

电力电子变换器的 周期平衡态与分岔分析

张 浩 著



科学出版社

电力电子变换器的 周期平衡态与分岔分析

张 浩 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

电力电子变换器本质上属于分段光滑的非自治系统,研究其存在的周期平衡态及动力学演化机制,对于认识和理解其复杂行为并指导其优化设计具有重要的意义。本书系统地论述了电力电子变换器的周期平衡态与分岔理论分析方法,介绍了用于描述电力电子变换器复杂行为的建模方法,着重分析了 DC-DC 变换器中极限环产生机理、AC-DC 和 DC-AC 变换器中的快尺度分岔和慢尺度分岔现象以及与周期平衡态密切相关的问题,如间歇性、非线性扰动行为、不对称性、非线性交互作用等。此外,与稳定性相关的多参数分析理论也在书中作了介绍。

本书可供高等学校电力电子、电气工程与自动化及电子与信息类等相关学科的师生使用,也可供相关领域的科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电力电子变换器的周期平衡态与分岔分析/张浩著. —北京:科学出版社, 2016. 6

ISBN 978-7-03-048938-8

I. ①电… II. ①张… III. ①变换器-研究 IV. ①TN624

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 139132 号

责任编辑:祝 洁 杨 丹 / 责任校对:郑金红

责任印制:徐晓晨 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京教图印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2016 年 6 月第一次印刷 印张:11 3/4

字数:237 000

定价:75.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

作为一类典型的分段光滑非自治系统,电力电子变换器中会出现诸如倍周期分岔、Hopf 分岔及混沌等丰富的非线性现象。其中,电力电子变换器中存在着两种类型的周期平衡态:一种是在 DC-DC 变换器中,以低频振荡现象表现出的极限环;另一种则是在 AC-DC 和 DC-AC 变换器中,以固有周期解形式呈现的周期平衡态。前者是系统的不稳定行为,是不期望的,着重于研究极限环产生机理;而后者是稳定的,是工程实际中所期望的,着重研究其周期平衡态及其动力学行为演化过程。

本书主要介绍了电力电子变换器中存在的周期平衡态及其动力学演化机制,在系统控制、建模、理论分析等方面做了详细介绍。本书以大信号平均模型为主,系统地介绍了电力电子变换器中周期平衡态的分析方法,是一个比较完备的体系。除此之外,还包含一些最新的研究成果,如建立了多参数稳定性理论等。具体内容如下:

第 2 章以 Boost DC-DC 变换器为例,推导出了用于描述其低频域动力学行为的小信号状态平均模型,从电路层面剖析了两类极限环产生的物理机理,确定了系统出现极限环的临界分岔条件,给出了分岔点处极限环的解析表达式。

第 3 章在理想开关模型的基础上,建立了用于分析峰值电流型 Boost PFC 变换器的高频域动力学行为的频闪映射模型,研究了其中快尺度倍周期分岔行为的动力学特性,并采用折叠分岔图分析了快尺度动力学行为的间歇性,给出了系统参数空间的稳定行为边界图。

第 4 章基于单周控制的自治性,建立了描述单周控制 SEPIC PFC 变换器的低频域动力学行为的单变量非线性微分方程,采用谐波平衡法得到了其解析的周期平衡解,继而通过判定 Floquet 乘子的变化趋势,预测了该变换器首次失稳时分岔点的位置和类型,揭示了系统出现慢尺度分岔现象的动力学机理。

第 5 章研究了单周期控制型 Zeta PFC 变换器中的非线性扰动行为。建立了平均意义下 SPICE 大信号电路模型,从数值仿真层面研究了该变换器中的输入电流和输出电压扰动行为;同时,基于功率平衡近似原理,采用 Fourier 级数展开法求得输入电流和输出电压的周期解析解,并通过特征值分析法判定周期解的稳定性以获取系统稳定运行边界。

第 6 章依托 Lyapunov 稳定性定义,提出了非线性时变周期(NTP)系统的稳定性等价理论,并通过采用合适的同胚变换使得针对参数空间的无量纲降维分析

成为可能,给出了参数空间归一化映射的基本性质,建立了研究 NTP 系统中的多参数稳定性分析理论。最后,以单周控制 Zeta PFC 变换器为例,研究了参数合力关联关系对系统稳定性的影响,建立了 Zeta PFC 变换器的功率传输不均衡理论,从电路物理层面揭示了参数合力关联关系影响系统稳定性的方式。

第 7 章以峰值电流型 Buck-Boost 逆变器为例,通过引入电流内环的采样保持效应,将丢失的电感电流的开关信息恢复到传统平均模型中,提高其动力学分辨率;在此模型基础上,通过分析系统高频极点随参数变化的运动轨迹,揭示了其中快尺度分岔行为的动力学机制,为在同一个框架体系下研究快尺度与慢尺度分岔提供了一种新思路。最后,分析了相位偏移与纹波效应对快尺度分岔不对称性的影响。

第 8 章推导出了级联 Boost 逆变器的大信号平均模型,利用虚拟正交变换和瞬时有功平衡原理建立了系统的虚拟等效模型,将非自治周期系统转化为自治系统。同时,通过特征值灵敏度和特征值轨迹分析,筛选出了对系统的稳定性和动态性能起关键作用的电路参数,采用了特征值分析法对由关键参数引起的中频振荡现象进行理论分析,揭示了其产生中频振荡现象的内在机理。尤其是采用非线性模态级数法对级联系统中瞬态过程的交互机理进行了研究,分析了系统交互作用与电路参数之间的关系,探究了系统遭受扰动后瞬态过程中的主导振荡模式。

借此机会向我的恩师马西奎教授表示衷心的感谢,感谢他长期以来在研究工作上给予的指导和帮助。西安交通大学刘崇新教授在百忙中对本书进行了仔细审阅与修改,在此表示诚挚的感谢。还要感谢我的研究生张源、李卫杰、关为民、董帅、丁会芳、丁宏辉、万小进、芦珊等对本书撰写所做的贡献和提供的帮助。

本书出版得到了西安交通大学电气学院和电气设备电气绝缘国家重点实验室的资助和支持,在此表示感谢;也感谢国家自然科学基金项目(51577141)的资助。

限于作者的知识水平,书中难免存在不妥之处,恳请读者批评指正。

作 者

于西安交通大学

2016 年 3 月 28 日

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 电力电子变换器的电路拓扑	2
1.2 控制策略	3
1.2.1 电压型控制	3
1.2.2 电流型控制	3
1.2.3 单周控制	4
1.3 建模方法	5
1.3.1 状态空间平均建模	5
1.3.2 非线性离散建模	6
1.4 非线性动力学基础知识	7
1.4.1 非线性动力学基本概念	7
1.4.2 稳定性理论	9
1.4.3 分岔理论及其数值分析	11
参考文献	14
第 2 章 电压型 Boost DC-DC 变换器中的极限环机理	15
2.1 工作原理与建模.....	15
2.1.1 工作原理	15
2.1.2 状态空间平均模型.....	17
2.2 两类极限环现象.....	18
2.2.1 第一类极限环	18
2.2.2 第二类极限环	21
2.3 理论分析.....	23
2.3.1 稳定性分析	23
2.3.2 极限环解析表达式.....	23
2.4 数值仿真与电路实验.....	25
2.5 本章小结.....	30
参考文献	30
第 3 章 峰值电流型 Boost PFC 变换器中的快尺度分岔与间歇性分析	32
3.1 电路描述与建模.....	32

3.1.1	电路描述	32
3.1.2	频闪建模	34
3.2	数值结果与分析	35
3.2.1	数值结果	35
3.2.2	结果分析	40
3.3	PSPICE 电路实验结果	42
3.4	本章小结	43
	参考文献	44
第 4 章	单周控制 SEPIC PFC 变换器中的慢尺度分岔行为	46
4.1	电路描述与数值仿真	46
4.2	理论分析	50
4.2.1	非线性状态空间平均建模	50
4.2.2	系统周期平衡态的求解	52
4.2.3	Floquet 理论分析	56
4.3	PSPICE 电路实验	59
4.4	本章小结	61
	参考文献	61
第 5 章	单周控制 Zeta PFC 变换器中的非线性扰动行为	64
5.1	电路工作原理	64
5.2	SPICE 电路模型及其扰动仿真	68
5.2.1	SPICE 大信号平均电路模型	68
5.2.2	非线性动仿真	69
5.3	理论分析	71
5.3.1	功率平衡近似与 Fourier 级数分析	71
5.3.2	扰动运行的参数边界条件	73
5.4	电路实验	76
5.5	本章小结	78
	参考文献	78
第 6 章	非线性时变周期系统的多参数稳定性理论及其在 Zeta PFC 变换器中的应用	81
6.1	基于无量纲分析法的非线性时变周期系统多参数稳定性分析理论	82
6.1.1	非线性时变周期系统模型定义	82
6.1.2	非线性时变周期系统的稳定性等价定理	83
6.1.3	基于无量纲分析法的高维 PFC 变换器多参数稳定性分析	91
6.2	多参数稳定性分析理论在 Zeta PFC 变换器中的应用	97

6.2.1	Zeta PFC 变换器及其数学模型	98
6.2.2	特征值稳定性分析与电路实验验证	103
6.2.3	参数合力关联关系的功率流传输不均衡理论	107
6.2.4	多参数稳定性边界	109
6.3	本章小结	112
	参考文献	113
第 7 章	峰值电流型 Buck-Boost 逆变器中的快尺度分岔与不对称性分析 ...	115
7.1	工作原理	115
7.2	改进平均模型	117
7.2.1	主电路传递函数	117
7.2.2	电流闭环传递函数	118
7.2.3	双闭环传递函数	122
7.3	快尺度倍周期分岔行为分析	124
7.3.1	稳定状态	124
7.3.2	快尺度分岔	125
7.3.3	极点运动轨迹分析	125
7.4	快尺度倍周期分岔的不对称性分析	127
7.4.1	等效斜坡补偿	127
7.4.2	相位偏移与纹波效应	131
7.5	本章小结	132
	参考文献	132
第 8 章	级联 Boost 逆变器中的慢尺度分岔与非线性交互机理	135
8.1	工作原理与建模	135
8.1.1	电路描述	135
8.1.2	非线性状态空间平均建模	137
8.1.3	虚拟等效模型	140
8.1.4	模型验证	144
8.2	慢尺度分岔行为与稳定性分析	146
8.2.1	特征值灵敏度分析	146
8.2.2	数值仿真	153
8.2.3	参数稳定边界	155
8.3	非线性交互机理研究	157
8.3.1	系统非线性模态级数解	157
8.3.2	瞬态行为	160
8.3.3	瞬态特性分析	161

8.3.4 模态间的非线性交互作用	165
8.3.5 主导振荡模式	171
8.4 本章小结	172
参考文献	173
附录 A	175
附录 B	177

第 1 章 绪 论

随着科学技术的迅速发展,电力电子变换器作为一种实现电能形式转换的电力电子装置,在电力、航空、交通、通信和计算机等诸多领域得到了广泛应用^[1]。根据电能转换形式的不同,电力电子变换器可分为以下四类^[2]:①AC-DC 整流器,将交流变为直流;②DC-DC 变换器,将直流变为直流;③DC-AC 逆变器,将直流变为交流;④AC-AC 变频器,将交流变为交流。其中,DC-DC 变换器广泛应用于各种开关电源,为直流负载供电;而 DC-AC 逆变器将各种直流电源(如光伏发电、蓄电池、燃料电池等)转换为交流电,从而实现为交流负载供电。此外,AC-DC 功率因数校正(PFC)变换器是提高功率因数、解决电网谐波污染问题的有效手段。

由于开关元件的存在,电力电子变换器本质上属于一类典型的分段光滑系统,常常会出现如倍周期分岔、Hopf 分岔、边界碰撞分岔及混沌等丰富的非线性现象^[3]。实际上,这些非线性现象的产生表征了电力电子变换器运行在不稳定的状态下,往往会导致开关应力急剧增大、电磁干扰(EMI)大幅增强,系统性能和转换效率显著降低,甚至无法工作^[4]。在电力电子技术快速发展和日趋成熟的今天,人们对电力电子设备系统可靠性和性能的需求标准不断提高。这些都给电力电子变换器的设计带来了极大挑战,如要实现系统优化设计,提出最佳方案,非线性因素必然不能忽略。因此,深入研究影响电力电子变换器稳定性的关键电路参数,建立与核心参数相关联的系统稳定边界,揭示电力电子变换器的复杂行为机理显得尤为重要。

虽然非线性现象在电力电子变换器中普遍存在,但其基础研究却始于 20 世纪 80 年代末期^[5]。随后,关于电力电子变换器复杂动力学行为的研究引起了人们的极大关注^[6]。目前,分析电力电子变换器中复杂行为的起因、给出电力电子变换器参数稳定域、优化其动力学行为已成为电力电子领域研究的热点问题^[7]。研究结果表明,电力电子变换器中存在着两种类型的周期平衡态:一种是在 DC-DC 变换器中,以低频振荡现象表现出的极限环;另一种则是在 AC-DC 和 DC-AC 变换器中,以固有周期解形式呈现出的周期平衡态。事实上,前者是系统的不稳定行为,是不期望的,着重于研究极限环产生机理;而后者是稳定的,是工程实际中所期望的,着重研究其周期平衡态及其动力学行为演化过程。

近三十年来,随着电力电子变换器中复杂行为研究的不断深入,人们已经在系统动力学建模、数值分析、系统仿真和电路实验等方面取得了许多实质性进展^[8]。对电力电子变换器中非线性现象的识别、内在起因的探讨以及多参数稳定性理论的研究也逐步推进,使得电力电子变换器的分析与设计进入了一个崭新的阶段。

1.1 电力电子变换器的电路拓扑

本节简要介绍 DC-DC 变换器的主电路拓扑结构,如图 1-1 所示^[4]。根据主电路阶数可分为两类,即低维变换器和高维变换器,其中图 1-1(a)~图 1-1(c)属于低维变换器,图 1-1(d)~图 1-1(f)属于高维变换器。另外,DC-DC 变换器有两种运行方式:连续导电方式(CCM)和不连续导电方式(DCM)。

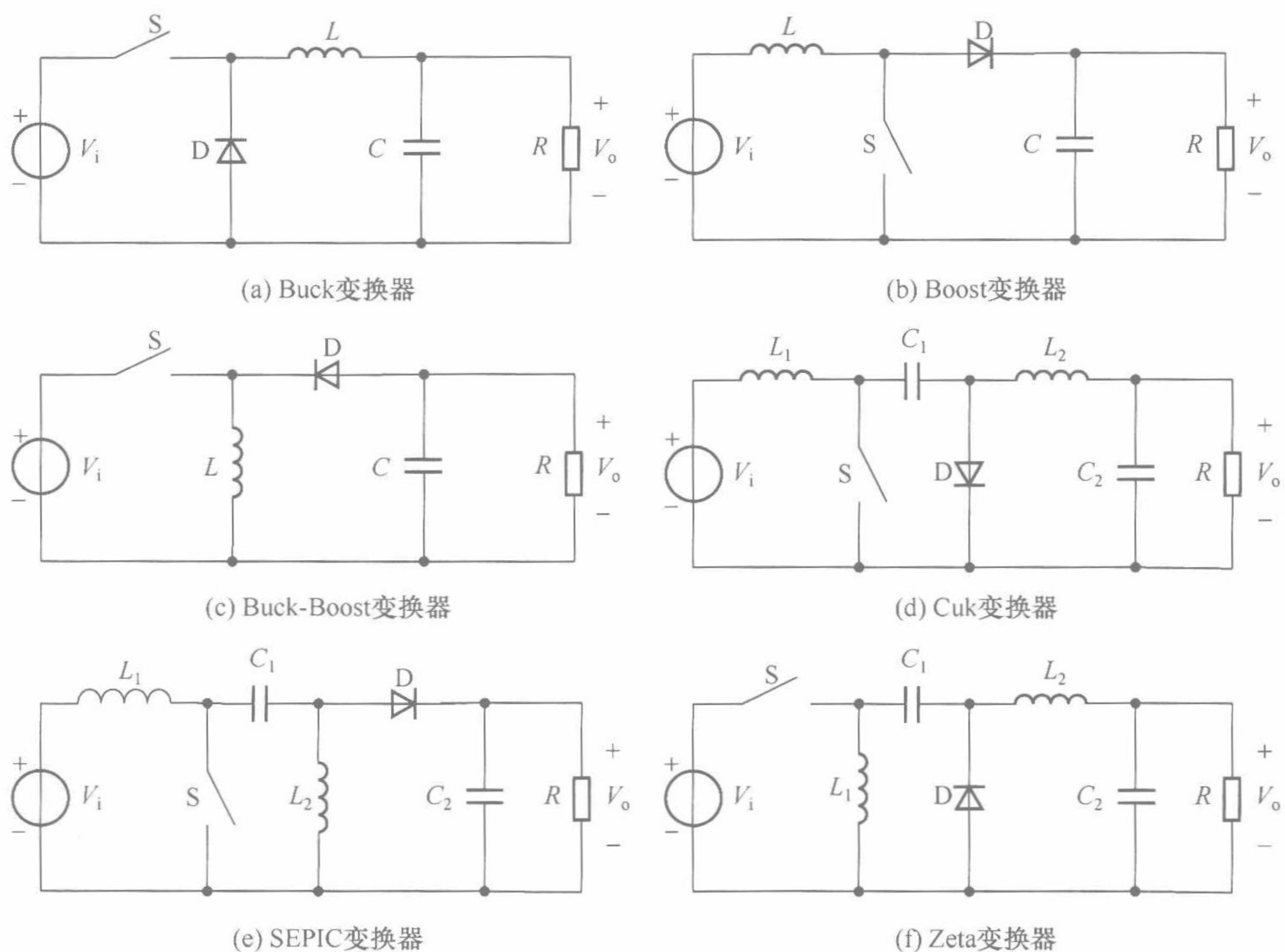


图 1-1 基本 DC-DC 变换器的主电路拓扑结构

设 DC-DC 变换器的电压转换率为 $M(D)$,则^[1]

$$M(D) = \frac{V_o}{V_i} \tag{1-1}$$

式中, D 为占空比 ($0 \leq D \leq 1$); V_i 为输入电压; V_o 为输出电压。

于是,六种基本 DC-DC 变换器的输入-输出电压关系如表 1-1 所示。

表 1-1 DC-DC 变换器的输入-输出电压关系

电压转换率	Buck	Boost	Buck-Boost	Cuk	SEPIC	Zeta
$M(D)$	D	$\frac{1}{1-D}$	$-\frac{D}{1-D}$	$-\frac{D}{1-D}$	$\frac{D}{1-D}$	$\frac{D}{1-D}$

1.2 控制策略

已有控制策略大体上可分为两类^[3,4],即电压型控制和电流型控制。对于前者而言,控制回路仅使用输出电压作为反馈信号,而后者的控制回路则由电流内环与电压外环组成。电压型和电流型控制已在工程实际中被广泛使用。近年来,单周控制由于其独特优势而备受青睐^[9],本节主要介绍电力电子变换器的三种控制策略^[3,4,9]。

1.2.1 电压型控制

作为电力电子变换器中最常用的控制策略之一,电压型控制出现得较早,优点在于结构简单,仅有一个电压反馈控制回路。工作原理为:通过补偿环节调控电压误差信号,输出控制信号 v_{con} ,再将 v_{con} 与锯齿波信号 v_{ramp} 作比较,产生脉宽调制(PWM)信号,控制开关 S 的通断,如图 1-2 所示。

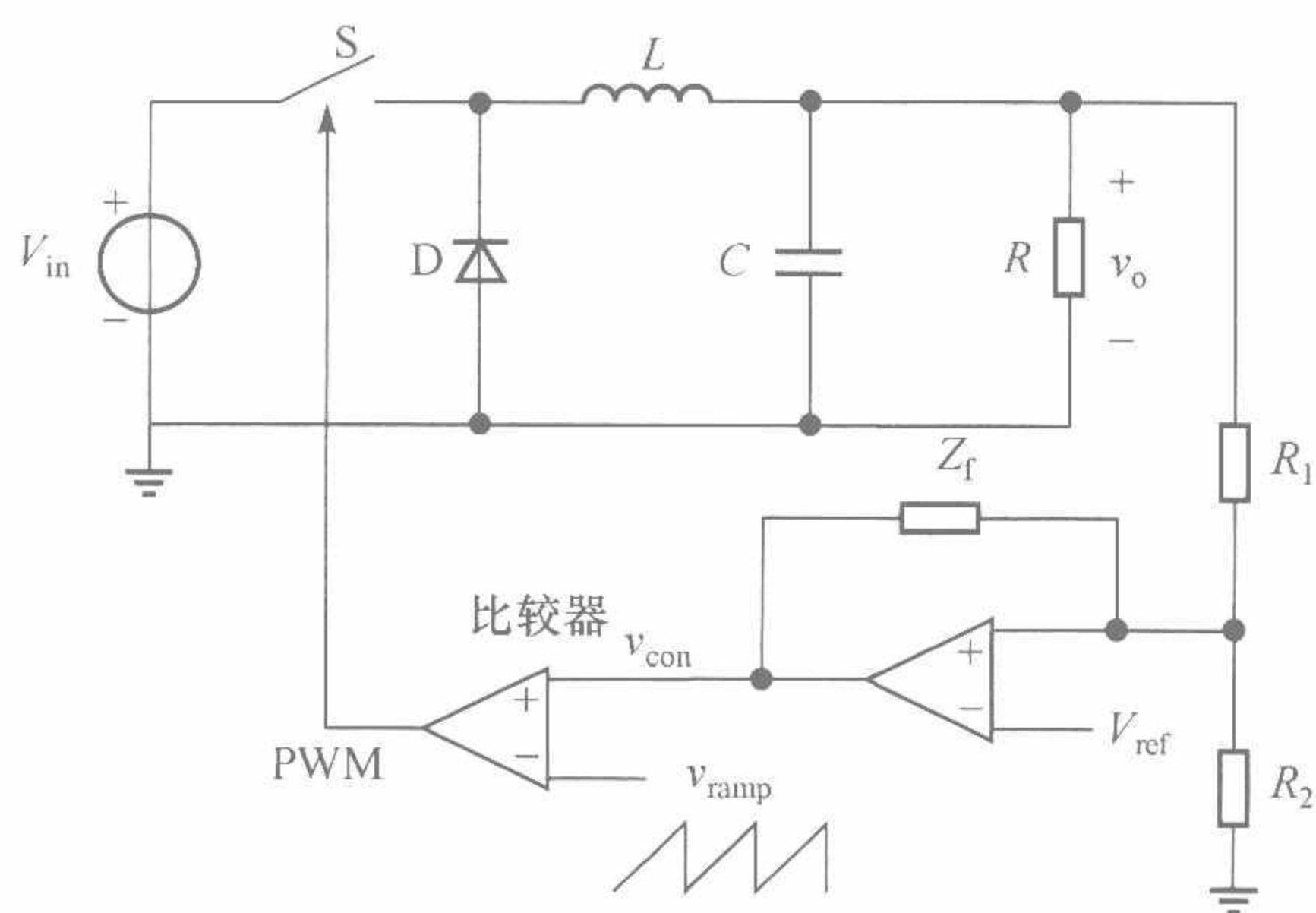


图 1-2 电压型控制原理

然而,电压型控制难以有效控制主电路电流,因而通常需增加额外的过电流保护电路以避免过载和短路。

1.2.2 电流型控制

针对电压型控制的不足,人们提出了电流型控制策略,即在电压反馈回路的基础上增加电流内环。电流内环的作用是使电感电流 i_L 跟踪由电压外环所提供的电流参考信号 I_{ref} 。除自动限流的作用外,电流型控制还能改善变换器的动态性能。电流型控制有多种实现方式,其中最常用的是峰值电流型控制和平均电流型控制。

1. 峰值电流型控制

峰值电流型控制原理示意图,如图 1-3 所示。其基本原理如下:在每个时钟周期起始时刻,时钟脉冲信号 CLK 使 RS 触发器置位,开关 S 导通;当 i_L 达到电流参考值 I_{ref} 时,比较器输出高电平,使 RS 触发器复位,开关 S 关断。

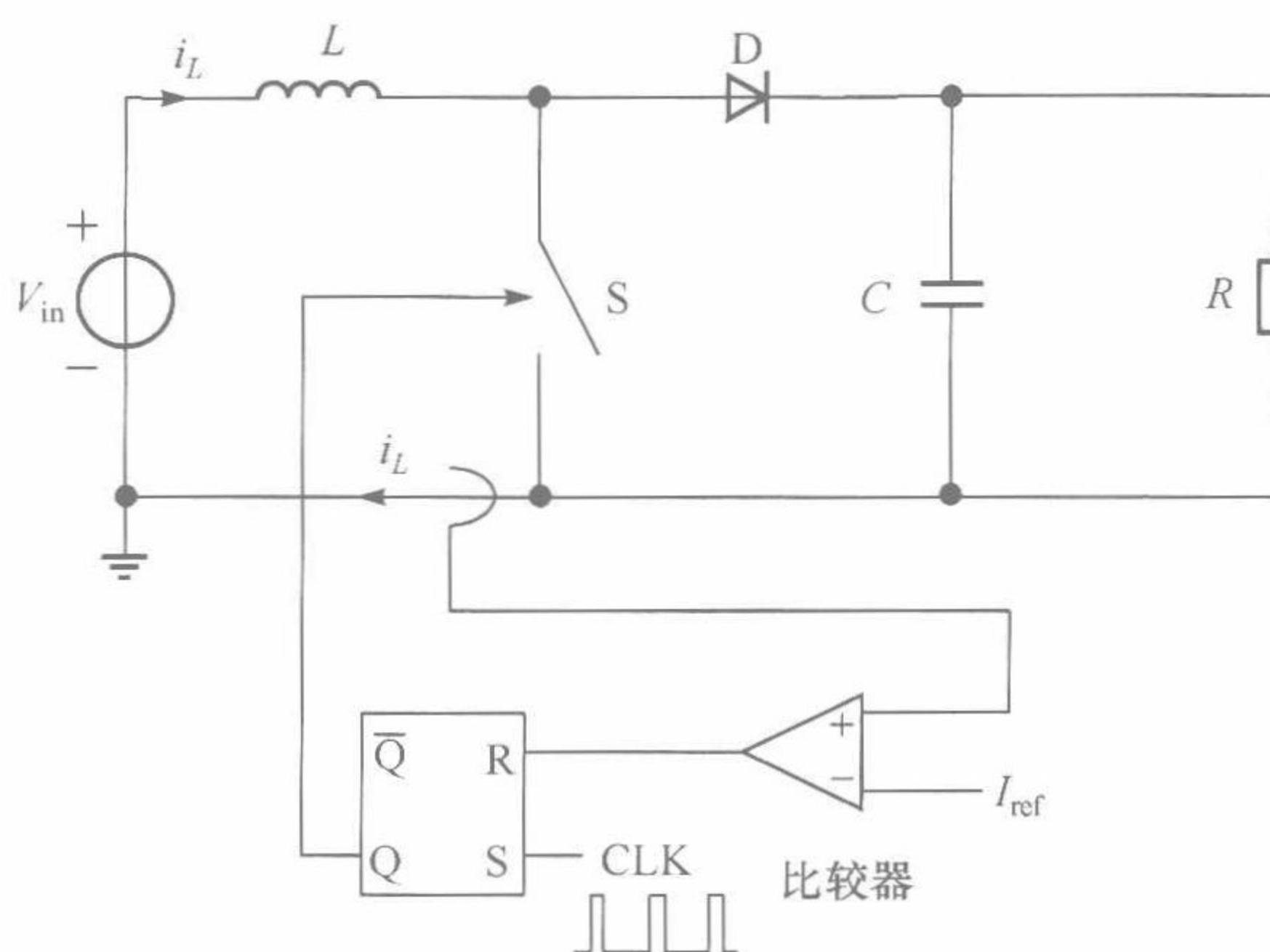


图 1-3 峰值电流型控制原理

峰值电流型控制虽有诸多优点,但还存在一些不足之处:①当占空比 D 大于 0.5 时,变换器工作于不稳定的状态,因此实际中常常要求加入斜坡补偿环节;②由于控制的是电感电流峰值,而非平均值,故难以实现对电感电流平均值的精确控制;③对噪声敏感。

2. 平均电流型控制

平均电流型控制示意图见图 1-4。其基本原理是:通过补偿环节调控电流误差信号,输出控制信号 v_{con} ,再将其与锯齿波信号 v_{ramp} 作比较,产生 PWM 信号,控制开关 S 的通断。

与峰值电流型控制相比,平均电流型控制的优点是:①具有高增益的电流放大器;②抑制噪声能力强;③无须斜坡补偿。

1.2.3 单周控制

单周控制是一种非线性控制策略,具有动态响应速度快、抑制输入电压扰动等优点^[9]。其基本原理是:在每个时钟周期起始时刻,时钟脉冲信号 CLK 使 RS 触发器置位,即开关 S 导通,积分开关 S_{int} 关断,积分器开始对开关变量 v_D 进行积分;当积分器输出信号 v_{int} 达到参考信号 V_{ref} 时,比较器输出高电平,使 RS 触发器复

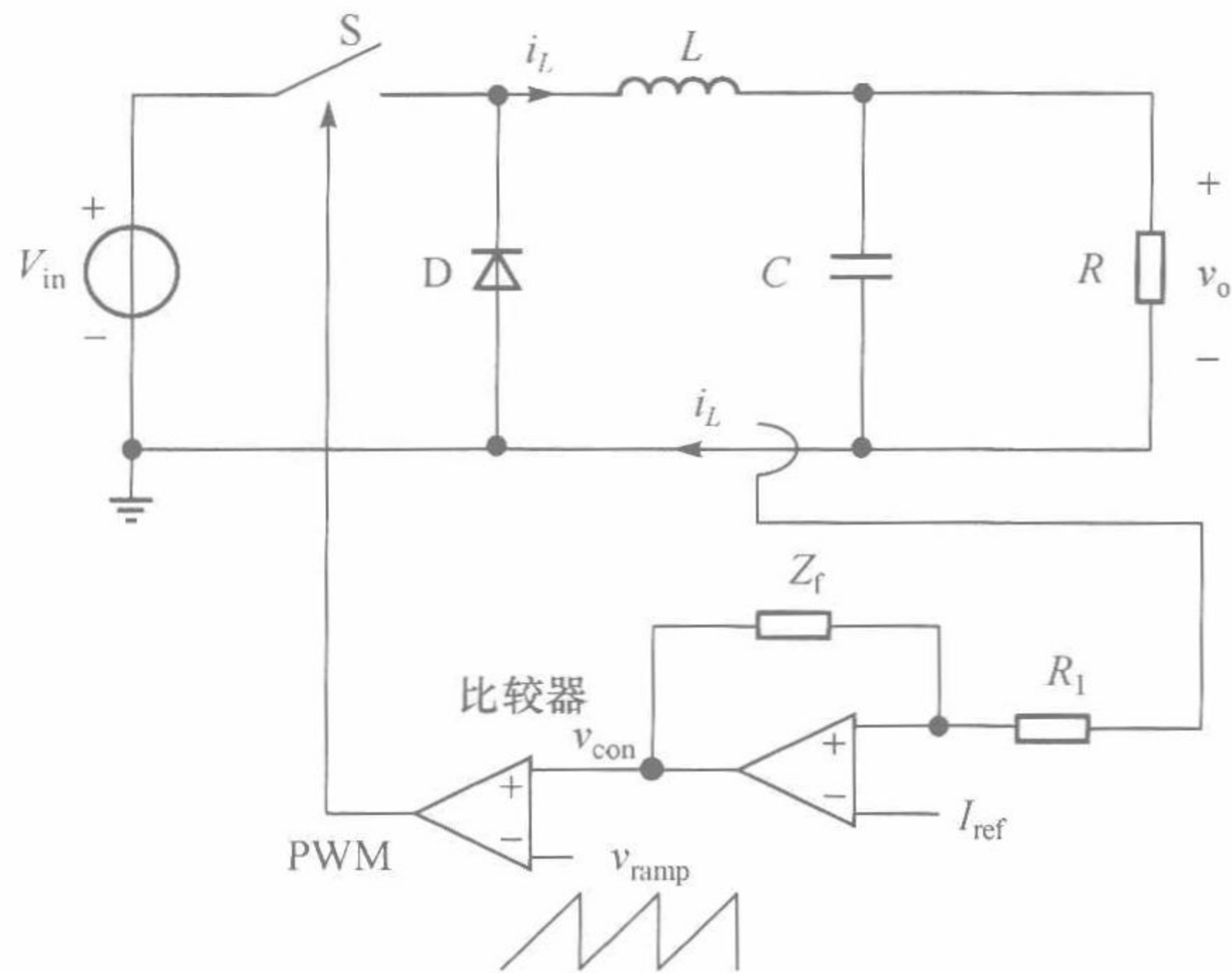


图 1-4 平均电流型控制原理

位,即开关 S 关断,积分开关 S_{int} 导通,积分器复位,如图 1-5 所示。

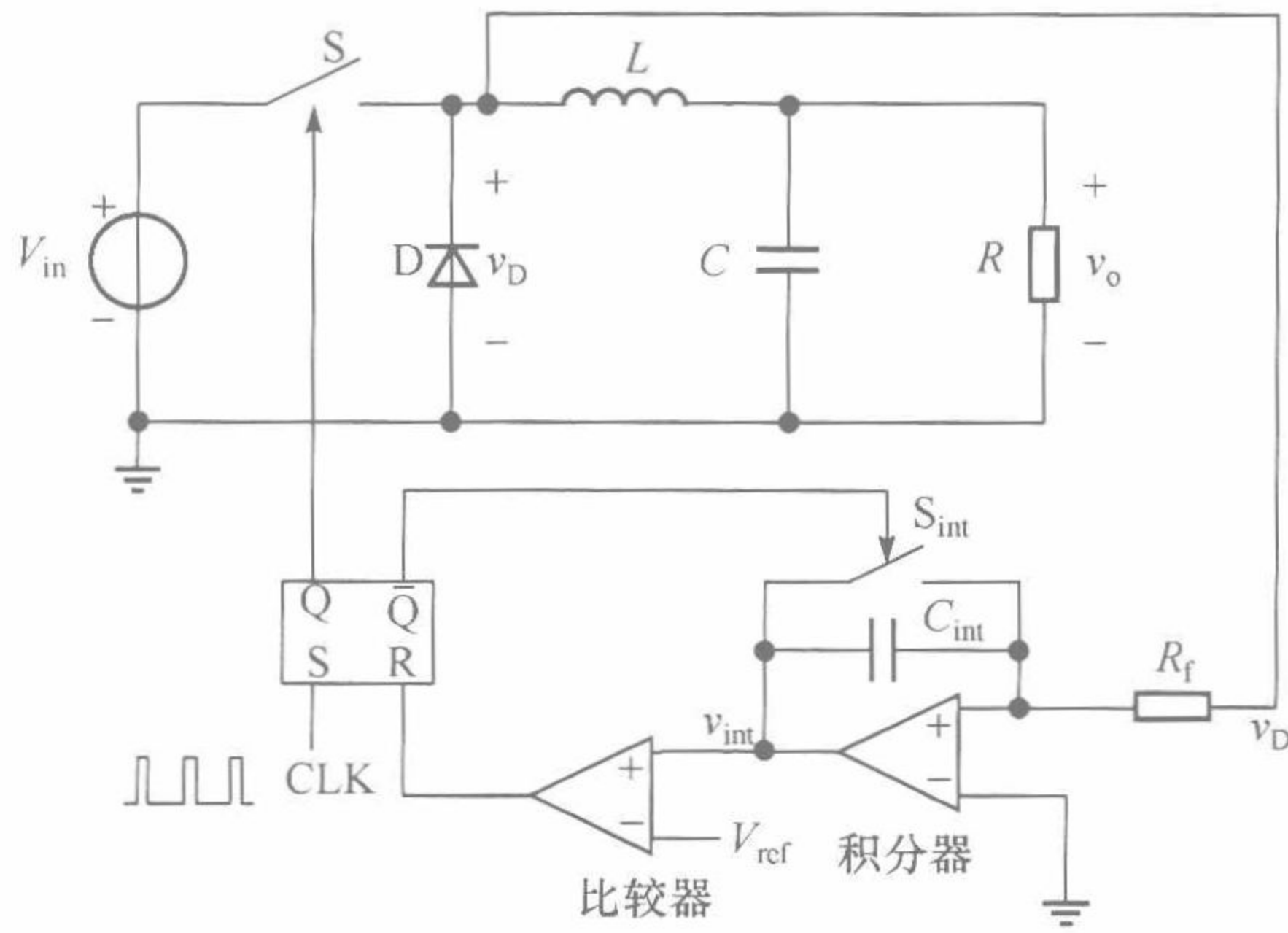


图 1-5 单周控制原理图

1.3 建模方法

模型的建立至关重要,其原因在于分析方法的简易性和结果的有效性都与之有着密切的关系。目前,常用的电力电子变换器建模方法主要有两种^[3,10]:状态空间平均建模和非线性离散建模。

1.3.1 状态空间平均建模^[3]

状态空间平均建模的主要思想是通过忽略具体的开关动作细节,获取平均意

义下的系统状态空间模型,将原有的分段光滑系统简化为连续光滑非线性系统。但由于平均作用,它丢失了系统的高频域动力学特征,通常用于分析变换器系统的低频域动力学行为。

假设电力电子变换器运行于稳定状态,即在一个开关周期 T_s 内, N 个电路拓扑依次切换,第 j 个电路拓扑的占空比为 d_j 。显然, $d_1 + d_2 + \dots + d_N = 1$ 。那么对于第 k 个开关周期而言,电力电子变换器的理想开关模型可用具有如下形式的状态空间方程组来表示:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{cases} \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 u, & kT_s \leq t < (k+d_1)T_s \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{x} + \mathbf{B}_2 u, & (k+d_1)T_s \leq t < (k+d_1+d_2)T_s \\ \vdots \\ \mathbf{A}_N \mathbf{x} + \mathbf{B}_N u, & (k+1-d_N)T_s \leq t < (k+1)T_s \end{cases} \quad (1-2)$$

式中, \mathbf{x} 为系统状态向量; \mathbf{A}_j 和 \mathbf{B}_j 分别为第 j 个电路拓扑的系统矩阵和输入矩阵; u 为输入电压。

根据各个电路拓扑的占空比 d_j ,对式(1-2)在一个开关周期 T_s 内进行加权平均,可得变换器主电路的状态空间平均模型:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{B}_m u \quad (1-3)$$

式中, $\mathbf{A}_m = \sum_{j=1}^N d_j \mathbf{A}_j$; $\mathbf{B}_m = \sum_{j=1}^N d_j \mathbf{B}_j$ 。

通常,控制器可用一系列与占空比 d_j 有关的显式或隐式方程来描述,其一般形式为

$$\begin{cases} G_1(d_1, d_2, \dots, u, \mathbf{x}) = 0 \\ G_2(d_1, d_2, \dots, u, \mathbf{x}) = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (1-4)$$

最后,将式(1-3)和式(1-4)联立,可得整个系统的状态空间平均模型。注意,由于占空比 d_j 是与状态向量 \mathbf{x} 有关的中间变量,因此该状态空间平均模型为非线性模型,也称为大信号平均模型。

进一步,倘若对大信号平均模型在平衡点附近线性化,即可得到小信号平均模型。实际工程中,可直接采用线性理论来分析系统的局部动力学行为和稳定性。

1.3.2 非线性离散建模

非线性离散建模^[10,11]是通过离散采样方法,获得系统状态量的离散迭代方程。由于非线性离散模型中包含了开关的动作信息,故可用于分析电力电子变换器的高频域动力学行为。根据采样方式不同,非线性离散模型通常可分为以下三种:频闪映射、同步切换映射和异步切换映射,如图 1-6 所示。

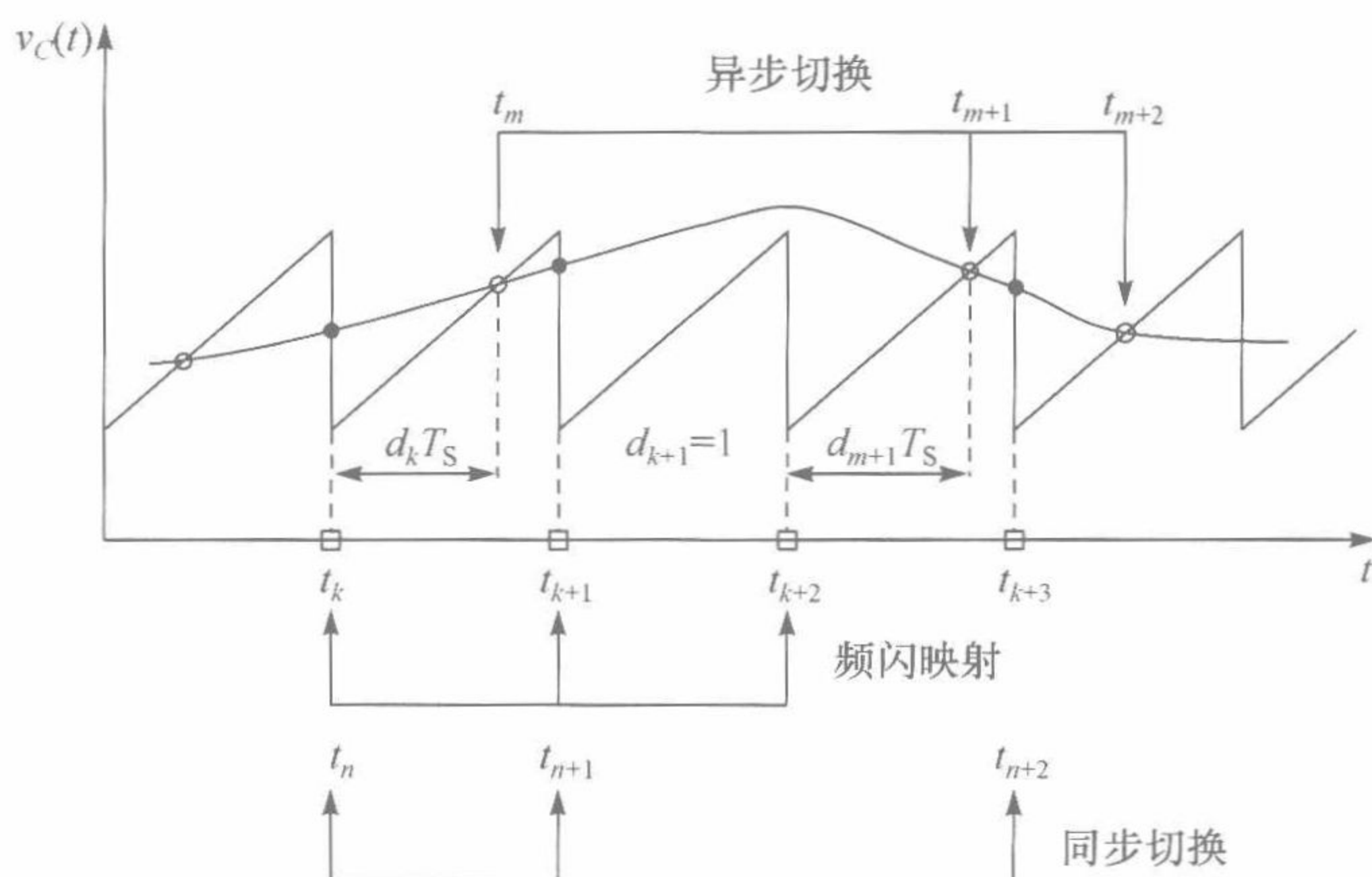


图 1-6 电压型控制策略下的频闪、同步和异步映射

- (1) 频闪映射: 在每个时钟周期起始时刻, 对状态量进行周期性采样, 与开关状态无关。
- (2) 同步切换映射: 仅当开关状态发生切换时, 才采样下一时钟周期起始时刻的状态量。
- (3) 异步切换映射: 仅采样开关状态发生切换时刻的状态量。

1.4 非线性动力学基础知识

几乎所有的实际工程系统都是非线性的。这些非线性因素源于工程系统内部各组成部分的一些固有特性或者子系统之间的相互耦合作用。对于非线性系统的探索, 有助于人们更好地理解现实世界中的奇异现象, 提高并优化非线性系统的工作性能。不同于线性系统, 大部分非线性系统难以求出其解析解。究其原因在于线性系统通常可被分解成若干子模块, 每个子模块满足叠加原理, 因而可通过先独立求解单个子模块, 再重组后得到整个系统的解。这种特性使得一个复杂的问题得以大大简化。然而, 几乎所有的非线性系统都是独一无二的, 常需要分类处理, 难以给出统一规律。因此, 有关非线性系统的研究不仅充满挑战, 而且十分有趣^[7]。

1.4.1 非线性动力学基本概念^[12,13]

1. 动力系统基本概念及分类

状态量随时间不断演化的系统称为动力系统, 常用非线性微分(或差分)方程来描述。根据时间变量是否连续, 动力系统可分为连续系统和离散系统两类。

1) 连续系统

根据微分方程是否显含时间变量 t , 可分为自治系统和非自治系统。

(1) 自治系统。设 U 为 n 维欧氏空间 \mathbf{R}^n 中的子空间, 状态向量 $\mathbf{x} \in U$, 则连续系统可用如下形式的微分方程来描述:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (1-5)$$

由于方程(1-5)右端不显含时间 t , 故该系统称为自治系统。

对任意 $\mathbf{x} \in U$, 总存在一个映射 $\phi(\mathbf{x}, t): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 满足方程(1-5), 即

$$\frac{d[\phi(\mathbf{x}, t)]}{dt} = \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t)) \quad (1-6)$$

且有

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x} \quad (1-7)$$

则称向量场 \mathbf{F} 定义了流 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 。

设 $t=0$ 时系统的状态为 \mathbf{x}_0 , 则流 $\phi(\mathbf{x}_0, t)$ 是初值为 \mathbf{x}_0 时方程(1-5)的解, 因而刻画了系统状态随时间的演化过程。任一时刻的解对应于相空间中的一点, 该点称为相点, 所有相点的集合称为相轨迹(或相轨道)。

对于自治系统, 其相轨迹由初始值 \mathbf{x}_0 唯一确定, 而与起始时刻 t_0 无关, 因而相轨迹上任一相点处的斜率是唯一的, 即相轨迹永不相交。另外, 由于经过平衡点的相轨迹的斜率不确定, 即 $\frac{dx}{dx_i} = \frac{dx}{dt} / \frac{dx_i}{dt} = \frac{0}{0}$, 所以要么没有一条相轨迹经过该平衡点, 要么不止一条。

(2) 非自治系统。设 $\mathbf{x} \in U \subset \mathbf{R}^n$, 映射 $\mathbf{F}: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, 则连续系统可表示成如下形式的微分方程:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (1-8)$$

由于方程(1-8)右端显含时间 t , 故该系统称为非自治系统。

对于非自治系统, 其向量场 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ 是关于时间 t 的函数, 因此相轨迹的任一点可能有不同的斜率, 即相轨迹可以相交。

为了简化分析, 实际分析中常常采用状态空间维数变换或引入 Poincare 截面的方法, 将非自治系统转化成自治系统进行研究^[14]。

2) 离散系统

设 $U \subset \mathbf{R}^n$, 映射 $\mathbf{F}: U \rightarrow U$ 是可逆的, 则

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_k), \mathbf{x}_k \in U \quad (1-9)$$

称为状态空间 U 下的离散系统。

3) 吸引子

动力系统的相空间 U 中, 设集合 A 为流 $\phi(\mathbf{x}_0, t)$ 对应的闭不变集, 若 A 的某个邻域 B 中的任一点 \mathbf{x} 满足当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow A$, 则称集合 A 为吸引集。无法