兰 州 一 中
西北师大附中
编写组

高中代数

课课练与单元测试

（高二年级第二学期）

兰州大学出版社

高中代数课课练与单元测试

（高二年级第二学期）

曾秋玲　贺晓军

兰 州 大学 出 版 社

高中代数课课练与单元测试
（高二年级第二学期）
曾秋玲　贺晓军
兰州大学出版社出版发行
兰州市天水路 216 号　电话:8617156　邮编:730000

兰州大学出版社激光照排中心排版
甘肃省委党校印刷厂印刷
开本：787×1092 毫米 1/16　印张:4.75

1998 年 1 月第 1 版　1998 年 1 月第 1 次印刷
字数:103 千字　印数:1—8000 册

ISBN7－311－01156-6/G・396　定价:4.80 元

目　录

第八章　复数

一、复数的概念

8.1　数的概念的发展、8.2　复数的有关概念

［基础训练 1］

1. 填空题

(1) 复数$\sqrt{3}-i$的实部为__________，虚部为__________，它的共轭复数为__________；

(2) 复数$-4+\sqrt{2}$的实部为__________，虚部为__________，它的共轭复数为__________；

(3) 复数$216i$的实部为__________，虚部为__________，它的共轭复数为__________.

2. 试求出满足下列等式的实数x,y.

(1) $(3x-y)+(2x+3y)i=2-\frac{1}{2}i$

(2) $(4x+3y+6)i=(x-3y-1)$

(3) $(x-y+6)+(2x+y-1)i=-1$

3. 已知$z=a^2+a-2+(a^2+7a+10)i$为纯虚数，求实数a.

[综合训练 1]

1. 复数 $z_1 = y(2x+i)$，$z_2 = y+\sqrt{3}xi$ $(x,y\in R)$，当 x、y 为何值时，(1) $z_1 = z_2$；(2) z_1、z_2 是共轭复数.

2. 实数 m 为何值时，复数 $(1+i)m^2-(3+5i)m-2(2+3i)$ 是(1) 实数；(2) 虚数；(3) 纯虚数.

[基础训练 2]

1. 判断下列命题的正误：

(1) 如果复数集 C 是全集，则实数集 R 的补集是纯虚数集. (　　)

(2) 两个复数互为共轭虚数，它们的差一定是纯虚数. (　　)

(3) 任意两个确定的复数都不能比较大小. (　　)

(4) 原点是复平面内直角坐标系的实轴与虚轴的公共点. (　　)

2. 在复平面内描出表示下列复数的点.

(1) $1+2i$；(2) $-3-i$；(3) -2；(4) $5i$；(5) $\frac{1}{2}-\sqrt{2}i$.

3. 复平面内，若复数 $(m^2-8m+15)+(m^2-5m-14)i$ 所对应的点位于第四象限，求实数 m 的取值范围.

4. 若$z=k^2-4+(k^2-5k-6)i$对应的点(1)位于y轴正半轴上;(2)位于x轴负半轴上.试分别求出k值及相应的z.

5. 证明:(1)$z=\overline{z}\Leftrightarrow z$是实数.

(2)非零复数z满足$z=-\overline{z}$,则z是纯虚数.

[综合训练2]

1. 选择题

(1)非纯虚数$z_A=z$,点A(对应复数z)关于x轴的对称点是B,关于y轴的对称点是C,关于原点的对称点是D,则 ( )

(A)$z_B=\overline{z},\overline{z}_C=-z,z_D=-\overline{z}$ (B)$z_B=-z,z_C=\overline{z},z_D=-\overline{z}$

(C)$z_B=-\overline{z},z_C=-z,z_D=\overline{z}$ (D)$z_B=\overline{z},z_C=-\overline{z},z_D=-z$

(2)已知α,β是锐角三角形的两个内角,则复数$z=(\cos\beta-\sin\alpha)+i(\sin\beta-\cos\alpha)$在复平面内所对应的点位于 ( )

(A)第一象限 (B)第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限

2. 设复数$z=(\cos x+\frac{1}{2})+i(\sin x+\frac{1}{2})$,求$x$取何值时,(1)$z$的对应点$Z$在第三象限;(2)$z$的对应点$Z$在第一、第三象限角平分线上.

3. 复数 $z_1=\cos\theta+i\sqrt{3}\sin\theta, z_2=\sin2\theta+i\cos2\theta, (0\leqslant\theta<\pi)$ 当 θ 取何值时，(1) z_1 与 z_2 都是纯虚数？(2) z_1 是虚数，z_2 是实数？(3) $\overline{z_2}$ 对应的点位于复平面上的第二象限？

8.3　复数的向量表示

［基础训练 1］

1. 已知复数 $\frac{1}{2}-3i, -\sqrt{3}+2i, -i, 3, (1+\sqrt{2})i$.

(1) 在复平面内描出表示这些复数的点；

(2) 在复平面内画出表示这些复数的向量；

(3) 求各复数的模．

2. 比较复数 $z_1=\sqrt{5}+2i$ 和 $z_2=1-2\sqrt{2}i$ 的模的大小．

3. 复数 $z_1=a+2i, z_2=-2+i, |z_1|<|z_2|$，求 a 的取值范围．

4. 求证在复平面内分别和 $z_1=-3+i, z_2=2+\sqrt{6}i, z_3=-\sqrt{5}+\sqrt{5}i$,

$z_4 = -2\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ 对应的四点 Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 共圆.

5. 设 $z \in C$ 且分别满足条件(1) $|z| = 2$;(2) $|z| < 3$;(3) $|i| \leqslant |z| \leqslant |2+i|$;在复平面内画出对应复数 z 的集合.

6. 已知 $|(x+1)+(y-3)i| = 5$,求表示复数 $x+yi$ 的点的轨迹.

7. 设 $z = m + ni$,满足下列条件的点 z 的集合是什么图形?
(1) $0 < |m| < 1$　　(2) $m < 0, n > 0, m^2 + n^2 \leqslant 4$

[综合训练 1]
1. 在复平面内,求方程 $|z^2| + 7|z| - 18 = 0$ 所表示的轨迹.

2. 求满足 $|\log_3 x - 4i| = 5$ 的实数 x 的值.

3. 若复数 $z = (x+1) + (1 - \frac{1}{2}x)i$ 的模不大于 $\frac{\sqrt{17}}{2}$,求实数 x 的取值范围.

［基础训练 2］

1. 当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，求复数 $z_1=1+\cos2(1+x)+i\sin2(1+x)$ 与 $z_2=1-\cos2(1-x)+i\sin2(1-x)$ 的模 $|z_1|$ 及 $|z_2|$，并比较 $|z_1|$ 与 $|z_2|$ 的大小.

2. 已知复数 $(x-2)+yi(x,y\in R)$ 的模为 1，求 $\frac{y}{x}$ 的最大值.

3. 复平面内，已知复数 $z=(x+1)-\frac{3}{4}i$ 所对应的点都在单位圆外，求实数 x 的取值范围.

4. 证明：对于任何实数 t，复数 $z=\sqrt{|\cos t|}+i\sqrt{|\sin t|}$ 的模 $r=|z|$ 满足 $r\leqslant\sqrt[4]{2}$.

［综合训练 2］

1. 复数 $z=\sqrt{a^2+5a-25}+(|a|+a)i$，如果 $|z|=15$，求实数 a 的值.

2. 当θ为何值时，复数$2\sin\theta+(\cos\theta-3)i$的模最小？最小值是多少？

二、复数的运算

8.4　复数的加法与减法

[基础训练 1]

1. 已知复数$z_1=6-5i, z_2=-2+i$，计算

(1)z_1+2z_2；　(2)$\overline{z_1}+z_2$；　(3)$\overline{z_1+z_2}$；

(4)z_1-z_2；　(5)$z_1-\overline{z_2}$；　(6)$\overline{\overline{z_1}-z_2}$.

2. 计算

(1)$\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}+i\right)+\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+2i\right)+\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+3i\right)+\left(\dfrac{2}{3+\sqrt{7}}+4i\right)$

(2)$[(2a-b)+(a+b)i]-[(a-b)-(a+2b)i]+[(-a+2b)+(2a-3b)i]$

3. 复数 $1-2i$ 与 $3+i$ 分别表示向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$，求向量 $\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}$、$\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 及 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 所表示的复数．

4. 复数 $3+4i$、$4-3i$、$-3-4i$ 分别对应向量 $\overrightarrow{OZ_1}$、$\overrightarrow{OZ_2}$、$\overrightarrow{OZ_3}$，求

(1) $|\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_3}|$；(2) $|\overrightarrow{Z_1Z_3}|$；(3) $|\overrightarrow{Z_1Z_2}+\overrightarrow{OZ_3}|$；(4) $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的夹角．

[综合训练 1]

1. 求证：(1) $\overline{Z_1+Z_2}=\overline{Z_1}+\overline{Z_2}$；(2) $\overline{Z_1-Z_2}=\overline{Z_1}-\overline{Z_2}$．

2. 设 Z_1、Z_2 是复平面内的两点，对应的复数为 $\sqrt{2}-3i$ 和 $3-\sqrt{2}i$，求线段 Z_1Z_2 对应的垂直平分线的方程．

[基础训练 2]

1. 解方程：(1)$x-3+\sqrt{6}i=\frac{1}{2}\sqrt{2}+3\sqrt{6}i$

(2)$3x+2+i=5x-\frac{2}{3}-7i$

2. 求复平面内曲线方程所表示的曲线及直角坐标方程：

(1)$|z+1-i|=1$；　(2)$|3z-2i|=6$；

(3)$|z+1|=|z-1+3i|$；　(4)$|z-1-i|+|z+1-i|=6$；

(5)$|z+1|=2|z-i|$；　(6)$|z+5|+|z-5|=10$；

(7)$|z+5i|-|z-5i|=6$.

3. 已知 $|z+3i|=|z-3|$，且 $|z|=3\sqrt{2}$，求复数 z.

4. 若复数 z 满足 $|z-2+4i|=\sqrt{5}$，求 $|z|$ 的最小值和最大值.

5. 复平面内,正方形的三个顶点对应的复数分别为 $-5+2i, 0, -2-5i$,求它的第四个顶点所对应的复数.

[综合训练 2]

1. 设 $f(z)=1-\bar{z}, z_1=2+3i, z_2=5-i$,求 $f(\overline{z_1-z_2})$ 和 $f(\overline{z_1}+2z_2)$.

2. 已知 $|z_1|=5, |z_2|=7, |z_1+z_2|=11$,求 $|z_1-z_2|$.

3. 若 $|z|=1$,求 $|z-2i|+|z+5|$ 的最小值.

4. 若复数 z 满足 $|z-4|+|z+4|=4\sqrt{5}$ 和 $|z-3i|-|z+3i|=4$,求 z.

5. 利用复数知识求函数 $y=\sqrt{x^2+9}+\sqrt{(x-2)^2+1}$ 的最值.

8.5　复数的乘法和除法

[基础训练 1]

1. 计算

(1)$(3-4i)(5+i)$　　(2)$(6-i)(-2i)$

(3)$(3-2i)(3+2i)$　　(4)$\dfrac{1}{i^3}$

(5)$\dfrac{-1+i}{i^{202}}$　　(6)$\dfrac{4-3i}{5+i}$

2. 计算

(1)$i\cdot i^2\cdot i^3\cdots i^{25}$

(2)$(1+i)^{40}\div(1-i)^{20}$

(3)$i+i^2+i^3+\cdots+i^{100}$

(4)$(2-i)(1-i)^2+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}i\right)+\dfrac{i-3}{1+i}-\dfrac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{2}-i}$

3. 若复数 z 满足条件 $\frac{1}{z}=\frac{2}{3-i}+\frac{2}{1+3i}$，求复数 z.

4. 设 $f(z)=1-\bar{z}$，$z_1=2+3i$，$z_2=5-i$，求 $f\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)$.

[综合训练 1]

1. 选择题

(1) 设 z 为非零复数，则 $z+\frac{1}{z}$ 是实数的充要条件是 (　　)

(A) $|z|=1$　　(B) $I(z)=0$

(C) $|z|=1$ 或 $I(z)=0$　　(D) $|z|=1$ 且 $I(z)=0$

(2) 已知 $f(n)=i^n+i^{-n}(n\in N)$，则集合 $\{f(n)\}$ 中的元素个数是 (　　)

(A) 1 个　　(B) 2 个　　(C) 3 个　　(D) 4 个

(3) 已知复数 z 满足 $|z|^2=z^2$，则 z 一定是 (　　)

(A) 零　　(B) 任意实数　　(C) 任意复数　　(D) 不存在

2. 填空题

(1) 复数 $\frac{(1-i)^{10}(3-4i)^4}{(-\sqrt{3}+i)^5}$ 的模是__________.

(2) $-15+8i$ 的平方根为__________.

(3) 设 $z_1=\frac{(1+2i)^4}{(3-i)^3}$，$z_2=\frac{\overline{z_1}}{2-i}$，则 $|z_2|=$__________.

3. 已知 $\left|\frac{z+\frac{1}{2}}{z+i}\right|=\frac{2}{3}$，$\left|\frac{z-1}{z+2}\right|=1$，求复数 z.

4. 设 $f(z)=\frac{1+z^2}{1+z}+\frac{1-z^2}{1-z}$，求 $f(1-i)$ 的模.

[基础训练 2]

1. 填空题

(1) 计算$\frac{(1+i)^3-(1-i)^3}{(1+i)^2-(1-i)^2}=$__________.

(2) 满足条件$\frac{2}{z}=\frac{1}{2-i}-\frac{1}{1-2i}$的复数$z$等于__________.

(3) $\frac{z-1}{z+1}$为纯虚数的充要条件是__________.

2. 已知$z^2=5+12i$,求$z+\frac{1}{z}$的值.

3. 已知$|z_1|=5$,$z_2=3+4i$,且$z_1\cdot\overline{z_2}$是纯虚数,求复数z_1.

4. 已知复数z满足$|z-4i|=|z-4|$,$z+\frac{14-z}{z-1}$为实数,求z.

5. 已知复数z满足$|z|=4$,求复数$\omega=\frac{z+1}{z}$在复平面内的对应点轨迹.