21世纪数学规划教材

数学基础课系列

3rd Edition

解析几何（第三版）

Analytic Geometry

丘维声 编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

博雅

21世纪数学规划教材

数学基础课系列

解析几何

（第三版）

丘维声　编著

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目 (CIP) 数据

解析几何 / 丘维声编著 . — 3 版 . — 北京 : 北京大学出版社 , 2015. 7
(21 世纪数学规划教材 · 数学基础课系列)
ISBN 978-7-301-25921-4

Ⅰ . ①解…　Ⅱ . ①丘…　Ⅲ . ①解析几何 - 高等学校 - 教材　Ⅳ . ① O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 121214 号

书　　名　解析几何 (第三版)
著作责任者　丘维声　编著
责任编辑　曾琬婷
标准书号　ISBN 978-7-301-25921-4
出版发行　北京大学出版社
地　　址　北京市海淀区成府路 205 号　100871
网　　址　http://www.pup.cn　新浪微博 : @ 北京大学出版社
电子信箱　zpup@pup.cn
电　　话　邮购部 62752015　发行部 62750672　编辑部 62767347
印 刷 者　北京大学印刷厂
经 销 者　新华书店
880 毫米 × 1230 毫米　A5　13 印张　368 千字
1988 年 6 月第 1 版
1996 年 10 月第 2 版
2015 年 7 月第 3 版　2015 年 7 月第 1 次印刷
印　　数　99251—103250 册
定　　价　38. 00 元

作者简介

丘维声　1966年毕业于北京大学数学力学系；北京大学数学科学学院教授、博士生导师、全国高等学校第一届国家级教学名师，美国数学会 *Mathematical Reviews* 评论员，中国数学会组合数学与图论专业委员会首届常务理事，《数学通报》副主编，教育部高等学校数学与力学教学指导委员会（第一、二届）委员.

出版著作43部，发表教学研究论文22篇，编写的具有代表性的优秀教材有：《高等代数（上、下册）——大学高等代数课程创新教材》（清华大学出版社，2010年，"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材，北京市高等教育精品教材重大立项项目），《高等代数（上、下册）（第一、二、三版）》（高等教育出版社，1996年，2002年，2003年，2015年，普通高等教育"九五"教育部重点教材，普通高等教育"十五"国家级规划教材），《高等代数》（科学出版社，2013年，"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材），《解析几何（第一、二版）》（北京大学出版社，1988年，1996年），《抽象代数基础》（高等教育出版社，2003年），《近世代数》（北京大学出版社，2015年），《群表示论》（高等教育出版社，2011年），《数学的思维方式和创新》（北京大学出版社，2011年），《简明线性代数》（北京大学出版社，2002年，普通高等教育"十一五"国家级规划教材，北京高等教育精品教材），《有限群和紧群的表示论》（北京大学出版社，1997年），《高等代数学习指导书（上、下册）》（清华大学出版社，2005年，2009年）等.

从事代数组合论、群表示论、密码学的研究，在国内外学术刊物上发表科学研究论文46篇；承担国家自然科学基金重点项目2项，主持国家自然科学基金面上项目3项.

获全国高等学校第一届国家级教学名师奖，3次被评为北京大学最受学生爱戴的十佳教师，获北京市高等学校教学成果一等奖、宝钢教育奖优秀教师特等奖、北京大学杨芙清-王阳元院士教学科研特等奖，被评为北京市科学技术先进工作者、全国电视大学优秀主讲教师，3次获北京大学教学优秀奖等.

内容简介

本书是根据作者多年来在北京大学数学科学学院讲授“解析几何”课程的讲稿补充编写而成的，主要讲述解析几何的基本内容和基本方法，内容包括：几何空间的线性结构和度量结构、空间直线和平面、常见曲面、坐标变换、二次曲线方程的化简及其类型和性质、正交变换、仿射变换、射影平面和射影变换等．本书注意培养读者的空间想象能力，论证严谨而简明，叙述深入浅出、条理清楚，注意讲清楚所讨论问题的来龙去脉．书中有适量例题且每节都配有习题，书末附有习题答案与提示．

本书第二版自1996年出版以来，受到了广大读者的肯定和欢迎，印刷了22次，共发行了约10万册．这次修订保持了第二版的诸多优点，并结合了近20年来作者在“解析几何”课程教学改革上的经验积累和深刻思考；调整了部分结构，修改了某些章节的内容，使其更易于读者理解与掌握，便于教学与自学．

本书可作为综合性大学、理工科大学和高等师范院校本科生“解析几何”课程的教材，也可供其他学习“解析几何”课程的广大读者作为教材或教学参考书．

第三版前言

本书这次修订主要是加强和突出了以下几个方面:

1. 强调以研究几何空间的线性结构和度量结构以及图形的性质、分类为主线.

几何空间既可以看做所有点构成的集合，又可以看做以定点 O 为起点的所有定位向量构成的集合(或者空间中所有向量构成的集合，此时方向相同且长度相等的向量称为相等的向量). 由于向量有加法(三角形法则)和数量乘法两种运算，并且满足 8 条运算法则，因此几何空间中只要取定了三个不共面的向量 $\boldsymbol{d}_1$，$\boldsymbol{d}_2$，$\boldsymbol{d}_3$，那么每一个向量 $\boldsymbol{c}$ 可以表示成 $\boldsymbol{d}_1$，$\boldsymbol{d}_2$，$\boldsymbol{d}_3$ 的线性组合，并且表示方式唯一. 这就给出了几何空间的线性结构，即每一个向量 $\boldsymbol{c}$ 可以表示成 $\boldsymbol{c}=k_1\boldsymbol{d}_1+k_2\boldsymbol{d}_2+k_3\boldsymbol{d}_3$，且表示法唯一. $\boldsymbol{d}_1$，$\boldsymbol{d}_2$，$\boldsymbol{d}_3$ 称为一个基，有序数组$(k_1,k_2,k_3)^{\mathrm{T}}$(右上角加“T”表示写成一列)称为向量 $\boldsymbol{c}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1$，$\boldsymbol{d}_2$，$\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标. 在几何空间中取定一个点 O，则$[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$称为一个仿射坐标系. 向量 $\overrightarrow{OP}$ 在基 $\boldsymbol{d}_1$，$\boldsymbol{d}_2$，$\boldsymbol{d}_3$ 下的坐标称为点 P 在这个仿射坐标系中的坐标. 向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标等于终点 Q 的坐标减去起点 P 的坐标. 这样在仿射坐标系$[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_2]$中，点和向量都有了坐标. 如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是两两垂直的单位向量，那么$[O;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$称为直角坐标系. 几何空间的线性结构好比构筑了一个多功能的舞台，从而在这舞台上可以演出绚丽多彩的“几何戏剧”.

为了解决几何空间中有关长度、角度、垂直、面积、体积等的度量问题，除了需要有几何空间的线性结构外，还需要有几何空间的度量结构. 向量的内积的定义中包含了长度、角度的概念. 从内积的定义立即得出向量的内积具有对称性和正定性. 为了使内积能真正用来解决有关长度、角度和垂直等的度量问题，需要内积与几

何空间的线性结构相容，即要求内积具有线性性：

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b},\quad(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}).$$

为了证明向量的内积的确具有线性性，我们的方法如下：从内积的定义受到启发，我们引出了在轴 l（其单位方向向量为 $\boldsymbol{e}$）上的正投影的概念．过轴 l 上的原点 O 作与 l 垂直的平面 π，在平面 π 上取两个互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$，于是 $[O;\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3]$ 成为一个直角坐标系，从而几何空间中任给的一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以唯一表示成 $\boldsymbol{a}=\mu_1\boldsymbol{e}+\mu_2\boldsymbol{e}_2+\mu_3\boldsymbol{e}_3$．记 $\boldsymbol{a}_1=\mu_1\boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{a}_2=\mu_2\boldsymbol{e}_2+\mu_3\boldsymbol{e}_3$，则 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线，$\boldsymbol{a}_2$ 与 $\boldsymbol{e}$ 垂直，且 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$．我们把几何空间中每一个向量 $\boldsymbol{a}$ 对应到 $\boldsymbol{a}_1$（它与 $\boldsymbol{e}$ 共线）的映射称为在轴 l 上的正投影，记作 $\mathscr{P}_e$；并且把 $\boldsymbol{a}_1$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的内射影，把 $\boldsymbol{a}_2$（它与 $\boldsymbol{e}$ 垂直）称为 $\boldsymbol{a}$ 沿方向 $\boldsymbol{e}$ 下的外射影．利用几何空间的线性结构，容易证明 $\mathscr{P}_e$ 保持加法运算和数量乘法运算，即

$$\mathscr{P}_e(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathscr{P}_e(\boldsymbol{a})+\mathscr{P}_e(b),\qquad\mathscr{P}_e(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\mathscr{P}_e(\boldsymbol{a}).$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的内射影 $\boldsymbol{a}_1$ 与 $\boldsymbol{e}$ 共线，因此存在唯一的实数 μ_1，使得 $\boldsymbol{a}_1=\mu_1\boldsymbol{e}$．我们把 μ_1 称为 $\boldsymbol{a}$ 在方向 $\boldsymbol{e}$ 上的分量，记作 $\Pi_e(\boldsymbol{a})$．直接计算可得 $\Pi_e(a)=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle$．由于 $\mathscr{P}_e(\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}_1=\mu_1\boldsymbol{e}=\Pi_e(\boldsymbol{a})\boldsymbol{e}$，因此从 $\mathscr{P}_e$ 保持加法和数量乘法运算可以推出

$$\Pi_e(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\Pi_e(\boldsymbol{a})+\Pi_e(b),\quad\Pi_e(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\Pi_e(\boldsymbol{a}).$$

又从向量的内积的定义和分量的计算公式立即得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=|\boldsymbol{b}|\Pi_{b^0}(\boldsymbol{a}),$$

其中 $\boldsymbol{b}^0$ 是与 $\boldsymbol{b}$ 同向的单位向量．于是由分量的上述性质立即推出内积具有线性性．有了内积的线性性，我们就有了在直角坐标系（或仿射坐标系）中计算两个向量的内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的公式，从而可以利用向量的内积解决有关长度、角度和垂直的度量问题．

向量的外积可以用于解决有关面积的度量问题．这是因为，在外积的定义中，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度规定为 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，于是当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线时，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的长度表示以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积．从外积的定义立即得到 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，即外积满足反交换律．为了使外积能真正用来解决面积等度量问题，需要外积与几何空间的

线性结构相容. 要求外积与向量的加法运算相容, 即要有左、右分配律:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c},\quad(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a};$$

要求外积与向量的数量乘法相容, 即

$$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b}).$$

后者利用外积的定义和向量的数量乘法的定义容易证明. 关于左分配律的证明需要利用 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_2$, 其中 $\boldsymbol{b}_2$ 是 $\boldsymbol{b}$ 沿方向 $\boldsymbol{a}$ 的外射影, 并且利用“单位向量 $\boldsymbol{e}$ 与跟它垂直的向量 $\boldsymbol{b}$ 的外积 $\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b}$ 等于在按右手螺旋法则绕 $\boldsymbol{e}$ 旋转 $90°$ 下 $\boldsymbol{b}$ 的像 $\boldsymbol{b}'$”. 有了外积与线性结构相容, 我们就可以得到在右手直角坐标系(或仿射坐标系)中计算两个向量的外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 的公式, 从而可以利用外积来解决面积等度量问题.

向量的混合积可以用于解决有关体积的度量问题. 这是因为以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积等于 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}|$. 由此立即得到, 三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$. 取一个仿射坐标系 $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2,\boldsymbol{d}_3]$, 分别利用外积和内积的计算公式可得, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 等于以 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 的坐标为列的行列式乘以 $\boldsymbol{d}_1\times\boldsymbol{d}_2\cdot\boldsymbol{d}_3$. 由于 $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$, $\boldsymbol{d}_3$ 不共面, 因此 $\boldsymbol{d}_1\times\boldsymbol{d}_2\cdot\boldsymbol{d}_3\neq0$, 从而得到: 三个向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是以它们的坐标为列的行列式等于 0. 这个结论在建立平面的方程中起了关键作用.

有了几何空间的线性结构和度量结构, 就可以畅通无阻地建立平面的方程和直线的方程, 以及研究平面、直线的位置关系和度量关系, 进而建立旋转面、柱面、锥面的方程, 研究它们的性质, 以及利用二次曲面的标准方程研究它们的性质.

2. 既加强几何直观, 又使解析几何与高等代数水乳交融, 论证严谨而简明.

平面上的二次曲线有多少种类型? 如何从二次曲线 S 的方程辨认它是哪一种类型? 容易想到的办法是: 先作转轴, 使得二次曲线 S 的新方程中不出现交叉项; 然后对新方程配方, 作移轴, 使得 S 的方程变得简单, 易于辨认 S 是什么样的二次曲线. 设二次曲线 S 在直角坐标系 Oxy 中的方程为

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0. \tag{1}$$

把其中的二次项部分的系数组成一个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

把一次项系数的一半组成一个列向量 $\boldsymbol{\delta}=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$，则 S 的方程(1)可写成

$$(x,y)\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+2\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+a_0=0, \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}=(a_1,a_2)$. 作转轴

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵，且 $|\boldsymbol{T}|=1$，即

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

二次曲线 S 在转轴后的直角坐标系 Ox^*y^* 中的方程为

$$(x^*,y^*)\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}+2\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}+a_0=0. \tag{3}$$

于是 S 的新方程(3)中不出现交叉项(即 x^*y^* 项)当且仅当

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} a_{11}^* & 0 \\ 0 & a_{22}^* \end{pmatrix}. \tag{4}$$

通常的做法是：选取转角 θ，使得 S 的新方程(3)中交叉项的系数为 0. 这时 $\cot 2\theta$ 必须满足一个条件. 由此通过解一元二次方程解出 $\tan\theta$，再求出 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$，以便确定 $\boldsymbol{T}$. 然后 a_{11}^* 和 a_{22}^* 有一个用 $\tan\theta$ 表示的公式. 这个方法的计算量较大，要记忆的公式比较多. 我们现在的方法是换一个角度考虑. 设 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)$，则(4)式等价于

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)\begin{pmatrix} a_{11}^* & 0 \\ 0 & a_{22}^* \end{pmatrix},$$

即

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1=a_{11}^*\boldsymbol{\eta}_1,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2=a_{22}^*\boldsymbol{\eta}_2.$$

由此受到启发，引出了 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的概念：设 $\boldsymbol{A}$ 是实数域上的 n 阶矩阵，如果存在一个实数 λ_0 和 $\mathbf{R}^n$ 的一个非零向量 $\boldsymbol{\gamma}$，使得 $\boldsymbol{A\gamma}=\lambda_0\boldsymbol{\gamma}$，那么称 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，称 $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量. 于是 S 在转轴后的方程(3)不出现交叉项当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 有两个特征值 λ_1，λ_2，并且 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_1 的特征值向量 $\boldsymbol{\eta}_1$ 与属于特征值 λ_2 的特征向量 $\boldsymbol{\eta}_2$ 正交. 根据特征值和特征向量的定义可推导出 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值当且仅当 λ_0 是多项式 $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ 的两个实根，$\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量当且仅当 $\boldsymbol{\gamma}$ 是齐次线性方程组 $(\lambda_0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的一个非零解. 我们把多项式 $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式. 它的判别式 Δ 一定大于或等于0，等号成立当且仅当 $a_{11}=a_{22}$ 且 $a_{12}\neq 0$. 于是，当 $a_{12}\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式有两个不等实根 λ_1，λ_2，它们是 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值. 通过计算可得，此时 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的特征向量 $\boldsymbol{\gamma}_1$ 与属于 λ_2 的特征向量 $\boldsymbol{\gamma}_2$ 一定正交. 令 $\boldsymbol{\eta}_1=\frac{1}{|\boldsymbol{\gamma}_1|}\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{1}{|\boldsymbol{\gamma}_2|}\boldsymbol{\gamma}_2$，则 $\boldsymbol{\eta}_1$ 与 $\boldsymbol{\eta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的正交的单位特征向量，从而 $\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)$ 是正交矩阵. 适当选取 $\boldsymbol{\gamma}_i$，可使得 $|\boldsymbol{T}|=1$. 于是作转轴 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}$，则二次曲线 S 的新方程为

$$\lambda_1x^{*2}+\lambda_2y^{*2}+2\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}\begin{pmatrix}x^*\\y^*\end{pmatrix}+a_0=0. \tag{5}$$

我们用现在这个方法，既突显了二次曲线 S 在上述转轴后的新方程中平方项的系数恰好是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，不需要记忆用 $\tan\theta$ 表示 a_{11}^*，a_{22}^* 的公式，而且很明显地表示了求新方程中一次项系数的一半的公式：$\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}$. 这个方法体现了解析几何与高等代数的水乳交融.

3. 继续强调用变换的观点研究图形的性质和分类.

平面(作为点集)到自身的一个映射 σ，如果使得每一个点 P 到它的像点 P' 的指向是给定的一个方向 $\boldsymbol{a}$，并且 $|PP'|=|\boldsymbol{a}|$，那么称这个映射 σ 是平面沿向量 $\boldsymbol{a}$ 的平移. 在平面上取定一个点 O，给定一个角 α，平面到自身的一个映射 σ，如果使得每一个点 P 的像点

P' 满足 $\angle POP'=\alpha$，$|OP|=|OP'|$，那么称 σ 是平面绕点 O 转角为 α 的旋转．在平面上取定一条直线 l，平面到自身的一个映射 σ，如果使得不在直线 l 上的每一个点 P 与其像点 P'的连线段 PP'被直线 l 垂直平分，l 上每一个点的像点是它自身，那么称 σ 是平面关于直线 l 的反射（也称为轴反射）．平移、旋转、轴反射的共同特征是保持平面上任意两点的距离不变．抓住这个共同特征抽象出下述概念：平面（作为点集）到自身的一个映射 σ，如果保持任意两点的距离不变，那么称 σ 是平面上的一个正交（点）变换（或者保距变换）．从这个定义出发，经过逻辑推理，可得出：正交变换把直线映成直线，把线段映成线段，并且保持线段的分比不变；正交变换是可逆变换，并且它的逆变换也是正交变换；正交变换的乘积还是正交变换；正交变换把平行直线映成平行直线；正交变换保持角的大小不变；正交变换诱导了平面（作为向量的集合）到自身的映射，并且保持向量的加法和数量乘法运算；正交变换把直角坐标系Ⅰ映成直角坐标系Ⅱ，并且使得每一个点 P 的Ⅰ坐标等于它的像点 P' 的Ⅱ坐标；正交变换或者是平移，或者是旋转，或者是轴反射，或者是它们之间的乘积．从平移、旋转和轴反射保持任意两点的距离不变抽象出正交变换的概念，经过逻辑推理证明了正交变换一定是平移、旋转、轴反射或者它们之间的乘积，这是多么有意思地揭示出了事物的内在规律．

从一张底片洗出二寸照片一张，并且放大洗出六寸照片一张，这两张照片对应线段的比是一个常数 3．由此抽象出下述概念：平面（作为点集）到自身的一个映射 τ，如果使得对应线段的比为一个非零常数 k，那么称 τ 是一个相似变换，简称为相似，其中 k 称为相似比．如果有一个相似比为 k 的相似变换 τ，使得一个图形 E 的像是图形 E'，那么称 E 和 E'是相似图形，其中 k 称为这两个图形的相似比．银幕上的图像是幻灯片上的图像经过放大得到的．由此抽象出下述概念：在平面上取定一个点 O，平面到自身的一个映射 τ，如果使得每一个点 P 的像点 P' 满足 $\overrightarrow{OP'}=k\overrightarrow{OP}$，其中 k 是一个非零常数，那么称 τ 是中心为 O 的位似，其中 k 称为位似比．易看出，位似比

为 k 的位似变换是相似比为 $|k|$ 的相似变换. 还可证明：位似是可逆变换，并且它的逆变换也是位似；相似可以分解成一个位似与一个正交变换的乘积，从而相似是可逆变换．相似、位似都是可逆变换，且把共线三点映成共线三点．平面上沿方向 $\boldsymbol{e}$ 向着直线 l 的压缩，以及平面上的错切也都是可逆变换，且把共线三点映成共线三点．由此我们抽象出下述概念：平面(作为点集)到自身的映射 τ，如果是双射，并且把共线的三点映成共线的三点，那么称 τ 是平面上的一个仿射变换．从这个定义出发经过逻辑推理得到：仿射变换把不共线的三点映成不共线的三点；仿射变换的逆变换是仿射变换；仿射变换的乘积是仿射变换；仿射变换把平行直线映成平行直线；仿射变换把线段映成线段；仿射变换诱导了平面(作为向量的集合)到自身的一个映射，并且保持向量的加法和数量乘法运算；仿射变换保持线段的分比不变；仿射变换把仿射坐标系 Ⅰ 变成仿射坐标系 Ⅱ，并且每一个点 P 的 Ⅰ 坐标等于它的像点 P' 的 Ⅱ 坐标，反之也成立；平面上任给两组不共线三点 A_1，A_2，A_3 和 B_1，B_2，B_3，则存在唯一的仿射变换把 A_i 映成 $B_i(i=1,2,3)$；仿射变换 τ 在仿射坐标系 Ⅰ $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2]$ 中的公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

其中系数矩阵是可逆矩阵，其第 1 列是 $\tau(\boldsymbol{d}_1)$ 的 Ⅰ 坐标，第 2 列是 $\tau(\boldsymbol{d}_2)$ 的 Ⅰ 坐标，$(x_0,y_0)^{\mathrm{T}}$ 是 $\tau(\boldsymbol{0})$ 的 Ⅰ 坐标，$(x,y)^{\mathrm{T}}$，$(x',y')^{\mathrm{T}}$ 分别是点 P 和 $\tau(P)$ 的 Ⅰ 坐标；反之，如果平面上的一个点变换 τ 在仿射坐标系 Ⅰ $[O;\boldsymbol{d}_1,\boldsymbol{d}_2]$ 中的公式，其系数矩阵为可逆矩阵，那么 τ 是仿射变换. 这样，我们从仿射变换的定义出发，经过逻辑推理揭示出了仿射变换有多少(任给两组不共线的三点都存在唯一的仿射变换把第一组映成第二组)，平面上的点变换如果在仿射坐标系中的公式的系数矩阵是可逆矩阵，那么它就是仿射变换.

4. 把射影平面的概念从具体的几何模型(把 O 和扩大的欧氏平面)上升到公理化定义.

在几何空间中取定一点 O，过点 O 的所有直线和所有平面构成

的集合称为把 O. 把 O 是射影平面具体的几何模型. 几何空间作为以定点 O 为起点的所有定位向量组成的集合 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 3 维线性空间，过点 O 的直线是 V 的 1 维子空间，过点 O 的平面是 V 的 2 维子空间. 我们把 V 的 1 维子空间称为点，2 维子空间称为线，集合的包含关系作为关联关系，则所有点构成的集合，所有线构成的集合，连同关联关系一起成为一个射影平面，记作 $\mathrm{PG}(2,\mathbf{R})$. 理由是：$\mathrm{PG}(2,\mathbf{R})$ 的点集与把 O 的所有直线组成的集合有一个一一对应，$\mathrm{PG}(2,\mathbf{R})$ 的线集与把 O 的所有平面组成的集合有一个一一对应，并且这种对应关系保持关联性，因此 $\mathrm{PG}(2,\mathbf{R})$ 是一个射影平面. 利用线性空间的结构，容易证明：在 $\mathrm{PG}(2,\mathbf{R})$ 中，任给两个不同的点，有且只有一条线与它们关联；任给两条不同的线，有且只有一个点与它们关联；存在四个不同的点，其中任意三点都不与一条线关联. 由此抽象出射影平面的公理化定义：一个关联结构 $\mathscr{D}=(V,\mathscr{B},I)$（其中 V 是点集，$\mathscr{B}$ 是线集，I 是点与线的关联关系），如果满足：(1) 任给两个不同的点恰有一条线与它们关联；(2) 任给两条不同的线恰有一个点与它们关联；(3) 存在四个不同的点，其中任意三点都不与一条线关联，那么称 $\mathscr{D}$ 是一个射影平面. 这样，我们对射影平面的概念揭示出了它的内在本质.

5. 用数学的思维方式编写教材.

如何让数学比较不难学？如何把数学学得很好？作者的体会是用数学的思维方式学数学. 数学的思维方式是一个全过程：观察客观现象，抓住主要特征抽象出概念；提出要研究的问题. 运用“解剖麻雀”、直觉、归纳、类比、联想、逻辑推理等进行探索；猜测可能有的规律，而这个猜测是真是假要进行论证，数学的论证方法是只运用定义、公理和已经证明了的定理进行逻辑推理；揭示出事物的内在规律.

在本次修订中，我们用数学的思维方式编写教材，让读者比较容易地学习解析几何，而且学得好.

6. 这次修订对每一节的所有习题都给出了答案或提示.

本教材获得 2014 年度北京大学教材建设立项，特此向北京大学

教材建设委员会表示感谢!

作者感谢使用《解析几何(第二版)》作为教材的老师以及读者对第二版提出的宝贵修改建议.

作者感谢本书第一、二版的责任编辑王明舟和第三版的责任编辑曾琬婷, 他们对本书的出版付出了辛勤的劳动.

真诚欢迎广大读者对本书提出宝贵意见.

丘维声
北京大学数学科学学院
2014 年 9 月

前　　言

解析几何是大学数学系的主要基础课程之一，学好这门课对于学习数学分析、高等代数、微分几何和力学等课程都是有很大的帮助，并且它本身的内容对于解决一些实际问题也是很有用的.

本书是以作者近几年在北京大学数学系讲授解析几何课程的讲稿为基础编写成的. 编写中主要考虑了以下几点：

1. 贯穿全书的主线是阐述解析几何的几种基本方法：坐标法、向量法、坐标变换法、点变换法. 第一、二、三章主要讲坐标法和向量法，并且用这些方法讨论了空间中的平面和直线，以及常见曲面. 第四、五章主要讲坐标变换法，并且用这些方法讨论了二次曲线方程的化简. 第六、七章主要讲点变换法，讲了三种变换：正交变换、仿射变换和射影变换；讲了如何用点变换法研究图形的性质；并且运用这些变换分别讨论了二次曲线的正交分类、仿射分类和射影分类.

2. 本书主要讲欧氏几何和仿射几何，同时射影几何的内容也占了一定的篇幅. 本书在讲射影几何的内容时，紧紧抓住几何背景(主要是抓住“中心投影”和“把”)，从而使读者易于理解射影平面、齐次坐标、交比、射影坐标和射影映射等概念.

3. 本书注意培养读者对空间图形的直观想象能力，这尤其体现在第三章中关于旋转面、柱面和锥面方程的建立，以及专门用一节介绍了画空间图形常用的三种方法，画曲面的交线和画曲面围成的区域的方法.

4. 本书论证严谨，同时又力求简明. 叙述上深入浅出，条理清楚，注意讲清所讨论问题的来龙去脉.

5. 本书在第四章 §2 结合坐标变换引进了矩阵的概念，讲了矩阵的运算以及可逆矩阵、正交矩阵等内容. 这样从第四章 §3 开始，

本书就运用了矩阵的工具，从而使很多叙述和证明变得比较简单.

6. 本书仔细注意了习题的选择和配置. 每一节后面都配了习题，有些习题是为了熟练掌握正文内容的，有些习题是富有启发性的，有的习题是对正文内容的补充. 加“ * ”号的题较难一些.

本书可供综合大学和高等师范院校的数学系、力学系作为解析几何教材. 如果周学时为 4 + 2(即每周 4 学时讲课，2 学时习题课)，则一学期可讲完全书(加“ * ”号的内容可略去). 如果周学时为 3 + 1，则可略去加“ * ”号内容以及第六章 §6 和第七章.

作者衷心感谢姜伯驹教授，他仔细审阅了本书初稿，提出了许多宝贵的修改意见，尤其是第七章，在他的指导下，作者对这一章的初稿做了修改，使得该章的质量有了很大的提高.

作者感谢章学诚副教授和尤承业副教授，他们曾经对本书初稿的提纲提出了宝贵意见. 作者还要感谢吴光磊教授、丁石孙教授、程庆民教授、田畴教授以及北京大学数学系几何与代数教研室的同志们给予的支持和帮助.

由于作者水平的限制，书中缺点错误在所难免，诚恳地希望大家批评指正.

丘 维 声

1986 年 4 月于北京大学

目　　录