



数学科学文化理念传播丛书·经典译丛

The Mathematical Experience

(Study Edition)

[美] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto 著

数学经验

(学习版)

王前◎译



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press



数学科学文化理念传播丛书·经典译丛

The Mathematical Experience (Study Edition)

[美] Philip J. Davis, Reuben Hersh, Elena Anne Marchisotto 著

数学经验 (学习版)

王前◎译



大连理工大学出版社
Dalian University of Technology Press

Translation from English language edition:
The Mathematical Experience, Study Edition
by Philip J. Davis, Reuben Hersh and Elena Anne Marchisotto
Copyright © 2012 Birkhäuser Boston
Birkhäuser Boston is a part of Springer Science + Business Media
All Rights Reserved

©大连理工大学出版社 2012
著作权合同登记 06-2012 年第 233 号

版权所有 · 侵权必究

图书在版编目(CIP)数据

数学经验：学习版 / (美) 戴维斯 (Davis, P. J.),
(美) 赫本 (Hersh, R.), (美) 马奇索托
(Marchisotto, E. A.) 著；王前译. — 大连：大连理工
大学出版社, 2013. 4

ISBN 978-7-5611-7773-0

I. ①数… II. ①戴… ②赫… ③马… ④王… III.
①数学—普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 070956 号

大连理工大学出版社出版

地址：大连市软件园路 80 号 邮政编码：116023

发行：0411-84708842 邮购：0411-84703636 传真：0411-84707345

E-mail: dutp@dutp.cn URL: <http://www.dutp.cn>

沈阳新华印刷厂印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸：147mm×210mm 印张：13.625 字数：392 千字
2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷

责任编辑：刘新彦 于建辉 王伟 责任校对：李 慧
封面设计：冀贵收

ISBN 978-7-5611-7773-0

定 价：48.00 元

前 言

我们现在所知道的最古老的数学书板^①早在公元前 2400 年就已存在,有充分理由说明创造和使用数学的愿望是与整个人类文明共存的。四五千年来,出现了许多数学的观念和实践活动,并通过种种途径与人们的日常生活相联系。数学的性质是什么?意义何在?它涉及什么?它的方法论是什么?如何被创造和使用的?如何同人们的各种经验相适应?它带来什么益处和害处?它的重要性何在?

要回答这些问题非常困难,绝非轻而易举。事实上,它涉及的材料如此广泛,其内部联系如此丰富,以致任何人都不可能完全把握,更不用说在一部中等篇幅的书中加以概括和总结了。为了避免被这些庞杂的材料吓倒,我们还是换一种方式来思考数学吧。数学千百年来一直是人类的一种活动。在某种意义上,每个人都是数学家,都在有意识地做数学工作。在市场上买东西,量一块壁纸,或用规则图案装饰一个瓷罐,都是在做数学工作。更进一步说,每个人在某种意义上都是数学哲学家。只要他有时候大喊:“数字不会撒谎!”他就已加入到柏拉图(Plato)和拉卡托斯(Imre Lakatos)的行列中了。

除了在有限程度上使用数学的大众之外,还有少量的专业数学家。他们以数学为业,培育它,传授它,创造它,并在多种情形下使用它。向非数学专业的人们解释数学家在干些什么,他们如何谈论自己

① 书板是古代用本、石制成的平板,供写文字用。——译者注

的工作,他们为什么该得到别人的支持,应当是可能的。简而言之,这就是我们本书的任务。本书并不想开展对近代或古典数学材料特定内容的系统而详尽的讨论。我们力图捕捉的倒是数学经验中无穷无尽的变化。我们阐述的主要内容将是数学的本质,它的历史,它的哲学,以及如何获得数学知识的方法。这部书不应是对数学的浓缩,而只是使人们获得对数学的印象。它不是一部数学著作,而是一部关于数学的著作,当然这里不可避免要包含一些数学知识。同样,这也不是一部历史著作或哲学著作,但是它要讨论数学的历史和哲学。因此,读者必须具备少许的预备知识和一定的兴趣作为阅读此书的基础。只要有此基础,普通读者就可基本没有困难地阅读本书大部分内容。也有少数地方我们提供了特殊材料,这是为那些使用和创造数学的专家们准备的。这里,或许读者们可以把自己当做应邀赴家宴的客人,在客气的一般性谈话之后,那些自家人会谈论他们的私事和忧乐,客人会感到摸不着头脑。对于此种情况,读者明智而轻松地越过去即可。

本书的大部分章节可以彼此独立地阅读。

在这部两人合写的书中,“我”这个词的使用需要说明一下。在有些地方,这个“我”指哪个著者是显然的。但不管怎样,即使有点误解也不要紧,因为一般说来每个著者是赞同合作者的意见的。

学习版前言

《数学经验》第一版于 1981 年出版。在那个时候,也就是十几年前,人们通常还以为富有理解力的非数学专业人士不可能理解当代数学的含义。然而,从那时起,几十种关于当代数学的普及读物出版了,格莱克(J. Gleick)的《混沌》(*Chaos*)成了经久不衰的畅销书。开斯蒂(J. Casti)正在创作这方面的系列著作。

在技术和发明领域,人们都知道,了解什么事情是可能的是成功地创新的最重要因素。或许正是《数学经验》第一版转变了人们的观念,知道在说明当代数学前沿方面什么事情是可能的。

敏感的读者们意识到这部著作是一部哲学著作——一部数学的人文主义哲学著作。这种哲学曾是一个“孤独者”[正如基恰(P. Kitcher)所说],实际上游离于数学哲学的正统学术研究之外。15 年过去了,数学的人文主义哲学已硕果累累,它有了自己的文集、专题会议和杂志,15 年前离群索居的孤独者或许正是近几年来的主流。

《数学经验》第一版是大众图书,而不是教科书,它摆在书店里而不是放在教授的办公室里。然而,我们一再听到大学教师在使用它,在美国,在欧洲,在澳大利亚,在中国的香港,在以色列,它以两种不同方式得到应用:一种是用于艺术和科学学院里大学文科学生的数学课程,另一种是用于师范院校里未来的教师,尤其是未来中学数学教师的课程。

在数学教学中,人们都知道“数学不是旁观者的运动”。你要通过

做来学,特别是做题。像所有老生常谈一样,这只说对了一半。数学教育就是做、做、做,没有思维,没有交谈,没有冥想,似乎很沉闷。一个艺术家并不排除偶尔的艺术欣赏——恰恰相反,作为旁观者,你不能学到实际技巧,但你能从中学到很不错的鉴赏能力。

本书第一版吸引读者去欣赏数学,深入思考数学,介入关于数学的讨论。但那里不包含问题。如果一位教师选用它,就需要补充书中缺少的东西。而学习版对教师和学生都更为方便。这里的目标是建立做题与思维之间的平衡。其中有丰富的问题,主要是由马奇绍特欧(E. A. Marchisotto)教授创设的,他还提供了大量的讨论指南、作文题目和参考文献。我们也介绍了“启发学生构思课程”,提出一系列由易到难相互联系的问题。它们提供了问题解决的额外乐趣,表明了数学的本质特征。我们用十几页的篇幅写了关于微积分运算的一节,还有一节涉及复数的有趣题目,它们无论从数学角度还是哲学角度看都是很吸引人的。

美国数学教师全国委员会的“标准”是在《数学经验》第一版之后颁布的。在很大程度上,这些标准使我们的事业变得合法化。我们在这些标准成文之前就已遵循了这些标准,学习版当然要比第一版做得更好。

“批判性思维”和“问题解决”已不再只是数学的特征了,它们已变成美国课堂上的流行语汇。《数学经验》学习版正是美国教育这一主流趋势的组成部分。

致 谢

本书有些材料选自著者已发表的文章。其中有几篇是与他人合作的。《非康托尔集合论》(*Non-Cantorian Set Theory*)由柯恩(P. Cohen)和 R. 赫什(R. Hersh)合著,《非标准分析》(*Non-Standard Analysis*)由 M. 戴维斯(M. Davis)和 R. 赫什合著,都发表在《科学美国人》(*Scientific American*)上。《数学的非解析方面》(*Nonanalytic Aspects of Mathematics*)由 P. J. 戴维斯(P. J. Davis)和安德森(J. A. Anderson)合著,发表在《工业应用数学学会评论》(*SIAM Review*)上。我们衷心感谢安德森教授、柯恩教授、M. 戴维斯教授和这些刊物允许将上述文章收入本书中。

著者个人的文章收入本书的有:P. J. 戴维斯的《数》(*Number*)、《数值分析》(*Numerical Analysis*)、《数学要认可吗?》(*Mathematics by Fiat*),分别发表在《科学美国人》、麻省理工学院出版社的《数学科学》(*The Mathematical Sciences*)和《二年学院数学杂志》(*Two Year College Mathematical Journal*)上;R. 赫什的《复兴数学哲学的一些建议》(*Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics*)和《介绍伊姆雷·拉卡托斯》(*Introducing Imre Lakatos*),分别发表在《数学进展》(*Advances in Mathematics*)和《数学通报》(*Mathematical Intelligencer*)上。

我们感谢下列组织和个人允许本书利用有关复制材料:哥廷根科学院,阿姆毕克斯、多佛出版公司,《计算数学》(*Mathematics of Com-*

putation)杂志,麻省理工学院出版社,《纽约人杂志》(New Yorker Magazine),舍恩菲尔德(A. H. Schoenfeld)教授,约翰·威利父子出版公司。

有关傅里叶分析的一节由 R. 赫什与 P. 赫什(P. Hersh)合著。P. 赫什在有关哲学问题的批判性讨论方面,在耐心而细致地校订粗糙的草稿方面,在对我们的计划提供不断的道义支持方面,都作出了必不可少的贡献,我们致以诚挚的谢意。

下列个人和机构慨然应允我们复制图像和美术资料:班乔夫(T. Banchoff)教授和斯特劳斯(C. Strauss)教授,布朗大学图书馆,现代艺术博物馆,鲁默斯公司,雷施(Ron Resch)教授,劳特利奇(Routledge)和保罗(K. Paul),萨克斯(A. J. Sachs)教授,芝加哥大学出版社,怀特沃什艺术馆,曼彻斯特大学,犹他大学计算机科学系,耶鲁大学出版社。

我们衷心感谢拉克斯(P. Lax)教授和吉安-卡洛·罗塔(Gian-Carlo Rota)教授给予鼓励和提出建议。斯托尔岑伯格(G. Stoltzenberg)教授曾就本书讨论的某些问题与我们进行了热情而富有成果的通信。库格勒(L. D. Kugler)教授阅读了原稿,并提出了很多有价值的批评意见。阿布雷乌(J. L. Abreu)教授参加了新墨西哥大学的数学哲学讨论会,在此一并表示感谢。

在布朗大学举行的数学哲学问题讨论会的参加者,还有新墨西哥大学和布朗大学有关课程的学生们,帮助我们使观点具体化,这种帮助感人至深。纳吉菲尔德(I. Najfeld)教授的援助特别令人难忘。

我们应对布朗大学数学史系的同事们表示谢意。在多年共进午餐的过程中,平格里(D. Pingree)教授、诺伊格鲍尔(O. Neugebauer)教授、萨克斯(A. J. Sachs)教授和吐默尔(G. Toomer)教授使我们获得了许多信息、见识和灵感。感谢谢定宇^①(Din-Yu Hsieh)教授提供的关

^① 音译。——译者注

于中国数学史的资料。

我们还要特别感谢爱迪生(E. Addison)提供了很多线条图。感谢拉齐尔(E. Lazear)细心审阅了第7章、第8章和她的编者评论。

感谢埃弗里(K. Avery)、毕甘(F. Beagan)、J. M. 戴维斯(J. M. Davis)、丰塞卡(E. Fonseca)和加多夫斯基(F. Gajdowski)在原稿准备和处理过程中给予的有效帮助。埃弗里女士还帮助我们查找了大量经典参考文献。最后,还要感谢杰维茨(J. Gevirtz)教授仔细阅读了第一次印刷版本并帮助我们发现了若干错误和误印之处。

P. J. 戴维斯, R. 赫什

引言

献给凯克(M. Kac)

“啊,富有营养的哲学!”

——萨特

19世纪末,瑞士历史学家布尔克哈特(J. Burckhardt)^①一反大多数历史学家的习惯,别出心裁地要猜测未来。他曾透露给友人尼采一个预言:20世纪将是“过分简单化的年代”。

布尔克哈特的预言得到了异常精确的证明。各种肤色的独裁者和政客们向大众许诺,在用一场战争结束所有战争后立即会有温饱和幸福的生活,这居然赢得了人们的信任。哲学家们大胆提出要把存在物的复杂性归结为弹性小球的力学;更有甚者,一些人认为生活就是语言,而语言不是别的,只是用弗雷格(F. L. G. Frege)逻辑令人迷惑地连成一体符号链。认真地端出各种红、白、蓝棋盘图案的艺术家们,现在在索斯比(Sotheby)拍卖行^②要着最高标价。诸如“机械地”、“自动地”、“即刻地”这类词汇的使用,已被麦迪逊大街(Madison Avenue)上的奇才们视为广告的第一法则。

最优秀的科学头脑也不曾避免过分简单化的诱惑。物理学一直被追求唯一规律的研究所驱动。在即将来临的日子里,这一规律会把

① 布尔克哈特(1818—1897),瑞士美术和社会史学家。——译者注

② 纽约著名拍卖行。——译者注

所有的力——引力、电、强和弱相互作用力以及别的什么力——都统一起来。生物学家沉迷于企求通过布满大分子的双螺旋结构来揭示生命奥秘。心理学家又建议用性释放、麻醉药物和原始呼用来治疗常见的抑郁症，而传教士们则会反对用不怎么值钱的献祭参加这种为再生举行的赞美合唱。

值得称道的是数学家最后才加入这个运动之中。数学，像神学和心智的所有自由创造一样，服从不可抗拒的幻想规律，主观意愿对于确定一条猜想的正确性是很少能有帮助的。当笛卡尔(R. Descartes)和格罗登迪克(A. Grothendieck)^①想把几何学归结为代数，或当罗素(B. Russell)和根岑(G. K. E. Gentzen)^②要把数学变为逻辑时，人们可能口头奉承，然而我们知道有些数学家更富有画图的天分，另一些则更善于摆弄符号，或在论证中挑毛病。

可是，当要理解数学家们活动的性质和数学在整个世界上的地位时，有些数学家就屈从于我们这个时代的过分简单化了。有充分的理由说，没有人愿意让人们议论其实际的所作所为，或者分析并记录他的私人工作习惯。如果这种报导让普罗克斯迈尔(Proxmire)参议员^③看到了，他会说些什么？息事宁人的最好办法是把那本代号 301 的科学哲学教科书塞到参议员手里。因为该书作者是一位哲学系的雄心勃勃的年青成员，他居然用无懈可击的清晰笔调描绘了理想的数学家在理想的世界里理想地工作的情景。

我们常听说数学的主要内容是“证明定理”，难道可以说作家的主要工作就是“造句”吗？数学家的工作多半是猜测、类比、机敏的思考和挫折纠缠在一起。证明远非数学发现的核心，它多半是确认我们的思维不是在玩把戏的一种方法。而在戴维斯和赫什之前，是不大有人

① 格罗登迪克(1928—)，法国数学家，菲尔兹奖获得者。——译者注

② 根岑(1909—1945)，德国数学家。——译者注

③ 普罗克斯迈尔(1915—2005)，1957年起当选为美国参议员。他以抨击政府开支的浪费，尤其是军事上的挥霍而著称。——译者注

敢于公然这样讲的。对于数学来说,定理并不是餐桌上那一道道烧好了的菜,营养角度的类比是错误的。掌握数学就是掌握一种难以捉摸的观点,它需要一种不使演奏拘泥于标准的艺术家的技巧。几何定理与整个几何学领域的关系,并不是元素与集合的关系。这里的关系是更微妙的。戴维斯和赫什对这一关系作了难得的忠实描述。

经过戴维斯和赫什的工作,就很难把数学看成变幻莫测的游戏了。作者通过有充分根据的叙述,表明数学的奥秘不过是心智活动中产生的结论得到了有力的实际应用。戴维斯和赫什选择的方法是描述这个奥秘而不是把它巧辩过去。

使数学易于为受过教育的外行所理解,同时又保持其高度的科学性,一向被认为是在专业蔑视的希勒(Scylla)岩礁^①与大众误解的克雷伯迪斯(Charybdis)大漩涡^①之间作充满风险的航行。戴维斯和赫什已经张满风帆渡过了这个海峡。他们开创了生存所不可缺少的关于数学经验的讨论。从他们的船尾望去,看到过分简单化的漩涡已后退到远处,我们可以宽慰地舒一口气了。

吉安-卡洛·罗塔

1980年8月9日

^① 希勒岩礁在意大利墨西拿(Messina)海峡上,对面有克雷伯迪斯大漩涡。——译者注

几何学追求的知识是永恒的知识。

——柏拉图,《理想国》,Ⅶ,527

时而清晰……时而模糊的东西……就是……数学。

——拉卡托斯,1922—1974

规定了的、整理了的、事实上的东西,永远不足以囊括全部真理:生活总是要溢出每一只杯子的边沿。

——帕斯特纳克^①,1890—1960

^① 帕斯特纳克,苏联诗人和翻译家。——译者注

序

直到五年前,我还是一个常规的数学家,决不干冒险的和异端的事情,比如写这样一部书。我有自己的“领域”——偏微分方程。我停留在那里,顶多越过它的边界到邻近领域转转。我的严肃思考,我的现实的智力生活,使用着多少年前学生时代的训练中吸取的范畴和评价模式。由于我不偏离这些范畴和模式,因而只能隐约意识到它们。它们是我看这个世界所用方式的一部分,而不是我正在看的这个世界本身的一部分。

我的进展依赖于我在自己领域中的研究和发表的成果。就是说,掌握这个领域里与我受过类似训练的人们所共有的观点和思考方式,是很有益的。这些人的评价决定了我的工作价值。任何其他人都没有资格这样做,他们也未必愿意这样做。我从未想过要从这种观念中解放出来,就是说去认识这种观念,意识到它不过是观察这个世界的众多可能方式之一,从而能够有选择地加以取舍,或将它与观察世界的其他方式放在一起进行比较和评估。因为所有这些都不是我的工作或事业所需要的。恰恰相反,这种异端的和无把握的冒险至多不过是愚蠢地糟塌大好时光,弄不好还会被人怀疑在诸如心理学、社会学和哲学这些领域进行隐蔽的投机而落得声名狼藉。

尽管如此,我终于发现,我对于被我们称为数学的这种奇怪活动所具有的意义和目的的惊异和迷恋,等同于,有时甚至超过我对于实际上做数学工作的迷恋。我发现数学是一个无限复杂和神秘的世界,

钻研它是我有一个永远不希望被治愈的癖好。在这一点上我同别的数学家是一样的。但是除此之外,我又发展了另一半,或“另一个我”,他惊异地注视着这个数学家,甚至更迷惑于这种奇怪的生物和这种奇怪的活动居然来到这个世界上,而且存在了几千年。

为了追本溯源,我要从我终于开始讲授“数学基础”这门课程的时候说起。这是一门主要为数学专业较高层次学生设立的课程。我教这门课的目的,如同以前教别的课程一样,是自己学习有关素材。这时我才知道有过关于基础的论争的历史,知道有三大学派,即罗素的逻辑主义派、希尔伯特(D. Hilbert)的形式主义派和布劳威(L. E. J. Brouwer)的构造主义派。我曾一般性地讲授这三派中每一派的观点,但不知道该赞同哪一派,而且对三大学派自从它们的创立者开展活动以来这半个世纪的演变结果只有模糊的认识。

通过讲授这门课程,我希望有机会阅读和研究数学基础的有关材料,最终澄清我自己对争论各方的看法。我并不企求变为数学基础研究的工作者,如同我教数论后并未变成数论专家一样。

由于我对基础的兴趣是在哲学方面而不是专业方面,我尝试使没有专业需要和预备条件但有兴趣的学生能来听这门课。我特别希望吸引学哲学和数学教育的学生,偏巧有几个这样的学生,也有些学生来自电机工程、计算机科学和其他领域。当然,学数学的学生还是主体,我找了几本很好看的教科书,就钻研了起来。

当站在这个数学、教育和哲学专业学生混合的班级面前讲授数学基础时,我发现自己处在一个新奇的位置上。以前我教了15年数学,在不同层次上讲过很多不同的主题,但我讲那些课程时其实并没有谈论数学,不过是在做数学。而在这里,我的目的不是去做它,却是去谈论它。这项截然不同的工作是令人激动的。

一个学期过去了,结果对我来说显然出乎意料。这门课程在一种意义上是成功的,它带来了大量有趣的材料、大量供热烈讨论和独立研究的机会,以及大量过去从未注意到的需要学习的新事物。但是在

另一种意义上,我发现我的设想落空了。

在普通的数学课堂上,教学计划是完全清楚的。我们有需要解决的问题,需要解释的计算方法,或者需要证明的定理。该做的主要事情一般是通过在黑板上书写来完成。如果问题解决了,定理证明了,或演算完成了,那么师生都知道已完成了日常任务。当然,即使是在这种普通的教学环境里,也总有可能发生某种意外事情。一个未预见到的困难,一个来自学生的意想不到的问题,都能使一堂课的进程偏离教师的原定计划。然而,人们毕竟知道该做什么,也知道你在黑板上写的东西是重要的。无论教师还是学生的发言,只是在有助于沟通对写出东西的理解的范围内,才是重要的。

在我开始讲数学基础这门课时,曾构思了一些我相信是核心的,并希望在学期末我们能回答,或至少能澄清的问题。

什么是数?什么是集合?什么是证明?在数学中我们知道什么?如何知道?什么是“数学的严格性”?什么是“数学直觉”?

在构思这些问题时,我意识到我并不知道答案。当然,这并不奇怪,因为这种模糊的“哲学”问题,不能指望有我们在数学中寻找的那种一清二楚的回答。对这些问题总是有种种不同意见的。

但使我烦恼的是,我不知道自己该持有怎样一种见解。更糟糕的是,我缺少一个基础,一个标准,用来评价各种不同意见,赞同或反对某种观点。

我开始同其他数学家讨论有关数学证明、数学知识和数学实在的问题。我发现他们也和我一样处于困惑的不确定状态,并且都有一种讨论和交流我们个人经验和内在信念的强烈愿望。

本书就是这些年来思索、倾听和辩论的成果的一部分。