高职高专高等数学系列教材（少学时）

gaozhi jiaoyu

新编经济数学基础

第二版

主编　冯翠莲

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

高职高专高等数学系列教材(少学时)

新编经济数学基础

(第二版)

冯翠莲 主编

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

新编经济数学基础 / 冯翠莲主编. —2 版. —北京：北京大学出版社，2015.8
（高职高专高等数学系列教材 · 少学时）
ISBN 978-7-301-26106-4

Ⅰ. ①新… Ⅱ. ①冯… Ⅲ. ①经济数学 – 高等职业教育 – 教材 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 157354 号

书 名	新编经济数学基础（第二版）
著作责任者	冯翠莲 主编
责任编辑	曾琬婷
标准书号	ISBN 978-7-301-26106-4
出版发行	北京大学出版社
地 址	北京市海淀区成府路 205 号 100871
网 址	http://www.pup.cn 新浪微博：@北京大学出版社
电子信箱	zpup@pup.cn
电 话	邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62767347
印 刷 者	北京大学印刷厂
经 销 者	新华书店
	787mm × 960mm 16 开本 14.5 印张 318 千字
	2005 年 8 月第 1 版
	2015 年 8 月第 2 版 2015 年 8 月第 1 次印刷（总第 10 次印刷）
印 数	41401—44401 册
定 价	34.00 元

内 容 简 介

本书是高职高专院校经济类各专业少学时的大学数学基础课教材，内容包括：导数、导数的应用、积分及其应用、偏导数及其应用、矩阵与线性方程组、概率初步和统计学初步. 本书本着重基本知识、重素质、重能力、重应用和求创新的总体思路，根据高职高专教育数学教学的特点而编写. 本书每节有“本节学习目标”，每节配有与教材内容密切相关的 A 组习题和 B 组习题，每章配有总习题，书末附有全书习题的答案与解法提示.

本次修订在保持第一版教材特色的基础上广泛汲取了同行的意见，吸收了国内外相关教材的优点，更加切合高职高专教育经济类各专业数学教学需求以及生源变化的实际. 在修订教材内容时，降低起点，注意中高职数学知识的衔接，弱化计算难度，更加注重数学的基本概念、基本理论、思维方法的引导和基本运算的训练，突出问题的实际背景.

本书也可作为参加经济类专升本考试学生的教材或教学参考用书.

第二版前言

为了使本教材内容更加适合高职高专教育经济类各专业对数学的要求，更加切合高职高专教育的实际以及生源变化的实际，我们对全国部分高职高专院校进行了调研，本着打好基础、培养能力、兼顾后续课程需要，以培养学生的创新精神和实践能力为重点，以促进学生转变学习方式——变被动接受式学习为主动研究式学习，为高职高专学生的终身学习、生活和发展奠定良好的科学基础为落脚点，吸收国内外相关教材的优点，根据第一版教材的使用情况，对第一版教材做了如下修改：

1. 为了适应、促进中高职衔接，在教材内容的选取和修订过程中，降低起点，对基本概念、基本理论、基本方法的论述更加深入浅出，直观通俗；对内容的编排进行了调整，更加体现由易到难、由浅入深、循序渐进；更加注重教材的连贯性、衔接性，根据数学的认知规律和教学规律，把数学的思想和方法，融会到教材中去.

2. 认真分析每一章节所应达到的目标，在每节伊始，提出本节应达到的学习目标，使教师和学生做到目标明确.

3. 为了培养学生的发散思维能力和创新能力，设计了部分可以一题多解的例题和习题.

4. 删减不必要内容. 如删掉了对数求导法、反三角函数及三角换元等相关内容，尽力做到够用为度.

5. 弱化计算难度，更加注重数学思维方法的引导和基本运算的训练.

参加本教材修订工作的还有赵连盛、魏鹏、杨丽丽、乔兵兵、李建军.

非常感谢读者对第一版教材的厚爱，希望第二版教材能继续得到广大读者的帮助和支持.

为便于教师进行多媒体教学，作者为采用本书作为教材的任课教师提供精心设计、讲练结合的配套电子教案，具体事宜可通过电子邮件与作者联系，邮箱：fengcuilian@sina.com.

编　者

2015 年 5 月

第一版前言

高职高专教育是我国高等教育体系的重要组成部分，近几年呈现出前所未有的发展势头．为适应高职高专教育改革的要求，坚持以就业为导向，以能力为本位，面向市场、面向社会，为经济结构调整和科技进步服务的办学宗旨，我们本着重基本知识、重素质、重能力、重应用、开拓思维求创新的总体思路，根据高职高专教育数学教学的特点，编写了高职高专高等数学系列教材（少学时）——《新编经济数学基础》和《新编工科数学基础》．前者供高职高专院校经济类、管理类、文科类各专业学生使用，后者供工科类各专业学生使用．

本教材优化整合了经济数学基础课程的基本内容，注意与后续课程相衔接，与生产、服务、管理第一线的实际需求相适应；力求实现基础性、实用性和发展性三方面的和谐与统一．

本教材的主要特点：

1．突出高职高专少学时的特色．根据高职高专经济类、管理类各专业对数学的基本要求，根据数学的认知规律，将微积分、线性代数及概率统计的基本内容有机地结合在一起，组织和编排全书内容．在不失数学内容学科特点的情况下，采取模块化的思路，便于教师根据教学时数和专业需求选择教学内容．

2．贯彻“理解概念、强化应用”的教学原则．以现实、生动的例题引入基本概念，以简明的语言、并尽量配合几何图形、数表阐述基本知识、基本理论，注重基本方法和基本技能的训练，并给出求解问题的解题程序．同时注重数学概念、数学方法的实用价值，注意培养学生用定量与定性相结合的方法，综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力和创新能力．

3．内容精简实用，条理清楚，叙述通俗易懂，深入浅出，便于自学．

4．每节有“本节学习目标”，每节配有 A 组和 B 组习题，每章配有总习题．书后附有全书习题答案与解法提示．

参加本书编写的有北京经济管理职业学院冯翠莲、北京工业大学李文辉和北京农业职业学院陆小华，最后由冯翠莲统一修改定稿．参加本书编写工作的还有唐声安．

本系列教材的编写和出版，得到了北京大学出版社相关领导的大力支持和帮助．在本书的编写过程中，同行专家参加了讨论并提出宝贵意见，在此一并表示感谢．

为便于教师进行多媒体教学，作者为采用本书作为教材的任课教师提供配套的电子教案，具体事宜可通过电子邮件与作者联系，邮箱：fengcuilian@sina.com.

限于编者水平，不足之处恳请读者批评指正．

编　者

2005 年 6 月

目　录

第一章 导数

本章先介绍极限和连续的概念，然后讲述导数和微分的概念以及求导数的方法.

§1.1 数列的极限

【本节学习目标】 知道数列极限的概念，会用连续复利与贴现公式.

一、数列极限的概念

先看一个有关数列极限的实际例子.

我国战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话："一尺之棰，日取其半，万世不竭."这就是说，一根长为一尺的棒头，每天截去一半，这样的过程可以无限地进行下去.

把每天截后剩下的棒的长度写出来(单位：尺)：

第 1 天剩下 $\frac{1}{2}$，第 2 天剩下 $\frac{1}{2^2}$，第 3 天剩下 $\frac{1}{2^3}$，……，第 n 天剩下 $\frac{1}{2^n}$，…….这样就得到一列数

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots.$$

这一列数就称为数列.

随着天数的推移，剩下的棒的长度越来越短，显然，当天数 n 无限增大时，剩下的棒的长度将无限缩短，即剩下的棒的长度 $\frac{1}{2^n}$ 将无限接近于数 0. 这时我们就称由剩下的棒的长度构成的上述数列以常数 0 为极限，并记做

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

一般地，按一定顺序排列的无穷多个数，称为**数列**. 数列通常记做

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots,$$

或简记做$\{y_n\}$.数列的每个数,称为数列的**项**,依次称为第1项,第2项,…….第n项y_n称为数列的**通项**或**一般项**.

例如,我们已经知道的等差数列是

$$a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \cdots,\ a_1+(n-1)d,\ \cdots,$$

其首项(第1项)是a_1,公差是d,通项$a_n=a_1+(n-1)d$.

等比数列是

$$a_1,\ a_1q,\ a_1q^2,\ \cdots,\ a_1q^{n-1},\ \cdots,$$

其首项是a_1,公比是q,通项$a_n=a_1q^{n-1}$.

数列$\{y_n\}$的极限,就是讨论当n无限增大时,数列的通项y_n的变化趋势,特别是,是否有趋向于某个常数的变化趋势.为此,我们有如下数列极限的概念:

设数列$\{y_n\}$:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots.$$

若当n无限增大时,y_n趋向于常数A,则称**数列$\{y_n\}$以A为极限**,记做

$$\lim_{n\to\infty}y_n=A \quad 或 \quad y_n\to A \quad (n\to\infty),$$

其中前一式子读做"当n趋于无穷大时,y_n的极限等于A",后一式子读做"当n趋于无穷大时,y_n趋于A".

有极限的数列称为**收敛数列**;没有极限的数列称为**发散数列**.

例1 考虑数列$\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$:

$$0,\ 1+\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1+\frac{1}{4},\ 1-\frac{1}{5},\ \cdots,\ 1+\frac{(-1)^n}{n},\ \cdots.$$

当n无限增大时,由于$\frac{(-1)^n}{n}$无限接近常数0,所以其通项$y_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$就无限接近常数1,即该数列以1为极限,可记做

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]=1.$$

例2 考虑数列$\{(-1)^{n+1}\}$:

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots.$$

当n无限增大时,数列在数值1和-1上跳来跳去,不趋于一个常数,故该数列没有极限.

例3 考虑数列$\{n^2\}$:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots,\ n^2,\ \cdots.$$

当n无限增大时,其通项$y_n=n^2$也无限增大,它不趋于任何常数,故该数列没有极限.

注意到$y_n=n^2$随着n无限增大时,它有确定的变化趋势,即取正值且无限增大.对这种情况,我们借用极限的记法表示它的变化趋势,记做

$$\lim_{n\to\infty}n^2=+\infty \quad 或 \quad n^2\to+\infty\ (n\to\infty),$$

并称该数列的极限是**正无穷大**.

同样,对数列$\{-\sqrt{n}\}$, $\{(-1)^n n\}$,则可分别记做

$$\lim_{n\to\infty}(-\sqrt{n})=-\infty,\quad \lim_{n\to\infty}(-1)^n n=\infty,$$

其中前者称数列的极限是**负无穷大**,后者称数列的极限是**无穷大**.

若数列$\{x_n\}$收敛于A,数列$\{y_n\}$收敛于B,则分别由这两个数列的和、差、积、商(对作为分母的数列$\{y_n\}$,$y_n\neq0$,$B\neq0$)所构成的数列也收敛,且分别收敛于$A+B$,$A-B$,$A\cdot B$,$\frac{A}{B}$.

以上是数列极限的四则运算法则.对于函数的极限,有类似的四则运算法则,不再详述.

二、数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$的极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$

将数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$取值计算,取小数点后的有效位数为5位,考查数列取值的趋势,见表1-1.

表 1-1

n	1	1000	5000	10000	100000	1000000	2000000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2.71692	2.71801	2.71815	2.71827	2.71828	2.71828

由表1-1看出,该数列是单调增加的;若再仔细分析表中的数值会发现,随着n增大,数列后项与前项的差值在减少,而且减少得相当快;最后两项,项数相隔100万项,而数列的5位有效数字相同.这表明,数列的通项$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$当$n$无限增大时,它将趋于一个常数.可以证明数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$有极限,且其极限为e,即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e},$$

其中$\mathrm{e}=2.718281828459\cdots$,是一个无理数.

由上述极限还可推出如下极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}=\mathrm{e}.$$

例4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n}$.

解 由幂的运算性质有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n}=\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^4,$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{4n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{4}=\mathrm{e}^{4}.$$

2. 复利与贴现

作为公式 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$ 在经济方面的应用,在此介绍复利与贴现问题.

从经济学角度看,货币有时间价值. 比如,现在的 1 万元比若干年后的 1 万元要值钱,或者说若干年后 1 万元的现在价值没有现在 1 万元的价值高. 前后两个时间点货币价值之所以不同,就是因为其中有一个利息问题. 利息就是在一个时间间隔内因使用货币而付出的钱的代价.

设 A_0 是本金,又称**现在值**,r 是年利率,t 是时间(单位:年),A_t 是 t 年末的本利和,又称**未来值**.

复利就是利息加入本金再获取利息,即将投资于每期末所得利息加入该期的本金,并以此作为下一期的本金,继续投资.

若以一年为 1 期计算利息,则按复利计算 t 年末本利和的公式是

$$A_t=A_0(1+r)^t.$$

若一年计息 n 期,并以 $\dfrac{r}{n}$ 为每期的利率,按复利计算,则 t 年末的本利和是

$$A_t=A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{1.1}$$

上述计息的"期"是确定的时间间隔,因而一年计息次数有限.

若计息的"期"的时间间隔无限缩短,从而计息次数 $n\to\infty$,这种情况称为**连续复利**. 这时,由于

$$\lim_{n\to\infty}A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=A_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right]^{rt}=A_0\mathrm{e}^{rt},$$

故若以连续复利计算,t **年末本利和的公式**是

$$A_t=A_0\mathrm{e}^{rt}. \tag{1.2}$$

例 5 设贷款 100 万元买房,贷款期限为 10 年,年利率为 5%,请按下述两种情况计算 10 年末的还款额:

(1) 按复利计算,每年计息 2 期;

(2) 按连续复利计算.

解 依题设 $A_0=100$ 万元,$r=5\%$,$t=10$ 年,求未来值 A_{10}.

(1) 由于每年计息 2 期,即 $n=2$,所以由公式(1.1)知,10 年末的本利和为

$$A_{10}=100\times\left(1+\frac{0.05}{2}\right)^{2\times10}\text{ 万元}\approx100\times1.6386\text{ 万元}=163.86\text{ 万元}.$$

(2) 按连续复利计算,由公式(1.2)知,10 年末的本利和为

$$A_{10}=100\mathrm{e}^{0.05\times10}\text{ 万元}\approx100\times1.6487\text{ 万元}=164.87\text{ 万元}.$$

已知现在值 A_0 按公式(1.1),(1.2)确定未来值 A_t,这是复利问题.若已知未来值 A_t,求现在值 A_0,则是贴现问题. 这时,年利率 r 称为年贴现率.

由公式(1.1)得一年计息 n 期的贴现公式

$$A_0 = A_t\left(1+\frac{r}{n}\right)^{-nt}. \tag{1.3}$$

由连续复利公式(1.2)得连续贴现公式

$$A_0 = A_t e^{-rt}. \tag{1.4}$$

例 6 设年贴现率为 6%,现投资多少万元,20 年末可得 1000 万元?

(1) 按一年计息 12 期贴现;

(2) 按连续贴现.

解 依题设,$A_{20}=1000$ 万元,$r=6\%$,$t=20$,求现在值 A_0.

(1) 按一年计息 12 期贴现,即 $n=12$,由公式(1.3)得

$$A_0 = 1000\times\left(1+\frac{0.06}{12}\right)^{-12\times 20}\text{万元} \approx 1000\times 0.3021\text{万元} = 302.1\text{万元}.$$

(2) 按连续贴现,由公式(1.4)得

$$A_0 = A_{20}e^{-0.06\times 20}\text{万元} \approx 1000\times 0.3012\text{万元} = 301.2\text{万元}.$$

习 题 1.1

A 组

1. 已知数列的通项,试写出数列,并观察判定数列是否有极限. 若有极限,请写出其极限.

(1) $y_n=\dfrac{n}{3n+1}$; (2) $y_n=(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n+1}$.

2. 某公司发行股票,年利率为 5%,每股 10 元,12 年后每股价值多少元?按下面两种情况计算:

(1) 按复利计算,每年计息 4 期; (2) 按连续复利计算.

3. 某保险公司发行养老保险基金,年利率为 3%,按连续复利计算,20 年后可得 50 万元,问:现在应存入多少万元?

B 组

1. 试写出下列数列的通项,并观察判定数列是否有极限. 若有极限,试写出其极限.

(1) $\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27},\dfrac{1}{81},\cdots$; (2) $0,1,0,\dfrac{1}{2},0,\dfrac{1}{3},\cdots$.

2. 某机械设备折旧率为每年 5%,问:连续折旧多少年,其价值是原价值的一半?

§1.2 函数的极限与连续

【本节学习目标】 知道当 $x\to\infty$ 时及当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 极限的概念;知道函数 $f(x)$ 连续的概念.