以及分数次噪声驱动的非牛顿流系统的适定性和吸引子等动力学性质，讨论了 Lévy 噪声、α-平稳噪声和退化噪声驱动的几类流体发展方程的鞅解、大偏差原理和遍历性等统计特征，系统地总结了作者在分数阶偏微分方程特别是随机分数阶偏微分方程的动力学方面的研究成果.

本书可供大学数学专业高年级本科生、研究生、教师以及相关的科技工作者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

分数阶偏微分方程的动力学/黄建华，辛杰，沈天龙著. —北京：科学出版社, 2017.3

ISBN 978-7-03-051794-4

I. ①分… II. ①黄… ②辛… ③沈… III. ①偏微分方程—研究 IV. ①O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 029857 号

责任编辑：李静科／责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 3 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2017 年 3 月第一次印刷 印张：29 3/4
字数：588 000

定价：168.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

分数阶微积分几乎与整数阶微积分同时出现，分数阶微积分和分数阶微分方程在科学和工程的许多领域得到了深入研究和广泛应用，这些领域包括流体力学、电子网络、电磁学、概率论、统计学、粘弹性理论、电化学、量子力学、等离子体物理、超导、材料科学、湍流、经济金融等. 研究表明，分数阶微分方程模型可以更准确地描述一些实际问题的性质，例如，在线性和非线性固体遗传动力学、非牛顿流体力学、反常扩散和随机游走理论等复杂系统中出现的分数阶微分方程，分数阶非线性偏微分方程具有鲜明的物理背景和广阔的研究前景，近几年出现了描述粘弹性流体的分数阶 Maxwell 模型、广义二阶流体的分数阶模型、分数阶 Fokker-Planck 方程、分数阶 Kinetic 方程、分数阶 Schrödinger 方程、分数阶长短波方程、分数阶 Boussinesq 方程、分数阶 MHD 方程、分数阶 Ginzburg-Landau 方程等.

近年来，无穷维动力系统理论与偏微分方程和随机分析等交叉融合, 在一些领域取得很好的进展，推动着相关问题的深入研究. 本书系统地总结了作者及其合作者近年来在分数阶偏微分方程特别是随机分数阶偏微分方程的动力学方面的研究工作，将所研究的分数阶长短波方程、分数阶非线性 Schrödinger 方程、分数阶 Boussinesq 方程、分数阶 MHD 方程、分数阶耦合 Ginzburg-Landau 方程以及分数次噪声驱动的非牛顿流系统等进行梳理和分类，按照分数 Brown 运动、高斯噪声、Lévy 噪声、α-平稳噪声以及退化噪声等不同类型噪声驱动的几类 (分数阶) 偏微分方程适定性、动力学、遍历性、大偏差原理等研究内容整理成八章，汇聚成册. 本书 1.1 节、第 2, 3 章由辛杰整理和撰写，1.2 节、第 4, 5, 6, 9 章由黄建华整理和撰写, 第 7, 8 章由沈天龙整理和撰写，最后由黄建华进行统稿.

本书的出版得到了国家自然科学基金 (No: 10971225、11371367、11371183、11271050)、湖南省自然科学基金 (No: 11JJ3004)、山东省自然科学基金 (No: ZR2013AM004)、国防科学技术大学基础研究基金、国防科学技术大学“十二五”重点建设数学学科项目经费以及鲁东大学数学学科建设经费的资助, 在此一并表示感谢. 科学出版社的责任编辑为本书的出版付出了辛勤的劳动, 研究生张震、薛慧、葛焕敏、刘娜、任璐璐等仔细校对了书稿, 在此一并致谢.

由于作者水平有限，书中难免存在一些不足和错误, 敬请读者批评指正.

作　者

2016 年 8 月

目　　录

第 1 章　分数阶微积分与随机分析基础

1.1　分数阶微积分基础

分数阶微积分通常是整数阶导数与积分向任意非整数阶情形的拓广. 这是个古老的问题, 最早可以追溯到莱布尼茨和牛顿创立微积分的时代. L'Hôspital 于 1695 年 9 月 30 日在给莱布尼茨的一封信中问到: 当 $n = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{d^n}{dx^n} y$ 代表什么意思? 这可视为分数阶微积分的诞生日. 分数阶微积分几乎与整数阶微积分同时出现, 经过三百多年的发展, 分数阶微积分和分数阶微分方程在科学和工程的诸多领域得到了深入研究和广泛应用, 这些领域包括流体力学、电子网络、电磁学、概率论、统计学、粘弹性理论、电化学、量子力学、等离子体物理、超导、材料科学、湍流、经济金融等. 1974 年, Oldham 和 Spanier[14] 出版了第一部关于分数阶微积分的著作, 并于当年在美国召开了国际学术会议, 出版了第一部有关分数阶微积分理论和应用的会议论文集. 20 世纪 70 年代末, 美国耶鲁大学的 Mandelbrot 教授首次指出, 在自然界和许多科学技术中存在的一些现象与分数阶微积分之间有着紧密联系. 人们在研究湍流速度场的不规则起伏、Brown 运动、粘弹性材料具有记忆等问题时, 发现经典的整数阶微积分和微分方程模型很难准确地反映这些问题的复杂性质 [20]. 研究表明, 分数阶微分方程模型可以更准确地描述一些实际问题的性质, 在线性和非线性固体遗传动力学、非牛顿流体力学、反常扩散和随机游走理论等复杂系统中都出现了分数阶微分方程. 分数阶微积分与分数阶微分方程的理论和应用研究近年来在国际上得到了迅速发展, 参见 [6], [9], [11], [12], [17]. 分数阶微分方程、分数阶偏微分方程及分数阶差分方程的基本理论已日渐成熟并得到广泛应用. 目前常用的分数阶微积分主要有 Riemann-Liouville 型分数阶微积分、Caputo 型分数阶微积分、Weyl 型分数阶微积分、Grünwald-Letnikov 型分数阶微积分、Riesz 型分数阶微积分和 Marchaud-Hadamard 型分数阶微积分等.

本节主要介绍四种常用的分数阶微积分的定义: Grünwald-Letnikov 型分数阶微积分、Riemann-Liouville 型分数阶微积分、Caputo 型分数阶微积分以及 Weyl 型分数阶微积分.

1.1.1　Grünwald-Letnikov 型分数阶微积分

Grünwald-Letnikov 型分数阶导数是将连续函数经典的整数阶微分的阶数从整数推广到非整数, 通过对原微分的差分近似递推式求极限推演而得. 设 p 为整数,

函数 $f(s)$ 存在 $p+1$ 阶连续导数. 当 $q>0, p\geqslant[q]$ 时, 函数 $f(s)$ 的 q 阶 Grünwald-Letnikov 型导数定义为

$$
\begin{aligned}
{}_a^{\mathrm{GL}}D_t^q f(t) &= \lim_{h\to 0, nh=t-a} h^{-q}\sum_{r=0}^{n}\left[\begin{array}{c}-q\\ r\end{array}\right] f(t-rh),\\
&= \lim_{h\to 0, nh=t-a} h^{-q}\sum_{i=0}^{[\frac{t-a}{h}]}\left[\begin{array}{c}-q\\ r\end{array}\right] f(t-rh),
\end{aligned}
$$

其中 $\left[\begin{array}{c}-q\\ r\end{array}\right] = \dfrac{(-q)(-q+1)\cdots(-q+r-1)}{r!}$, 规定 $\left[\begin{array}{c}0\\ r\end{array}\right]=0, \left[\begin{array}{c}0\\ 0\end{array}\right]=1$, 则有 ${}_a^{\mathrm{GL}}D_t^0 f(t)=f(t)$. 当 $q<0$ 时, q 阶导数转化为 $-q$ 阶 Grünwald-Letnikov 积分. 令 $n=[-q]$, 用数学归纳法和分部积分法, 可以推知

$$
{}_a^{\mathrm{GL}}D_t^q f(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-q}}{\Gamma(k+1-q)} + \frac{1}{\Gamma(n+1-q)}\int_a^t (t-s)^{n-q} f^{(n+1)}(s)ds,
$$

其中 $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数, 定义为 $\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{\infty} r^{x-1}e^{-r}dr(x>0)$. Beta 函数与 Gamma 函数密切相关, 其定义为 $\mathrm{B}(x,y)=\displaystyle\int_0^1(1-r)^{x-1}r^{y-1}dr(x,y>0)$, 并且有 $\mathrm{B}(x,y)=\dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. 从而, 由 Grünwald-Letnikov 型分数阶导数定义可知, 幂函数 $t^m(m>0)$ 的 $\dfrac{-1}{2}$ 阶 Grünwald-Letnikov 型导数为

$$
\begin{aligned}
{}_a^{\mathrm{GL}}D_t^{\frac{-1}{2}}(t^m) &= \frac{1}{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}\int_0^t (t-s)^{\frac{1}{2}} m s^{m-1} ds\\
&= \frac{mt^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1-r)^{\frac{1}{2}} r^{m-1} dr\\
&= \frac{mt^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}\int_0^1 (1-r)^{\frac{3}{2}-1} r^{m-1} dr\\
&= \frac{mt^{m+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(1+\dfrac{1}{2}\right)}\mathrm{B}\left(\frac{3}{2}, m\right) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\dfrac{3}{2}\right)} t^{m+\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

1.1.2 Riemann-Liouville 型分数阶微积分

对于给定实数 a 及 $\alpha > 0$, 定义左侧 Riemann-Liouville 型分数阶积分为

$$I_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (t > a),$$

其中 $\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数. 相应的右侧 Riemann-Liouville 型分数阶积分为

$$I_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (t < b),$$

当 $\alpha = n$ 为整数时, 上述定义与整数阶积分的定义是一致的, 即

$$I_{a+}^{n} f(t) = \int_a^t d\tau_1 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau, \quad n \in \mathbb{N}.$$

下面定义 Riemann-Liouville 型分数阶左微分: 当 $\alpha < 0$ 时,

$${}_a^{\mathrm{RL}}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \tau^{-\alpha-1} f(t-\tau) d\tau;$$

当 $n-1 < \alpha \leqslant n$ 时,

$$\begin{aligned}{}_a^{\mathrm{RL}}D_t^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_{a+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \\ &= \sum_{n=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

下面用分数阶 Riemann-Liouville 型导数逼近整数阶导数, 即令 $\alpha \to n-1$, 则有

$$\begin{aligned}&\lim_{\alpha \to n-1} {}_a^{\mathrm{RL}}D_t^{\alpha} f(t) \\ =&\lim_{\alpha \to n-1} \left[\sum_{n=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(k+1-\alpha)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau\right] \\ =&f^{(n-1)}(a) + \int_a^t f^{(n)}(\tau) d\tau = \frac{d^{n-1} f(t)}{dt^{n-1}}.\end{aligned}$$

当 $0 < \alpha < 1$ 时, 则 Riemann-Liouville 型分数阶左微分可定义为

$${}_a^{\mathrm{RL}}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) d\tau.$$

由 Riemann-Liouville 型分数阶导数定义可知, 幂函数 $t^m(m>0)$ 的 $\frac{1}{2}$ 阶导数为

$$\begin{aligned}
{}_a^{\mathrm{RL}}D_t^{\frac{1}{2}}(t^m) &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{\frac{-1}{2}} s^m ds \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{d}{dt}(t^{m+\frac{1}{2}})\int_0^1 (1-r)^{\frac{-1}{2}} r^m dr \\
&= \frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)t^{m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, m+1\right) \\
&= \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} t^{m-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

注意到 Riemann-Liouville 型分数阶导数对 Grünwald-Letnikov 型分数阶导数进行了改进, 使之计算简化. 但是 Riemann-Liouville 型分数阶导数具有奇异性, 不便于在工程与物理中广泛应用, 下面介绍由意大利物理学家 Caputo 在 20 世纪 60 年代末提出的所谓 "Caputo" 型分数阶微分的概念以解决 Riemann-Liouville 型分数阶积分中的分数阶方程的初值问题.

1.1.3 Caputo 型分数阶微积分

定义 1.1.1 设 n 是不超过 α 的最大整数, 定义函数 $f(t)$ 的左侧 Caputo 型 α 阶导数为

$$ {}_a^{C}D_t^{\alpha} f(t) = I_{a+}^{n-a} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, $$

其中 $n=[\alpha]+1, n-1<\alpha\leqslant n, t>a$.

下面利用分部积分法, 使得 Caputo 型分数阶导数的定义更加方便使用, 即当 $n=[\alpha]+1, n-1<\alpha\leqslant n, t>a$ 时,

$$\begin{aligned}
{}_a^{C}D_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= \frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

令 $a\to n$, 则 Caputo 型分数阶导数逼近整数阶导数, 即有

$$\begin{aligned}\lim_{a\to n}{}_a^CD_t^\alpha f(t)&=\lim_{a\to n}\left[\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_a^t(t-\tau)^{n-\alpha}f^{(n+1)}(\tau)d\tau\right]\\&=f^{(n)}(a)+\int_z^t f^{(n+1)}(\tau)d\tau=f^{(n)}(t).\end{aligned}$$

当 $0<\alpha<1$ 时, 则 $n=1$ 且 Caputo 型分数阶左微分为

$${}_a^CD_t^\alpha f(t)=I_{a+}^{n-a}f'(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{-\alpha}f'(\tau)d\tau.$$

由 Caputo 型分数阶导数定义可知, 幂函数 $t^m(m>0)$ 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶导数为

$$\begin{aligned}{}_a^CD_t^{\frac{1}{2}}(t^m)&=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t(t-s)^{-\frac{1}{2}}ms^{m-1}ds\\&=\frac{mt^{m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^1(1-r)^{-\frac{1}{2}}r^{m-1}dr\\&=\frac{mt^{m-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},m\right)=\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}t^{m-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

当 α 是正整数时, α 阶 Caputo 型分数阶导数就是通常意义下的整数阶导数.

1.1.4 Weyl 型分数阶微积分

定义 1.1.2 如果 f 在无穷远处速降, 且 $\mathrm{Re}(\mu)>0$, 则函数 f 的 μ 阶 Weyl 型积分定义为

$$W_\infty^{-\mu}f(t)=W^{-\mu}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_t^\infty(\tau-t)^{\mu-1}f(\tau)d\tau.\tag{1.1.1}$$

由 Weyl 型分数阶积分定义可知, 指数函数 $e^{-mt}(m>0)$ 的 $\dfrac{1}{2}$ 阶积分为

$$W^{-\frac{1}{2}}(e^{-mt})=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_t^{+\infty}(s-t)^{-\frac{1}{2}}e^{-ms}ds=\frac{e^{-mt}}{\sqrt{m}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{+\infty}r^{-\frac{1}{2}}e^{-r}dr=\frac{e^{-mt}}{\sqrt{m}}.$$

利用变量代换 $\tau = t + \varepsilon$, 则

$$W^{-\mu}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \xi^{\mu-1}f(t+\xi)d\xi.$$

从而

$$W^{-\mu}[Df(t)] = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \xi^{\mu-1}Df(t+\xi)d\xi.$$

更一般地, 可以得到 Weyl 型分数阶积分的指数性质, 即如果 f 是速降的, 则有

$$W^{-\mu}[W^{-\nu}f(t)] = W^{-(\mu+\nu)}f(t).$$

注意到当 $\mu = 0$ 时, 等式 (1.1.1) 不一定是收敛的, 但当 $\mu > 0$ 时, $W^{-\mu}$ 是有意义的, 且

$$W^0 W^{-\mu} = W^{-\mu}.$$

由此可定义恒同算子

$$W^0 = I.$$

令 $E = D^{-1}$, 下面给出 Weyl 型分数阶导数的定义.

定义 1.1.3 令 $\mu > 0$, $n = [\mu] + 1$ 为不超过 μ 的最大整数. 记 $\nu = n - \mu$. 假设对函数 f, 其 $-\nu$ 阶 Weyl 型积分 $W^{-\nu}f(t)$ 存在且具有 n 阶连续导数, 则 f 的 μ 阶 Weyl 导数定义为

$$W^{\mu}f(t) = E^n[W^{-\nu}f(t)] = E^n[W^{-(n-\mu)}f(t)].$$

注意到当 f 是速降函数时, 对任意的 $\mu > 0$, 其 μ 阶 Weyl 型分数阶导数存在, 且仍属于速降函数类.

下面给出 Weyl 型分数阶积分和 Weyl 型分数阶导数之间的关系.

对任意的 μ 都有

$$W^{-\mu}W^{\mu} = I = W^{\mu}W^{-\mu}.$$

设 $\mu > 0, \nu > 0$, 则 Weyl 型分数阶导数满足指数性质, 即

$$W^{\mu}W^{\nu} = W^{\mu+\nu}, \quad W^0 = I.$$

设 f, g 都是速降函数, 且 g 为整函数, 则对任意的 $\nu > 0$,

$$W^{-\mu}[f(t)g(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{C}_{-\nu}^{k}[E^k g(t)][W^{-\nu-k}f(t)].$$

1.1.5 几类分数阶导数之间的关系

下面给出几类分数阶导数之间的比较, 详细地比较和讨论请参阅文献 [21] 的 4.3 节.

定理 1.1.1 设函数 $u(t)$ 具有 $m+1$ 阶连续导数, 而且 m 至少取到 $[\mu]=n-1$, 记 $m=n-1$, 则 $n=m+1$, 此时, 若函数 $u(t)$ 满足 $u^{(k)}(a)=0, k=0,1,\cdots,n-1$, 则 Grünwald-Letnikov 型分数阶微分的定义与 Caputo 型分数阶导数的定义是等价的.

定理 1.1.2 若函数 $u(t)$ 具有 $m+1$ 阶连续导数, 而且 m 至少取到 $[\mu]=n-1$, 即 $n=[\mathrm{Re}(\mu)]+1$. 不妨假设 $m=n-1$, 则有

(1) 若函数 $u(t)$ 满足 $u^{(k)}(a)=0, k=0,1,\cdots,n-1$, 则有

$$ {}_a^C D_t^\mu u(t) = {}_a^{\mathrm{RL}} D_t^\mu u(t); $$

(2) 若函数 $u(t)$ 满足 $u^{(k)}(b)=0, k=0,1,\cdots,n-1$, 则有

$$ {}_b^C D_t^\mu u(t) = {}_b^{\mathrm{RL}} D_t^\mu u(t). $$

定理 1.1.3 若 $\mu=n\in\mathbb{N}$, 且在通常意义下的微分 $u^{(n)}(t)$ 存在时, 则有

(1) ${}_a^C D_t^\mu u(t) = {}_a^{\mathrm{RL}} D_t^\mu u(t) = u^{(n)}(t)$;

(2) ${}_b^C D_t^\mu u(t) = {}_b^{\mathrm{RL}} D_t^\mu u(t) = (-1)^n u^{(n)}(t)$.

由上述结论可知，当阶数 n 为正整数时, Riemann-Liouville 型分数阶微分与 Caputo 型分数阶导数的定义是等价的. 而在其他情形下, 只有当函数 $u(t)$ 具有 $m+1$ 阶连续的导数, 且 m 至少取到 $[\mu]=n-1$, 函数满足 $u^{(k)}(a)=0, k=0,1,\cdots,n-1$ 时, 二者是等价的. 否则就不等价. 除对常数求分数阶导数的结果不同之外, 还有一些不同之处. Riemann-Liouville 型分数阶导数 ${}_0^{\mathrm{RL}} D_t^\mu$ 在 $\dfrac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}$ 和 $\dfrac{d^n}{dt^n}$ 之间架起了一座 “桥”: 即当 μ 为任意实数时, ${}_0^{\mathrm{RL}} D_t^\mu$ 在区间 $(-\infty,\infty)$ 上架起了 “桥”. 但是对 Caputo 型分数阶导数 ${}_0^C D_t^\mu$, 注意到 $\lim_{\mu\to(n-1)^+} {}_0^C D_t^\mu(t) = u^{n-1}(t) - u^{n-1}(0)$, $\lim_{\mu\to n^-} {}_0^C D_t^\mu(t) = u^n(t)$. 即 Caputo 型分数阶导数 ${}_0^C D_t^\mu$ 在区间左端点上有可能和经典导数的概念不吻合, 这一点也是区别它与 Riemann-Liouville 型分数阶导数的一个特征.

实际上，引入 Riemann-Liouville 型分数阶微分可以简化分数阶导数的计算; 引入 Caputo 型分数阶导数可让其 Laplace 变换更简洁，有利于分数阶微分方程的求解与分析. Caputo 型分数阶导数定义与 Riemann-Liouville 型分数阶微分相比较，其主要的优越性在于在分数阶微分系统的初始条件上，Caputo 导数的定义采取了与整数阶微分方程相同的形式，包括整数阶导数值对于未知函数在端点的值的限制等，而 Riemann-Liouville 型分数阶微分不具有上述好的特点.

1.2 随机动力系统基础

1.2.1 Brown 运动

定义 1.2.1 设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 是带有滤子 $\mathscr{F}_t$ 的概率空间, 如果一维实值连续的、$\mathscr{F}_t$-适应的随机过程 B_t 满足下面三个条件:

(1) (零初值) $B_0=0$, a.s.;

(2) (正态性) 对任意的 $0\leqslant s<t<\infty$, $B_t-B_s:N(0,t-s)$, 即 B_t-B_s 服从均值为 0, 方差为 $t-s$ 的正态分布;

(3) (独立增量) 对任意 $0\leqslant s<t<\infty$, B_t-B_s 与 F_s 独立, 则称随机过程 B_t 为一维 Brown 运动或者 Wiener 过程.

附注 1.2.1 m 维的随机过程 $B(t)=(B_1(t),B_2(t),\cdots,B_m(t))^{\mathrm{T}}$ 称为 m 维 Brown 运动, 如果它的每一个分量 $B_i(t),i=1,2,\cdots,m$ 都是一维 Brown 运动, 并且 $B_1(t),B_2(t),\cdots,B_m(t)$ 相互独立.

Brown 运动具有下面的性质.

定理 1.2.1 Brown 运动 B_t 具有下列轨道性质:

(1) (连续性) B_t 的几乎所有轨道在 $[0,\infty)$ 上连续.

(2) (不可微性) 设 $\alpha>\dfrac{1}{2}$, 则对几乎所有的轨道, 都有

$$\overline{\lim_{t\to s}}\frac{|B(t)-B(s)|}{|t-s|^{\alpha}}=\infty,\quad \forall t\geqslant 0.$$

由 $\alpha=1$ 可知, Brown 运动 B_t 的几乎所有轨道在 $[0,\infty)$ 上处处不可微, 也不是有界变差的.

(3) Brown 运动 B_t 是连续的平方可积鞅, 其二次变分 $\langle B_t,B_t\rangle_t=t\ (t\geqslant 0)$.

(4) (渐近性) 一维标准 Brown 运动满足重对数率

$$\underline{\lim_{t\to s}}\frac{B(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-1,\ \text{a.s.},\quad \overline{\lim_{t\to s}}\frac{B(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1,\ \text{a.s.}$$

1.2.2 Itô 积分的定义与性质

设 $(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P},\mathscr{F}_t)$ 是带有滤子的概率空间, $B_t(t\geqslant 0)$ 是定义在该概率空间上的一维 Brown 运动, 设 $0\leqslant a<b<\infty$, 令 $M^2([a,b];\mathbb{R})$ 表示所有可测的、$\mathscr{F}_t$-适应的且满足

$$\|\varphi\|^2=\mathbb{E}\int_a^b|\varphi(t)|^2dt<\infty$$

的随机过程 $\varphi(t),t\in[a,b]$ 组成的集合, 并赋予上述范数, 则 $(M^2([a,b];\mathbb{R}),\|g\|)$ 构成一个 Banach 空间.

类似于定积分的定义, 先从简单随机过程的随机积分定义出发, 再给出一般过程的 Itô 随机积分.

定义 1.2.2 (简单过程) 设 $\varphi(t), t \in [a,b]$ 是一个实值随机过程, 如果存在区间 $[a,b]$ 的一个分割 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ 和有界随机变量 $\xi_i(0 \leqslant i \leqslant k-1)$, 使得 ξ_i 是 $\mathscr{F}_{t_i}$ 可测的, 且满足

$$\varphi(t) = \xi_0 I_{[t_0,t_1]} + \sum_{i=1}^{k-1} \xi_i I_{[t_i,t_{i+1}]},$$

则称随机过程 $\varphi(t), t \in [a,b]$ 为简单过程.

附注 1.2.2 称所有简单过程组成的集合为 $M_0([a,b];\mathbb{R})$.

下面先给出简单过程的 Itô 随机积分的定义.

定义 1.2.3 设 $\varphi(t), t \in [a,b]$ 为简单过程, 其关于 Brown 运动 $B_t(t \geqslant 0)$ 的 Itô 积分定义为

$$\int_a^b \varphi(t) dB_t = \sum_{i=0}^{k-1} \xi_i (B(t_{i+1}) - B(t_i)).$$

附注 1.2.3 注意到任意的平方可积鞅 $\psi \in M^2([a,b];\mathbb{R})$, 一定存在简单过程序列: $\varphi_n(t) \in M_0([a,b];\mathbb{R})$, 使得 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E} \int_a^b |\psi(t) - \varphi_n(t)|^2 dt = 0$.

下面先给出平方可积鞅的 Itô 随机积分定义.

定义 1.2.4 设 $\psi(t), t \in [a,b]$ 为平方可积鞅, 其关于 Brown 运动 $B_t(t \geqslant 0)$ 的 Itô 积分定义为

$$\int_a^b \psi(t) dB_t = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t) dB_t,$$

其中 $\varphi_n(t) \in M_0([a,b];\mathbb{R})$ 是满足附注 1.2.3 的简单过程序列.

Itô 随机积分具有通常的线性性与可加性, 同时具备随机积分特有的性质.

定理 1.2.2 Itô 随机积分具有如下性质:

(1) 设 $g \in M^2([a,b];\mathbb{R})$, 则 $\mathbb{E} \int_{t_0}^t g(t) dB(t) = 0$ (可通过取期望消去随机积分项).

(2) 设 $g \in M^2([a,b];\mathbb{R})$, 则有如下二阶矩估计:

$$\mathbb{E} \left| \int_{t_0}^t g(t) dw(t) \right|^2 = \int_{t_0}^t \mathbb{E}|g(t)|^2 dt,$$

其中 $|g(t)|$ 是迹范数.